Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Голубев, Кинетическая теория сверхизлучательного лазера, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 2, 250–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:11:15

Ю.М. Голубев*

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА

Статистические свойства излучения сверхизлучательного лазера анализируются на основе кинетического уравнения для матрицы плотности поля генерации. Предложен оригинальный метод вывода этого уравнения. Исследованы статистические свойства лазерной среды в стационарном режиме генерации, и на этой основе рассмотрен качественный механизм возникновения квантовых свойств лазерной генерации. Проанализирована роль скорости распада внутрирезонаторных фотонных флуктуаций и статистических свойств активной среды в подавлении дробового шума фототока. С точки зрения физики исследован наиболее интересный случай слабой внешней накачки: если активная среда при этом возбуждена слабо, то максимально возможная депрессия дробового шума достигает только 50%, в то же самое время при сильном возбуждении среды депрессия достигает 100%. Оптический спектр генерации получен вдали от зоны неустойчивости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхизлучательный лазер был предложен и в значительной мере теоретически изучен в работе [1]. Он действует на основе трехуровневых атомов, причем все возможные атомные переходы осуществляются только в когерентных процессах. Переход 0–2 (см. рисунок) осуществляется внешней оптической накачкой, переход 2–1 лазерный, и, наконец, переход 1–0 соответствует коллективной спонтанной эмиссии. Интерес к этой системе связан с тем, что в ней возможно осуществить условия, при которых будет генерироваться свет с предельными квантовыми свойствами, причем для этого не нужно предпринимать каких-либо дополнительных усилий, связанных с поиском источников шумов и их компенсацией. Теоретическое рассмотрение сверхизлучательного лазера осуществлялось методом операторных уравнений Ланжевена. Этот подход очень эффективен, поскольку позволяет оценить ситуации в широкой области физических параметров. Например, он одинаково хорош для газовых, твердотельных лазеров и микролазеров. Тем не менее мы будем развивать здесь другой подход, связанный с использованием кинетического уравнения для матрицы плотности поля генерации. Покажем, что кинетическая теория предсказывает те же результаты, что и оригинальный подход [1]:

* Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета

если возбуждение среды слабое, т.е. лазерные уровни заселены слабо по сравнению с основным состоянием, то возможно лишь частичное, до 50%, подавление дробового шума при фоторегистрации; при эффективном же возбуждении среды дробовый шум может быть подавлен полностью.

Имеется несколько причин, по которым мы собираемся использовать иной теоретический подход. Прежде всего вследствие того что, с нашей точки зрения, качественный механизм проявления квантовых свойств света в сверхизлучательном лазере остался нераскрытым, необходимо дополнительное исследование, причем по возможности затрагивающее большее число физических деталей. Метод кинетического уравнения для матрицы плотности поля генерации не такой прямой, как метод уравнений Ланжевена, использованный в работе [1]. Однако именно из-за этого физические особенности задачи могут выявиться в нем более выпукло, и возможности для формирования удовлетворительной качественной картины могут оказаться более широкими. В конечном счете мы предложим один из возможных физических вариантов формирования квантовых свойств лазерной генерации. Нетрудно убедиться в том, что любая флуктуация заселенности верхнего лазерного уровня вызывает точно такую же, но другого знака флуктуацию заселенности основного состояния и немедленно компенсируется ею вследствие индуцированных процессов. Здесь следует понимать, что атомный переход 1–0 происходит в сверхизлучательном процессе точно так же, как при взаимодействии этого перехода с одной выделенной резонаторной модой [1].

Для понимания физики статистических процессов в сверхизлучательном лазере важно не только правильно оценить глубину провала в дробовом шуме, но и понять, каким образом этот провал сформировался. Как известно, глубина провала равна отношению параметра Манделя к скорости затухания фотонных флуктуаций в резонаторе (при идеальном фотодетектировании). Параметр Манделя характеризует квантовое состояние внутрирезонаторного полевого осциллятора. Как будет показано, он одинаков при слабом и сильном возбуждении среды и равен $-\frac{1}{2}$. Это возможно только в том случае, если заселенность верхнего лазерного уровня не флуктуирует вовсе, как в случае субпуассоновского лазера [2], или воспринимается лазерной генерацией как таковая. Анализ показывает, что мы должны принять второе, поскольку интегральные флуктуации заселенности верхнего уровня не равны нулю и, более того, зависят от степени возбуждения среды. Однако, если низкие частоты шумов заселенности подавлены в достаточно широкой спектральной области, то подобная накачка воспринимается как нешумящая вовсе [3] независимо от уровня интегральных характеристик. Подобное представление вполне согласуется с нашей качественной картиной, основанной на использовании только индуцированных процессов. Совсем другое дело, когда мы обсуждаем скорость затухания фотонных флуктуаций. Понятно, что она должна быть пропорциональна ве-

личине именно интегральной флуктуации: при сильном возбуждении среды скорость затухания в два раза меньше, чем при слабом, поскольку, как оказывается, величина интегральных флуктуаций тоже в два раза меньше. И как результат при сильном возбуждении глубина провала в дробовом шуме оказывается в два раза больше и провал достигает нуля. В этой связи возникает вопрос о том, каким образом изменить флуктуационную кинетику, не меняя условия в активной среде, а, например, меняя физические условия выхода фотонов из резонатора. Мы полагаем, что в случае, когда в сверхизлучательном лазере обычное выходное зеркало заменено активным зеркалом, пропускание которого уменьшается с ростом мощности генерации, формирование квантового света может облегчаться и может быть достигнуто полное подавление дробового шума даже при слабом возбуждении среды.

Еще одна причина, почему мы хотим применить метод кинетического уравнения, состоит в том, что при использовании метода уравнений Ланжевена в работе [1] применяются линеаризации по малым флуктуациям различных физических параметров. При этом фазовая диффузия лазерной генерации в некотором смысле игнорируется. Точнее говоря, усреднение физических величин производится по временам, много меньшим характерного времени диффузии фазы. При этом большинство характеристик удастся вычислить правильно, включая и скорость диффузии фазы, но спектральный контур генерации в подобной теории не описывается. Метод кинетического уравнения позволяет преодолеть эту трудность.

Наконец, основная для нас причина состоит в том, что в дальнейшем мы собираемся решать задачу о переносе квантового света через слой сверхизлучательной среды в безрезонаторном варианте. Мы будем это делать на основе кинетического уравнения переноса [4], в котором будут непосредственно использоваться результаты именно кинетической теории лазера.

Мы должны также отметить еще некоторые методические особенности этой работы. В частности, для угловых моментов будем использовать представление Швингера [5], базирующееся на применении бозе-операторов. Этот подход верен, когда атомные состояния полностью симметричны по всевозможным перестановкам атомов. Поскольку основное состояние является полностью симметричным, а все процессы в рассматриваемой системе идут с сохранением типа симметрии, то тем самым можно утверждать, что сюда укладывается довольно широкий круг явлений.

