Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Ярунин, Бозе-эйнштейновская конденсация неидеального газа, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 2, 295–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:38:37

В. С. Ярунин*

БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Каноническое распределение со связью использовано в модели Боголюбова неидеального бозе-газа. Найдены два приближенных решения вариационных уравнений для плотности бозе-конденсата и параметра связи. Они рассматриваются как “нетривиальная” и “тривиальная” составляющие процесса бозе-конденсации, поскольку дают вклады в термодинамические свойства при температурах T ниже и выше критической T_c , соответственно. Для этих решений исследованы ветви спектра и рассмотрена теплоемкость C_V при всех температурах. Отмечена низкотемпературная зависимость $C_V \sim T^{3/2}$ и $C_V \sim T^3$ как следствие вкладов возбуждений свободных бозонов и фононов. Для температур, близких к критической T_c сверху и снизу, C_V вычислена приближенно с использованием численных параметров He^4 в качественном согласии с экспериментом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхтекучесть жидкого He^4 была первым экспериментальным свидетельством конденсации бозонов с нулевым импульсом ($k = 0$). Она обнаруживается в гелии по сверхтекучим эффектам, фонон-ротонному спектру нейтронного рассеяния и λ -точке теплоемкости при температуре фазового перехода $T_c = 2.2 \text{ K}$ [1]. Гидродинамические свойства He^4 были объяснены Ландау [2], микроскопическая теория фононного спектра была предложена Боголюбовым [3]. Экспериментальная зависимость теплоемкости $C_V(T) \sim T^3$ для низких температур ($T \ll T_c$) следует из микроскопической теории [4], а функция $C_V(T)$ в интервале $0.6 \text{ K} < T < 1 \text{ K}$ была объяснена как результат вклада ротонов [5].

В работах, последовавших за [3], методом теории возмущений для функций Грина с добавочными к гамильтониану [3] слагаемыми был дан анализ влияния взаимодействия между бозонами на их конденсацию. Низкотемпературное приближение рассматривалось в [6, 7] методами квантовой теории поля. Для температур, близких к нулевой, использовалось каноническое преобразование Боголюбова [8] и C -числовой сдвиг квантовой амплитуды бозона с $k = 0$ [9, 10]. Метод расщепления уравнений для бозонных функций Грина применялся в [11]. Итогом упомянутых выше исследований была информация о спектрах надконденсатных возбуждений и термодинамических свойствах неидеального газа при низких температурах.

*Объединенный институт ядерных исследований

Наблюдаемые в экспериментах острый и широкий пики интенсивности рассеяния нейтронов как функции их энергии изначально ассоциировались [12] с возбуждениями сверхтекучей и нормальной компонент жидкого He^4 . Позже была предложена [13] более сложная классификация этих спектров, основанная на предположении о различных вкладах бозе-конденсата в возбуждения разной природы. Недавние эксперименты с рассеянием низкоэнергетических нейтронов в He^4 [14] анализировались с точки зрения существования дополнительной двухветвевой структуры возбуждений острого пика.

Таким образом, в теории бозе-конденсации неидеального газа остаются два не вполне выясненных момента в объяснении свойств сверхтекучего He^4 : 1) не вполне понятно соответствие между структурой спектра и надконденсатными возбуждениями; 2) термодинамика – зависимость $C_V(T)$ – вблизи температуры перехода T_c объяснена не до конца.

Целью настоящей работы является прояснение влияния взаимодействия между бозонами на бозе-конденсацию и вклад его в спектр возбуждений и термодинамику. Делается попытка развития модели [3] в связи с пунктами 1 и 2 без привлечения дополнительных к гамильтониану этой модели операторных слагаемых. Предлагаемое приближение основано на итерационной процедуре для вариационных уравнений модели [3], но не затрагивает теорию возмущений с высшими степенями амплитуд $k \neq 0$ бозонов.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Главный вклад в энергию парных корреляций в теории бозе-конденсации газа со слабым взаимодействием между атомами дается гамильтонианом [3]

$$H = g_0 \frac{|a|^4}{2V} + \sum_{k \neq 0} \left[\Omega_k b_k^+ b_k + \frac{g_k}{2V} (b_k^+ b_{-k}^+ a^2 + b_k b_{-k} a^{*2} + \right. \\ \left. + 2b_k^+ b_k |a|^2) + \frac{g_0}{V} b_k^+ b_k |a|^2 \right], \quad (1) \\ \Omega_k = \frac{k^2}{\mu}, \quad \mu = 2m, \quad [b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'},$$

где бозоны конденсата описываются классическими амплитудами a , a^* и надконденсатные бозоны с $k \neq 0$ – операторами b_k , b_k^+ . Калибровочная инвариантность нарушена в H , так что число атомов не сохраняется. Однако отмечалось наличие “квазиклассического” интеграла движения n [15]:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt} \left(|a|^2 + \sum_{k \neq 0} b_k^+ b_k \right) = \{H, |a|^2\} + i \left[H, \sum_{k \neq 0} b_k^+ b_k \right] = 0, \quad (2) \\ \{H, A\} = i \left(\frac{\partial H}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial a^*} - \frac{\partial H}{\partial a^*} \frac{\partial A}{\partial a} \right),$$

который приводит к каноническому распределению со связью. Оно выражается статистической суммой для N атомов в (1):

$$Q = \int d\rho \text{Sp}_{\{b_k^+, b_k\}} (e^{-\beta H} \delta_{