Другая важная формальная особенность состоит в использовании диагонального представления Глаубера [6]. Как известно, это представление — “плохое” для неклассических световых полей. Вследствие этого в кинетическом уравнении в диагональном представлении содержатся всевозможные производные по комплексным амплитудам поля высоких порядков, соответствующие сингулярным свойствам матрицы. Однако мы покажем, что эти сингулярные члены при достаточно малых величинах фотонных флуктуаций не могут играть никакой роли при конструировании оптического спектра генерации и спектра фототока при фоторегистрации.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА

Пусть $\hat{F}$ — матрица плотности большой физической системы, состоящей из N атомов

и одиночной лазерной моды. Тогда исходное уравнение мы можем записать в виде

$$\frac{d}{dt}\hat{F} = -i[\hat{V}, \hat{F}] - \frac{k}{2}\hat{R}_f\hat{F} - \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\hat{F}. \quad (1)$$

Здесь гамильтониан взаимодействия

$$\hat{V} = \hat{V}_{\text{laser}} + \hat{V}_{\text{pump}} \quad (2)$$

включает член

$$\hat{V}_{\text{laser}} = ig(a\hat{S}_{21} - a^+\hat{S}_{12}),$$

описывающий взаимодействие атомной среды с лазерной модой, и член

$$\hat{V}_{\text{pump}} = i\Omega(\hat{S}_{20} - \hat{S}_{02}),$$

описывающий возбуждение среды внешним тоже одномодовым электромагнитным полем накачки (Ω – соответствующая частота Раби). Имеются обычные коммутационные соотношения для атомных и фотонных операторов

$$[a, a^+] = 1, \quad [\hat{S}_{ij}, \hat{S}_{kl}] = \delta_{jk}\hat{S}_{il} - \delta_{il}\hat{S}_{kj}. \quad (3)$$

Поскольку операторы $\hat{S}_{ii}$ имеют смысл операторов заселенностей и мы рассматриваем замкнутую систему уровней, то

$$\sum_{i=0,1,2} \hat{S}_{ii} = N. \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем использовать этот закон сохранения. Однако он не единственный. Действительно, нетрудно получить, что величина $\sum_{ij} \hat{S}_{ij}\hat{S}_{ji}$ сохраняется также. Это следует из коммутационного соотношения

$$\left[\hat{S}_{mn}, \sum_{ij} \hat{S}_{ij}\hat{S}_{ji} \right] = 0.$$

Мы имеем возможность написать, что для полностью симметричных атомных состояний [1]

$$\sum_{i,j=0,1,2} \hat{S}_{ij}\hat{S}_{ji} = N(N+2). \quad (5)$$

Действительно, мы имеем право использовать при этом представление Швингера [5]

$$\hat{F}_{ik} = \hat{A}_i^+ \hat{A}_k, \quad [\hat{A}_i^+, \hat{A}_k] = \delta_{ik}. \quad (6)$$

Совокупность выражений (4) и (6) дает (5).

В дальнейшем мы ограничимся только случаями полностью симметричных атомных состояний и соответственно используем (4)–(6).

Уход фотонов из оптического резонатора формально обеспечивается оператором

$$\hat{R}_f = \overrightarrow{a^+ a} + \overleftarrow{a^+ a} - 2 \overrightarrow{a} \overleftarrow{a^+}. \quad (7)$$

Оператор

$$\hat{R}_{\text{at}} = \hat{\underline{S}}_{10} \hat{\underline{S}}_{01} + \hat{\underline{S}}_{10} \hat{\underline{S}}_{01} - 2 \hat{\underline{S}}_{10} \hat{\underline{S}}_{01} \quad (8)$$

обеспечивает коллективную спонтанную эмиссию среды.

Стрелки под операторами указывают на направление действия этих операторов по отношению к правее стоящим операторам, включая матрицу плотности; k – скорость ухода фотонов из резонатора, γ – скорость спонтанной эмиссии одиночного атома.

Перейдем к представлению Глаубера [6] в уравнении (1):

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= \int \hat{\Phi}(\alpha, t) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha, \\ a|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle, \quad d^2 \alpha = d(\text{Re } \alpha) d(\text{Im } \alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Диагональное представление $\hat{\Phi}(\alpha, t)$ остается оператором по отношению к атомным переменным:

$$\frac{d}{dt} \hat{\Phi} = \left(-i\hat{L} - \frac{\gamma}{2} \hat{R}_{\text{at}} + \frac{k}{2} \hat{R}'_f + g\hat{D} \right) \hat{\Phi}, \quad (10)$$

здесь

$$\hat{V}' = \hat{V}'_{\text{laser}} + \hat{V}_{\text{pump}}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}'_{\text{laser}} &= ig(\alpha \hat{S}_{21} - \alpha^* \hat{S}_{12}), \\ \hat{L} &= \hat{\underline{V}}' - \hat{\underline{V}}', \end{aligned} \quad (12)$$

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \hat{\underline{S}}_{21} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \hat{\underline{S}}_{12}, \quad (13)$$

$$\hat{R}'_f = \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^*. \quad (14)$$

Для дальнейшего перепишем это в переменных U, φ :

$$\alpha = \sqrt{U} e^{i\varphi}, \quad (15)$$

тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial U} \sqrt{U} e^{-i\varphi} + \frac{1}{2i\sqrt{U}} \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{-i\varphi} \quad (16)$$

и запишем операторы $\hat{D}, \hat{R}'_f$ в виде

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial U} \sqrt{U} e^{-i\varphi} (\hat{\underline{S}}_{21} + \hat{\underline{S}}_{12}) + \frac{1}{2i\sqrt{U}} \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{-i\varphi} (\hat{\underline{S}}_{21} - \hat{\underline{S}}_{12}), \quad (17)$$

$$\hat{R}'_f = \frac{\partial}{\partial U} U. \quad (18)$$

3. ФОРМАЛЬНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Теперь мы должны построить основное кинетическое уравнение для матрицы плотности поля генерации

$$\rho(\alpha, t) = \text{Sp}_{\text{at}} \hat{\Phi}(\alpha, t), \quad \int d^2\alpha \rho(\alpha, t) = 1. \quad (19)$$

Полную матрицу $\hat{\Phi}$ представим в виде

$$\hat{\Phi} = \hat{\sigma} \rho + \hat{\pi}, \quad (20)$$

где $\hat{\sigma}$ — матрица плотности атомной подсистемы в классическом “внешнем” поле α :

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma} = - \left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2} \hat{R}_{\text{at}} \right) \hat{\sigma}, \quad \text{Sp}_{\text{at}} \hat{\sigma} = 1. \quad (21)$$

При этом имеем

$$\text{Sp}_{\text{at}} \hat{\pi} = 0, \quad (22)$$

и тогда вместо (10) получим два новых уравнения:

$$\frac{d}{dt} \rho = \left(g \overline{\hat{D}}_{\alpha} + \frac{k}{2} \hat{R}'_f \right) \rho - g \text{Sp}_{\text{at}} (\hat{D} \hat{\pi}), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\pi} = & - \left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2} \hat{R}_{\text{at}} \right) \hat{\pi} - g (\hat{D} - \overline{\hat{D}}_{\alpha}) \hat{\sigma} \rho - \\ & - g \hat{D} \hat{\pi} + g \text{Sp}_{\text{at}} (\hat{D} \hat{\pi}) \hat{\sigma} + \frac{k}{2} \hat{R}'_f \hat{\pi}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\overline{\hat{D}}_{\alpha} = \text{Sp} [\hat{D} \hat{\sigma}(\alpha)]. \quad (25)$$

Поскольку в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что атомный временной цикл $0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ много меньше, чем характерное время генерации k^{-1} , то можно выбрать $\sigma(\alpha)$ в виде стационарного решения (21).

Чтобы получить замкнутое уравнение для ρ , мы должны выразить теперь $\hat{\pi}$ через ρ с помощью (24) и подставить затем это в выражение (23). При этом разумно предположить, что $\hat{\pi}$ адиабатически следует вслед за ρ , если σ уже стационарно:

$$\hat{\pi}(t) = \hat{\pi}(\rho(t)). \quad (26)$$

Запишем π в виде итерационного ряда

$$\hat{\pi} = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 + \dots, \quad (27)$$

предполагая, что члены, содержащие α -производные в уравнении (24), малы. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}\hat{\pi}_0 = -\left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\right)\hat{\pi}_0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\pi}_1 = & -\left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\right)\hat{\pi}_1 - g\left(\hat{D} - \overline{\hat{D}}_\alpha\right)\hat{\sigma}\rho - \\ & - g\hat{D}\hat{\pi}_0 + g\text{Sp}_{\text{at}}(\hat{D}\hat{\pi}_0)\hat{\sigma} + \frac{k}{2}\hat{R}'_f\hat{\pi}_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку уравнение (28) однородное, оно не может дать ненулевого решения при нулевом начальном условии. Потому $\hat{\pi} = \hat{\pi}_1$, и в адиабатическом приближении имеет место следующее равенство:

$$\left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\right)\hat{\pi}_1 + g(\hat{D} - \overline{\hat{D}}_\alpha)\rho\hat{\sigma} = 0. \quad (30)$$

Его формальное решение имеет вид

$$\hat{\pi}_1 = -g\left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\right)^{-1}\delta\hat{D}_\alpha\rho\hat{\sigma}, \quad (31)$$

здесь $\delta\hat{D}_\alpha = \hat{D} - \overline{\hat{D}}_\alpha$.

Теперь мы должны подставить это в (23). В результате получается замкнутое дифференциальное уравнение для ρ :

$$\frac{d}{dt}\rho = \left(g\overline{\hat{D}}_\alpha + \frac{k}{2}\hat{R}'_f + g^2\overline{\left(\delta\hat{D}_\alpha\left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\right)^{-1}\delta\hat{D}_\alpha\right)_\alpha}\right)\rho. \quad (32)$$

Учитывая (13), (14), выделим α -производные в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho = & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha[k - p(|\alpha|^2)]\rho - g^2\overline{\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{S}_{21}\left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{S}_{21}\right)_\alpha}\rho - \\ & - g^2\overline{\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\hat{S}_{12}\left(i\hat{L} + \frac{\gamma}{2}\hat{R}_{\text{at}}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{S}_{21}\right)_\alpha}\rho + \text{с. с.}, \end{aligned} \quad (33)$$

здесь величина

$$p(|\alpha|^2) = -2g\frac{1}{\alpha}\overline{\hat{S}}_{\alpha,12} \quad (34)$$

имеет смысл нелинейного коэффициента усиления лазерного перехода.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛЫХ ФОТОННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ И УРАВНЕНИЕ ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЙ ЛАЗЕРНОЙ ТЕОРИИ

В разложении $\hat{\pi}$ в ряд (27) мы приняли во внимание только первый ненулевой член $\hat{\pi}_1$. В соответствии с этим уравнение (33) содержит первые и вторые производные по

α . Это приближение не всегда верно. В частности, если мы имеем дело с квантовыми полями, то обязаны учитывать весь π -ряд (27). Соответственно уравнение (33) оказывается полиномом бесконечной степени по α -производным. В этом проявляются “плохие” свойства диагонального представления Глаубера. Однако далее мы покажем, что наши цели достижимы независимо от этих высоких производных. Это является прямым следствием приближения малых фотонных флуктуаций, которое мы собираемся здесь всюду использовать.

Перепишем уравнение (33) в полярных координатах, принимая в расчет, что

$$U = \bar{n} + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll \bar{n}. \quad (35)$$

Для этого мы должны учесть полуклассическое лазерное уравнение, которое следует из (33) в пренебрежении всеми флуктуациями (всеми производными по комплексным амплитудам выше первой) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \bar{n} = (k - p(\bar{n})) \bar{n} = 0. \quad (36)$$

В соответствии с (35)

$$p(|\alpha|^2 = \bar{n} + \varepsilon) = p(\bar{n}) + \frac{dp(\bar{n})}{d\bar{n}} \varepsilon. \quad (37)$$

Имея в виду (17), (18) и удерживая основные члены, мы можем написать

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon \rho) + D_\varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{2} D_\Phi \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} + \{\dots\}, \quad (38)$$

где $\{\dots\}$ — совокупность членов с высшими по ε и φ производными, здесь

$$\Gamma = -\frac{dp(\bar{n})}{d\bar{n}} \bar{n}, \quad (39)$$

$$D_\varepsilon = \Gamma \xi \bar{n}, \quad \overline{\Delta n^2} = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n}(1 + \xi), \quad (40)$$

$$D_\Phi = \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}. \quad (41)$$

Следовательно, чтобы сформулировать кинетическую теорию в окончательном виде, мы должны вычислить величины $\bar{n}$, $\overline{S}_{\alpha,12}$, ξ , $\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}$. Последующие разделы и будут посвящены этому.

5. ДИНАМИКА АТОМОВ ВО “ВНЕШНЕМ” ПОЛЕ α

Здесь будет использоваться уравнение (21). Тогда для средних величин

$$\overline{\hat{S}}_{\alpha,ik} = \text{Sp}[\hat{S}_{ik} \hat{\sigma}(\alpha)] \quad (42)$$

(в дальнейшем всюду индекс α указывает на усреднение с матрицей $\hat{\sigma}$) получают следующие известные уравнения:

$$\bar{\bar{S}}_{\alpha,00} + \bar{\bar{S}}_{\alpha,11} + \bar{\bar{S}}_{\alpha,22} = N, \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\bar{S}}_{\alpha,11} = -\gamma\overline{\bar{S}_{\alpha,10}\bar{S}_{\alpha,01}} - g\left(\alpha\bar{\bar{S}}_{\alpha,21} + \alpha^*\bar{\bar{S}}_{\alpha,12}\right) = 0, \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\bar{S}}_{\alpha,22} = \Omega\left(\bar{\bar{S}}_{\alpha,20} + \bar{\bar{S}}_{\alpha,02}\right) + g\left(\alpha\bar{\bar{S}}_{\alpha,21} + \alpha^*\bar{\bar{S}}_{\alpha,12}\right) = 0, \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt}\alpha\bar{\bar{S}}_{\alpha,21} = -\frac{\gamma}{2}\alpha\overline{\bar{S}_{\alpha,20}\bar{S}_{\alpha,01}} - g|\alpha|^2\left(\bar{\bar{S}}_{\alpha,22} - \bar{\bar{S}}_{\alpha,11}\right) + \Omega\alpha\bar{\bar{S}}_{\alpha,01} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{d}{dt}\alpha\bar{\bar{S}}_{\alpha,01} = \frac{\gamma}{2}\left(\bar{\bar{S}}_{\alpha,11} - \bar{\bar{S}}_{\alpha,00}\right)\alpha\bar{\bar{S}}_{01} - g|\alpha|^2\bar{\bar{S}}_{\alpha,02} - \Omega\alpha\bar{\bar{S}}_{\alpha,21} = 0, \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\bar{S}}_{\alpha,20} = \frac{\gamma}{2}\overline{\bar{S}_{\alpha,10}\bar{S}_{\alpha,21}} - \Omega\left(\bar{\bar{S}}_{\alpha,22} - \bar{\bar{S}}_{\alpha,00}\right) + g\alpha^*\bar{\bar{S}}_{\alpha,10} = 0. \quad (48)$$

На основе (6) нетрудно установить, что для полностью симметричных атомных состояний

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\alpha,10}\hat{S}_{\alpha,02} &= \hat{S}_{\alpha,12}(\hat{S}_{\alpha,00} + 1), \\ \hat{S}_{\alpha,10}\hat{S}_{\alpha,21} &= \hat{S}_{\alpha,11}\hat{S}_{\alpha,20}, \\ \hat{S}_{\alpha,10}\hat{S}_{\alpha,01} &= \hat{S}_{\alpha,11}(\hat{S}_{\alpha,00} + 1), \end{aligned} \quad (49)$$

и тогда имеются следующие приближенные факторизации:

$$\begin{aligned} \overline{\hat{S}_{\alpha,10}\hat{S}_{\alpha,02}} &\approx \bar{\bar{S}}_{\alpha,12}\bar{\bar{S}}_{\alpha,00} \approx \bar{\bar{S}}_{\alpha,10}\bar{\bar{S}}_{\alpha,02}, \\ \overline{\hat{S}_{\alpha,10}\hat{S}_{\alpha,21}} &\approx \bar{\bar{S}}_{\alpha,11}\bar{\bar{S}}_{\alpha,20} \approx \bar{\bar{S}}_{\alpha,10}\bar{\bar{S}}_{\alpha,21}, \\ \overline{\hat{S}_{\alpha,10}\hat{S}_{\alpha,01}} &\approx \bar{\bar{S}}_{\alpha,11}\bar{\bar{S}}_{\alpha,00} \approx \bar{\bar{S}}_{\alpha,10}\bar{\bar{S}}_{\alpha,01}. \end{aligned} \quad (50)$$

Конечно, при этом мы обязаны полагать, что все средние величины достаточно велики, а их относительные флуктуации малы.

Математическая ситуация, связанная с системой уравнений (43)–(48), может быть значительно упрощена, если сразу принять во внимание условие самосогласования среды и поля генерации, которое может быть получено из (1) в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\bar{n} = -k\bar{n} - g\left(\overline{aS_{21}} + \overline{a^+S_{12}}\right) = 0. \quad (51)$$

Таким образом, в стационарном состоянии имеется соотношение

$$\overline{a^+S_{12}} + \overline{aS_{21}} = -\frac{k}{g}\bar{n}. \quad (52)$$

Мы будем использовать это равенство в приближенной форме:

$$\alpha^*\bar{\bar{S}}_{\alpha,12} + \alpha\bar{\bar{S}}_{\alpha,21} = -\frac{k}{g}n \quad (|\alpha|^2 \equiv n). \quad (53)$$

Поскольку в нашем случае все частотные отстройки предполагаются равными нулю, мы имеем право написать

$$\alpha^* \bar{S}_{\alpha,12} = \alpha \bar{S}_{\alpha,21} = -\frac{k}{2g} n. \quad (54)$$

Принимая в расчет теперь (44), (45), мы можем получить

$$\bar{S}_{\alpha,10} \bar{S}_{\alpha,01} = \bar{S}_{\alpha,11} \bar{S}_{\alpha,00} = \frac{k}{\gamma} n, \quad (55)$$

$$\bar{S}_{\alpha,20} = \bar{S}_{\alpha,02} = \frac{k}{2\Omega} n. \quad (56)$$

Используя другие уравнения, получим равенства

$$\left(\bar{S}_{\alpha,22} - \bar{S}_{\alpha,11} \right)^2 = \frac{k\gamma}{g^2} \frac{\Omega^2}{\gamma^2} \left(1 - \frac{k\gamma}{4g^2} \frac{g^2 n}{\Omega^2} \right)^2, \quad (57)$$

$$\left(\bar{S}_{\alpha,11} - \bar{S}_{\alpha,00} \right)^2 = \frac{k\gamma}{g^2} \frac{\Omega^2}{\gamma^2} \left(1 - \frac{g^2 n}{\Omega^2} \right)^2. \quad (58)$$

Эти уравнения вместе с (43) образуют замкнутую систему уравнений для атомных заселенностей $\bar{S}_{\alpha,00}$, $\bar{S}_{\alpha,11}$ и $\bar{S}_{\alpha,22}$. Она имеет решение в самом общем случае, но мы ограничимся более простыми и в то же время наиболее интересными ситуациями, когда

$$\frac{g^2 n}{\Omega^2} \gg \frac{g^2}{k\gamma}, 1 \quad (59)$$

и

$$\bar{S}_{\alpha,11} \ll \bar{S}_{\alpha,00}, \bar{S}_{\alpha,22}. \quad (60)$$

Физически первое неравенство означает, что накачка Ω выбирается достаточно слабой. Тем не менее, как увидим дальше, эта накачка способна обеспечить эффективное возбуждение среды. Необходимо отметить, что неравенство (60) не является независимым и впрямую следует, как увидим дальше, из (59).

Теперь удерживая в (57), (58) основные члены, получим

$$\bar{S}_{\alpha,22} = \sqrt{\frac{k\gamma}{g^2} \frac{\Omega}{\gamma} \frac{k\gamma}{4g^2} \frac{g^2 n}{\Omega^2}}, \quad (61)$$

$$\bar{S}_{\alpha,00} = \sqrt{\frac{k\gamma}{g^2} \frac{\Omega}{\gamma} \frac{g^2 n}{\Omega^2}}. \quad (62)$$

Поскольку $\bar{S}_{\alpha,00} + \bar{S}_{\alpha,22} \approx N$, подставляя сюда (61), (62), получим

$$n = \frac{N\Omega}{k} \sqrt{\frac{k\gamma}{g^2}} \left[1 + \frac{k\gamma}{4g^2} \right]^{-1} \quad (63)$$

и затем

$$\bar{\bar{S}}_{\alpha,00} = N \left[1 + \frac{k\gamma}{4g^2} \right]^{-1}, \quad \bar{\bar{S}}_{\alpha,22} = N \frac{k\gamma}{4g^2} \left[1 + \frac{k\gamma}{4g^2} \right]^{-1}. \quad (64)$$

Чтобы найти выражение для $\bar{\bar{S}}_{\alpha,11}$, используем равенство (55):

$$\bar{\bar{S}}_{\alpha,11} = \frac{\Omega}{\gamma} \sqrt{\frac{k\gamma}{g^2}}. \quad (65)$$

А теперь нетрудно видеть, что условие (60) действительно обеспечивается условием (59).

Чтобы в наших формулах убрать влияние самосогласования, мы должны в них удалить параметр k , заменив его в соответствии с равенством

$$k = f(n), \quad (66)$$

которое следует из (63).

Получим теперь явное выражение для Γ (39). Согласно (37), (55)

$$\Gamma = n \frac{d}{dn} \left(2g \frac{1}{n} \alpha^* \bar{\bar{S}}_{\alpha,12} \right) = -n \frac{dk}{dn} = -n \left(\frac{dn}{dk} \right)^{-1}, \quad (67)$$

В силу (63) имеем

$$\Gamma = 2k \left[1 + \frac{k\gamma}{4g^2} \right] \left[1 + \frac{3k\gamma}{4g^2} \right]^{-1}. \quad (68)$$

Это выражение в точности такое же, как в работе [1] при слабой внешней накачке Ω .

6. ФОТОННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ПРИ $\Omega = 0$

Этот раздел посвящается вычислению параметра Мандела ξ (40). Для этого будем использовать исходное уравнение (1). Условие (59) дает возможность упростить математическую ситуацию. Будем полагать, что слабая накачка Ω вносит только несущественные поправки в стационарные флуктуации физических величин. Потому флуктуационная часть задачи будет решаться при $\Omega = 0$.

Следующие операторы представляют флуктуации соответствующих физических величин:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= a^+ a - \bar{n}, & \hat{\varepsilon}_{ii} &= \hat{S}_{ii} - \bar{\bar{S}}_{ii}, \\ \hat{\varepsilon}_{02} &= \hat{S}_{02} - \bar{\bar{S}}_{02}, & \hat{\varepsilon}_{20} &= \hat{S}_{20} - \bar{\bar{S}}_{20}, \\ \hat{\varepsilon}_{21} &= a \hat{S}_{21} - \overline{a \hat{S}_{21}}, & \hat{\varepsilon}_{12} &= a^+ \hat{S}_{21} - \overline{a^+ \hat{S}_{21}}, \\ \hat{\varepsilon}_{01} &= a \hat{S}_{01} - \overline{a \hat{S}_{01}}, & \hat{\varepsilon}_{10} &= a^+ \hat{S}_{10} - \overline{a^+ \hat{S}_{10}}. \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь следует заметить, что оператор $\hat{\varepsilon}$ не совпадает с неоператорной случайной флуктуацией ε (35). В частности, для параметра Мандела (40) имеет место соотношение

$$\xi = \frac{\overline{\varepsilon^2}}{\bar{n}} = \frac{\overline{\hat{\varepsilon}^2}}{\bar{n}} - 1. \quad (70)$$

В дальнейшем будем требовать, чтобы все представленные флуктуации были малы по сравнению с соответствующими средними величинами. Необходимо подчеркнуть, что флуктуации, например, величины $a^+ \hat{S}_{10}$ действительно малы в отличие от флуктуации величины $\hat{S}_{10}$, которая при усреднении по стационарному состоянию становится равной нулю из-за фазовой диффузии лазерной генерации.

Теперь с помощью уравнения (1) мы можем получить следующие выражения:

$$\frac{d}{dt} \overline{\hat{\varepsilon}^2} = -2k(\overline{\hat{\varepsilon}^2} - \bar{n}) - 2g(\overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{21}} + \overline{\hat{\varepsilon}_{12} \hat{\varepsilon}}) = 0, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{21}} = & - \left(\frac{3k}{2} + \frac{\gamma}{2} \overline{\hat{S}_{00}} \right) \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{21}} + \left(\frac{\gamma}{2} \overline{a \hat{S}_{21}} + g \bar{n} - g \overline{\hat{S}_{22}} \right) \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{11}} + \\ & + \left(\frac{\gamma}{2} \overline{a \hat{S}_{21}} - g \bar{n} - g \overline{\hat{S}_{11}} \right) \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{22}} - g \overline{\hat{\varepsilon}_{21}^2} - \\ & - g(\overline{\hat{S}_{22}} - \overline{\hat{S}_{11}})(\overline{\hat{\varepsilon}^2} - \bar{n}) - g \bar{n} \overline{\hat{\varepsilon}_{11} \hat{\varepsilon}_{22}} = 0, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{22}} = -k \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{22}} - k(\overline{\hat{\varepsilon}^2} - \bar{n}) - g(\overline{\hat{\varepsilon}_{21} \hat{\varepsilon}_{22}} + \overline{\hat{\varepsilon}_{22} \hat{\varepsilon}_{12}}) = 0, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{11}} = & - (k + \gamma \overline{\hat{S}_{00}} - \gamma \overline{\hat{S}_{11}}) \overline{\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{11}} + \gamma \overline{\hat{\varepsilon}_{11} \hat{\varepsilon}_{22}} + \\ & + k(\overline{\hat{\varepsilon}^2} - \bar{n}) - g(\overline{\hat{\varepsilon}_{21} \hat{\varepsilon}_{11}} + \overline{\hat{\varepsilon}_{11} \hat{\varepsilon}_{12}}) = 0, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \xi \bar{n} = & - \frac{2g}{k} \overline{\hat{\varepsilon}_{21} \hat{\varepsilon}_{22}} + \left[\frac{1}{\bar{n}} \overline{\hat{\varepsilon}_{21}^2} + \overline{\hat{\varepsilon}_{11} \hat{\varepsilon}_{22}} - \right. \\ & \left. - \frac{2g}{\gamma \overline{\hat{S}_{00}}} \left(\frac{\overline{\hat{S}_{22}}}{\overline{\hat{S}_{00}}} - 1 + \frac{\overline{\hat{S}_{22}}}{\bar{n}} \right) \overline{\hat{\varepsilon}_{21} \hat{\varepsilon}_{11}} \right] \left[\frac{\overline{\hat{S}_{22}}}{\overline{\hat{S}_{00}}} + 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (75)$$

Решая эту систему и удерживая только основные члены в рамках приближения (59), (60), получим

$$\xi \bar{n} = \overline{\hat{\varepsilon}^2} - \bar{n} = - \frac{2g}{k} \overline{\hat{\varepsilon}_{21} \hat{\varepsilon}_{22}} = - \frac{1}{2}. \quad (76)$$

Здесь принято в расчет, что $\frac{\overline{\hat{\varepsilon}_{21}^2}}{\bar{n}}$ и $\overline{\hat{\varepsilon}_{11} \hat{\varepsilon}_{22}}$ имеют порядок величины $\overline{\hat{S}_{11}}$ (см. раздел 11).

7. ФАЗОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ПРИ $\Omega = 0$

Согласно (41) мы должны написать выражение для $\dot{\varphi}^2$. Это возможно сделать на основе уравнения (10), используя U, φ -представление. Нетрудно получить, что

$$\dot{\varphi}^2 = ig \frac{1}{\sqrt{U}} \overline{\varphi e^{-i\varphi} \hat{S}_{21}} - ig \frac{1}{\sqrt{U}} \overline{\varphi e^{i\varphi} \hat{S}_{12}}. \quad (77)$$

Мы имеем право заменить в уравнении (77) величину U средним числом фотонов $\bar{n}$, пренебрегая тем самым влиянием фотонных флуктуаций на фазовые. Кроме того, поскольку это уравнение одинаково хорошо пригодно как для коротких временных интервалов, так и для длинных, то ограничимся короткими, полагая, что $\varphi \ll 1$. Тогда имеем

$$\dot{\varphi}^2 = g \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} (i \overline{\varphi \hat{S}_{21}} - i \overline{\varphi \hat{S}_{12}}). \quad (78)$$

Точно таким же образом можно написать

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\overline{i\varphi\hat{S}_{21}} - \overline{i\varphi\hat{S}_{12}}) = g \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}(\overline{\hat{S}_{21}\hat{S}_{12}} + \overline{\hat{S}_{12}\hat{S}_{21}} - \overline{\hat{S}^2_{12}} - \overline{\hat{S}^2_{21}}) - \\ - \frac{\gamma}{2}(\overline{i\varphi\hat{S}_{20}\hat{S}_{01}} - \overline{i\varphi\hat{S}_{10}\hat{S}_{02}}). \end{aligned} \quad (79)$$

Здесь справа опущен член $\Omega(\overline{i\varphi\hat{S}_{01}} - \overline{i\varphi\hat{S}_{10}})$. Как и прежде, мы предполагаем, что накачка в силу ее малости несущественна при формировании стационарных флуктуаций. Это, разумеется, так только вдали от области неустойчивости [1].

Стационарное решение (79) имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\overline{i\varphi\hat{S}_{21}} - \overline{i\varphi\hat{S}_{12}}\right)_{\text{st}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \frac{g}{\gamma\hat{S}_{00}} \left(\overline{\hat{S}_{22}} + \overline{\hat{S}_{11}} + 2\overline{\hat{S}_{11}\hat{S}_{22}} - \overline{\hat{S}^2_{12}} - \overline{\hat{S}^2_{21}}\right) \approx \\ \approx \frac{g}{\gamma\sqrt{\bar{n}}} \frac{\hat{S}_{22}}{\hat{S}_{00}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Здесь, как и прежде, мы приняли в расчет, что величины $\frac{\overline{\hat{\varepsilon}^2_{21}}}{\bar{n}}$ и $\overline{\hat{\varepsilon}_{11}\hat{\varepsilon}_{22}}$ порядка $\overline{\hat{S}_{11}}$ (см. раздел 11). В результате в приближении (59) при $(\gamma N)^{-1} \ll t \ll D_{\Phi}^{-1}$ имеем

$$\dot{\overline{\varphi^2}} = D_{\Phi}, \quad D_{\Phi} = \frac{k}{4\bar{n}}. \quad (81)$$

8. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ В ОКОНЧАТЕЛЬНОМ ВИДЕ

Суммируя предыдущие формулы, можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon \rho) + D_{\varepsilon} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{2} D_{\Phi} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} + \{\dots\}. \quad (82)$$

В случае слабого внешнего поля Ω (см. (59)) вдали от зоны неустойчивости имеем

$$\Gamma = 2k \left[1 + \frac{k\gamma}{4g^2}\right] \left[1 + \frac{3k\gamma}{4g^2}\right]^{-1} \quad (83)$$

(см. (68)),

$$D_{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\Gamma\bar{n} \quad (84)$$

(см. (40), (76)),

$$D_{\Phi} = \frac{k}{4\bar{n}} \quad (85)$$

(см. (81)). На этой основе мы можем построить все нужные средние величины. Интересующие нас средние – это оптический спектр:

$$I(\omega) = \text{Re} \int dt \overline{a^+ a(t)} e^{i\omega t}, \quad (86)$$

и спектр фототока (спектр шума):

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{\text{shot}}^{(2)} \left[1 + \frac{1}{\bar{n}} 2q \operatorname{Re} \int dt \overline{a^+ a^+(t) a(t) a} e^{i\omega t} \right] \quad (87)$$

(q – квантовая эффективность фотокатода). Используя диагональное представление Глаубера и приближение малых фотонных флуктуаций, мы можем получить, что оптический спектр формируется главным образом фазовыми флуктуациями, а спектр шума – фотонными. Действительно,

$$\overline{a^+ a(t)} = \overline{\alpha^* \alpha(t)} \approx \bar{n} e^{i\varphi(t) - i\varphi(0)}$$

и

$$\overline{a^+ a^+(t) a(t) a} = \overline{|\alpha|^2(t) |\alpha|^2} = \bar{n}^2 + \overline{\varepsilon(t) \varepsilon}.$$

В этой связи можно исследовать не основное уравнение (82), а два более простых:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon R) + D_{\varepsilon} \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} + \{\dots\}, \quad (88)$$

$\{\dots\}$ – это набор ε -производных всех порядков выше второго;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} D_{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \{\dots\}, \quad (89)$$

$\{\dots\}$ – это набор φ -производных всех порядков выше второго.

Здесь мы имеем фотонную

$$R(\varepsilon, t) = \int d\varphi \rho(\sqrt{\bar{n} + \varepsilon} e^{i\varphi}, t) \quad (90)$$

и фазовую

$$\Phi(\varphi, t) = \int d\varepsilon \rho(\sqrt{\bar{n} + \varepsilon} e^{i\varphi}, t) \quad (91)$$

матрицы плотности.

Эти новые уравнения вытекают автоматически из основного уравнения (82) интегрированием последнего поочередно по φ и ε .

9. СПЕКТР ФОТОТОКА

Как ясно [6] видно,

$$\overline{\varepsilon(t) \varepsilon} = \int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 R(\varepsilon_1, t=0) G(\varepsilon_1, t=0 | \varepsilon_2, t). \quad (92)$$

Условная вероятность G подчиняется в точности тому же уравнению (88):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} (\varepsilon_2 G) + D_{\varepsilon} \frac{\partial^2 G}{\partial \varepsilon_2^2} + \{\dots\} \quad (93)$$

с начальным условием

$$G(\varepsilon_1, t = 0 \mid \varepsilon_2, t = 0) = \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1). \quad (94)$$

Поступая в согласии с (92), мы можем получить уравнение для искомой величины

$$\frac{d}{dt} \overline{\varepsilon(t)\varepsilon} = -\Gamma \overline{\varepsilon(t)\varepsilon}. \quad (95)$$

Необходимо подчеркнуть, что это уравнение точное и никак не зависит от членов $\{\dots\}$ в (88). Решение (95) имеет простую форму

$$\overline{\varepsilon(t)\varepsilon} = \overline{\varepsilon^2} e^{-\Gamma t} = -\frac{1}{2} \bar{n} e^{-\Gamma t} \quad (96)$$

($\overline{\varepsilon^2} = \xi \bar{n}$). Отсюда немедленно следует спектр в явном виде:

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{\text{shot}}^{(2)} \left[1 - q \frac{k\Gamma}{\Gamma^2 + \omega^2} \right]. \quad (97)$$

Чтобы сравнить эффекты, полученные в [1], и наш, необходимо переписать эту формулу в обозначениях [1]:

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{\text{shot}}^{(2)} \left[1 + 2Q2k\tau \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \right], \quad (98)$$

здесь Q – это параметр Мандела (наш ξ), τ^{-1} – скорость затухания фотонных флуктуаций внутри резонатора (наша Γ) и $(2k)^{-1}$ – время жизни фотона в резонаторе (наше k^{-1}).

Тогда нетрудно видеть, что

$$S(0, c) = -4Qk\tau, \quad (99)$$

$$\frac{1 + 6c + c^2}{2(1 + c)^2} = -Q \frac{3 + c}{1 + c}. \quad (100)$$

В результате имеем

$$Q = -\frac{1}{2} - \frac{c - 1}{(3 + c)(1 + c)}. \quad (101)$$

Если $|c - 1| \ll 1$ или $|c - 1| \gg 1$, то $Q = -\frac{1}{2}$, что совпадает с нашим результатом. Причину отличия в области параметров, где $c - 1$ порядка 1, нужно исследовать дополнительно, но ясно, что это отличие несущественно даже в своем максимальном проявлении. Действительно максимальное отличие достигается при $c = \sqrt{8}$, но тогда согласно (97) наш шумовой спектр имеет провал с относительной глубиной 0.76, а согласно [1] – 0.88.

Нетрудно видеть, что при слабом возбуждении активной среды ($\frac{k\gamma}{4g^2} \ll 1$) $\Gamma = 2k$ (68) и возможно только частичное вплоть до 50%, если $q = 1$, подавление околонулевых

частот спектра шума. В то же самое время при эффективном возбуждении среды (при $\frac{k\gamma}{4g^2} = 1$) $\Gamma = k$ и подавление дробового шума может достичь 100%.

Важно отметить, что различие между случаями 50% подавления шума и 100% подавления связаны с разными скоростями затухания фотонных флуктуаций внутри резонатора. При слабом возбуждении среды эта скорость слишком велика, в результате чего фотоны при наблюдении оказываются раскоррелированными. При сильном возбуждении среды скорость затухания становится ниже и как раз такой, чтобы обеспечить максимальный квантовый эффект. Эта ситуация наталкивает на мысль, что, может быть, при ином способе уменьшения скорости затухания фотонных флуктуаций возможно достичь того же самого эффекта. Нам представляется, например, перспективным использование активного вместо обычного пассивного резонаторного зеркала.

10. ОПТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЛАЗЕРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

При исследовании фазовых флуктуаций в уравнении (89) мы имеем право ограничиться диффузионным приближением, удерживая справа только вторую производную по фазе, поскольку коэффициент при этой производной вполне “хороший”. Как и прежде,

$$\overline{e^{i\varphi(t)-i\varphi(0)}} = \int d\varphi_1 d\varphi_2 e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} \Phi(\varphi_1, t=0) G(\varphi_1, t=0 | \varphi_2, t), \quad (102)$$

где G — это снова условная вероятность, подчиняющаяся тому же уравнению, что и сама фазовая вероятность, но с начальным условием

$$G(\varphi_1, t=0 | \varphi_2, t=0) = \delta(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (103)$$

Тогда нетрудно получить, что

$$\frac{d}{dt} \overline{e^{i\varphi(t)-i\varphi(0)}} = \frac{D_\Phi}{2} \overline{e^{i\varphi(t)-i\varphi(0)}}, \quad (104)$$

и, таким образом,

$$\overline{e^{i\varphi(t)-i\varphi(0)}} = e^{-\frac{D_\Phi}{2}t}. \quad (105)$$

В результате оптический спектр (86) имеет вид

$$I_\omega = \bar{n} \frac{\frac{D_\Phi^2}{4}}{\frac{D_\Phi^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2}, \quad D_\Phi = \frac{k}{4\bar{n}}. \quad (106)$$

Напомним, что этот результат верен только в той области параметров, где нет никакой неустойчивости. Согласно [1] фазовая неустойчивость возникает при $\left|1 - \frac{4g^2}{k\gamma}\right| \ll 2p$.

11. АТОМНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ПРИ $\Omega = 0$

Чтобы понять качественный механизм образования квантовых свойств лазерной генерации, нужно иметь информацию о статистических свойствах активной среды в этом

случае. Для построения нужного атомного статистического момента мы будем использовать уравнение (21):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,21} = & -2\gamma \overline{\widehat{S}}_{\alpha,00} \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,21} - \\ & - gn(\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} - \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} - \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}}) = 0, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = & -\gamma \overline{\widehat{S}}_{\alpha,00} \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \gamma \overline{\widehat{S}}_{\alpha,11} (\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,22}) - \\ & - g(\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}} - \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} - \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}}) = 0, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = & -\frac{\gamma}{2} \overline{\widehat{S}}_{\alpha,00} \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + g \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,21} + g \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}} - \\ & - gn(\overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,22} - \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}}) + \frac{\gamma}{2} \alpha \overline{\widehat{S}}_{\alpha,21} (\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,22}) = 0, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} = & -\frac{3\gamma}{2} \overline{\widehat{S}}_{\alpha,00} \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} - g \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,21} - g \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} - \\ & - gn(\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} - \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,11}) + \gamma \overline{\widehat{S}}_{\alpha,11} (\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}}) + \\ & + \frac{\gamma}{2} \alpha \overline{\widehat{S}}_{\alpha,21} (\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,11}) = 0, \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,11} = & -2\gamma \overline{\widehat{S}}_{\alpha,00} \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,11} + \gamma \overline{\widehat{S}}_{\alpha,11} \overline{\widehat{S}}_{\alpha,00} - \\ & - g(\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}}) + \\ & + 2\gamma \overline{\widehat{S}}_{\alpha,11} (\overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,11} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}}) = 0, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\widehat{\varepsilon}^2}_{\alpha,22} = g(\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}}) = 0. \quad (112)$$

Необходимо добавить сюда равенство

$$\widehat{\varepsilon}_{00} + \widehat{\varepsilon}_{11} + \widehat{\varepsilon}_{22} = 0, \quad (113)$$

которое является прямым следствием закона сохранения (4). Кроме того, имеется несколько полезных равенств:

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}} = n(\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{S}}_{\alpha,22}), \quad (114)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} = n(\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\widehat{S}}_{\alpha,11}), \quad (115)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} = \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \alpha \overline{\widehat{S}}_{\alpha,21}, \quad (116)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} = \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11} \widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} + \alpha \overline{\widehat{S}}_{\alpha,21}, \quad (117)$$

которые следуют из коммутационных соотношений (3).

Согласно (112), (116) мы можем написать следующие выражения:

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = 0, \quad (118)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} - \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = -\frac{k}{2g}n, \quad (119)$$

тогда

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} = \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = -\frac{k}{4g}n, \quad (120)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}} = \frac{k}{4g}n. \quad (121)$$

Таким же образом в соответствии с (107), (117) напомним

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} + \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} = \frac{2\gamma\overline{S}_{00}}{gn}\overline{\varepsilon_{21}^2}, \quad (122)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} - \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} = -\frac{k}{2g}n. \quad (123)$$

В результате имеем

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} = \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}} = -\frac{k}{4g}n + \frac{\gamma\overline{S}_{00}}{g\overline{n}}\overline{\varepsilon_{21}^2}, \quad (124)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}} = \overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,12}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} = \frac{k}{4g}n + \frac{\gamma\overline{S}_{00}}{gn}\overline{\varepsilon_{21}^2}. \quad (125)$$

Теперь из (108)–(111), принимая в расчет (89), получаем

$$-\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} + \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,22}\frac{\overline{S}_{11}}{\overline{S}_{00}} + \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,21}\frac{2}{\overline{n}} = 0, \quad (126)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}}\left(2 - \frac{\overline{S}_{22}}{\overline{S}_{00}}\right) - \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,22}\left(1 + \frac{\overline{S}_{22}}{\overline{S}_{00}}\right) + \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,21}\frac{1}{\overline{n}} = -\frac{1}{2}\overline{S}_{22}, \quad (127)$$

$$-\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}}\left(2 + \frac{\overline{S}_{22}}{\overline{S}_{00}}\right) + \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,11}\left(1 - \frac{\overline{S}_{22}}{\overline{S}_{00}}\right) - \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,21}\frac{6\overline{S}_{22}}{n\overline{S}_{11}} = \frac{3}{2}\overline{S}_{22}, \quad (128)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}}\frac{\overline{S}_{11}}{\overline{S}_{00}} - \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,11} - \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,21}\frac{2}{\overline{n}} = -\frac{1}{2}\overline{S}_{11}. \quad (129)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\overline{\varepsilon^2}_{\alpha,22} = \overline{\varepsilon^2}_{\alpha,00} = \frac{\overline{S}_{\alpha,22}}{2}\left[1 + \frac{k\gamma}{4g^2}\right]^{-1}, \quad (130)$$

$$\overline{\varepsilon^2}_{\alpha,11} = \overline{S}_{\alpha,11}, \quad (131)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = -\frac{\overline{S}_{\alpha,11}}{2}\left[1 + \frac{k\gamma}{4g^2}\right]^{-1}, \quad (132)$$

$$\overline{\varepsilon^2}_{\alpha,21} = -\frac{n\overline{S}}{4}\overline{S}_{\alpha,11}, \quad (133)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,11}} = -\frac{k}{2g}n = \sqrt{nS_{11}S_{22}}, \quad (134)$$

$$\overline{\widehat{\varepsilon}_{\alpha,21}\widehat{\varepsilon}_{\alpha,22}} = \frac{k}{4g}n = \frac{1}{2}\sqrt{nS_{11}S_{22}}. \quad (135)$$

12. ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Теперь мы имеем возможность сделать все необходимые заключения о статистических свойствах среды. Однако следует помнить, что нами рассматривается случай слабой внешней накачки (59), которая тем не менее может обеспечивать и слабое, и сильное возбуждение среды в зависимости от величины параметра $\frac{g^2}{k\gamma}$. Запишем в явном виде некоторые средние величины. При слабом возбуждении среды ($\frac{g^2}{k\gamma} \gg 1$) формулы для заселенностей выглядят следующим образом:

$$\bar{S}_{\alpha,00} \approx N, \quad \bar{S}_{\alpha,11} = \frac{\Omega}{\gamma} \sqrt{\frac{k\gamma}{g^2}}, \quad \bar{S}_{\alpha,22} = N \frac{k\gamma}{g^2}. \quad (136)$$

Когерентные свойства среды определяются выражениями

$$\bar{S}_{\alpha,10} = -\sqrt{\frac{k}{\gamma}} \alpha, \quad \bar{S}_{\alpha,02} = \frac{k}{2\Omega} n, \quad \bar{S}_{\alpha,12} = -\frac{k}{2g} \alpha. \quad (137)$$

Эти формулы записаны с учетом самосогласования лазерной среды и поля лазерной генерации. Если мы хотим знать, как ведет себя среда во внешнем поле, из этих формул надо каким-то образом вывести условие самосогласования. Для этого мы должны выразить скорость ухода фотонов из резонатора через среднее число фотонов в резонаторе в стационарном режиме генерации. Для случая слабого возбуждения среды это сделать просто:

$$k = \frac{\Omega^2}{g^2 n} \frac{N}{n} N \gamma. \quad (138)$$

Используя (63) и подставляя (138) в (136), (137), получим

$$\bar{S}_{\alpha,00} \approx N, \quad \bar{S}_{\alpha,11} = \frac{\Omega^2}{g^2 n} N, \quad \bar{S}_{\alpha,22} = \frac{1}{4} \frac{\Omega^2}{g^2 n} \frac{\gamma^2 N^2}{g^2 n}, \quad (139)$$

$$\bar{S}_{\alpha,10} = \frac{N\Omega}{g\alpha^*}, \quad \bar{S}_{\alpha,02} = \frac{N^2\Omega\gamma}{2g^2 n}, \quad \bar{S}_{\alpha,12} = -\frac{N^2\Omega^2\gamma}{2g^3 |\alpha|^2 \alpha^*}. \quad (140)$$

Теперь рассмотрим случай сильного возбуждения среды, когда

$$\frac{k\gamma}{4g^2} = 1 + \delta, \quad \delta \ll 1, \quad (141)$$

тогда имеем

$$\bar{S}_{\alpha,00} = \bar{S}_{\alpha,22} = \frac{N}{2}, \quad \bar{S}_{\alpha,11} = \frac{2\Omega}{\gamma}. \quad (142)$$

Как видим, статистика заселения состояний 0 и 2 оказывается субпуассоновской (130). Это как раз и обеспечивает в конечном счете квантовые свойства лазерной генерации. Потому важно понять на качественном уровне, каким образом в этой системе устанавливается подобная статистическая картина. Прежде всего необходимо заметить, что

динамика сверхизлучательной атомной системы (с коллективным спонтанным распадом $1 \rightarrow 0$ в свободное пространство) в точности такая же, как если бы на переходе $1-0$ среда взаимодействовала только с одной выделенной модой резонатора, хотя и достаточно широкой в спектральном отношении [1]. Это наводит на мысль, что отличие спонтанной динамики от коллективной состоит только в одном: в спонтанном или индуцированном излучении на переходе $1-0$. Итак, будем полагать, что переход $1-0$, так же как и переход $2-1$, осуществляется за счет индуцированных процессов. Предположим, что в некоторый момент на уровне 2 возникла положительная флуктуация заселенности уровня. Понятно, что одновременно точно такая же флуктуация, но отрицательная, возникла на уровне 0. Однако тогда в тот же самый момент времени возникают дополнительные одинаковые импульсы стимулированного излучения на переходе $2-1$ и $1-0$. В результате флуктуации заселенностей оказываются в точности скомпенсированными. Иная картина возникает, если полагать, что переход $1-0$ осуществляется за счет спонтанной эмиссии. Теперь флуктуации заселенностей не могут компенсировать друг друга, поскольку из-за случайности спонтанных распадов между флуктуационными импульсами разных знаков всегда имеются какие-то временные задержки, что приводит к разрастанию во времени первоначально возникшей флуктуации.

В заключение мы хотим поблагодарить проф. Фрица Хааке (Эссенский университет, Германия) за плодотворные дискуссии.

Данное исследование частично было возможным благодаря гранту INTAS-93-1914 Международной ассоциации по осуществлению кооперации с учеными независимых государств бывшего Советского Союза.

Список литературы

- [1] *F. Haake, M. Kolobov, C. Fabre, E. Giacobino, S. Reynaud.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. № 7. P. 995.
- [2] *Ю. М. Голубев, И. В. Соколов.* ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 408.
- [3] *Ю. М. Голубев.* ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 832.
- [4] *Ю. М. Голубев.* ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 466.
- [5] *J. Schvinger.* In: Quantum theory of angular momentum. Eds L. E. Biedernharn and H. Van Dam. New York: Academic Press, 1965.
- [6] *J. R. Klauder, E. C. G. Sudarshan.* Fundamentals of Quantum Optics. New York–Amsterdam: Benjamin, Inc., 1968.

Поступила в редакцию 8.IX.1995 г.

Yu. M. Golubev

KINETIC THEORY OF SUPEREMITTING LASER

The statistical radiating properties of the superemitting laser are studied on the base of the kinetic equation for the density matrix of the generating field. The original derivation of this equation is proposed. The statistical properties of a laser environment are investigated in a stationary regime of generating. We analyzed the role of the disintegration velocity of inner resonator photon fluctuations and the statistical properties of an active environment in suppressing of the fraction noise of the photocurrent. We show that if the active environment is excited by a weak external pump, then the maximally possible depression of the fraction noise reaches only 50%, while under the strong excitement of the environment the depression attains 100%. The optical spectrum of the generation is obtained far from the unstable region.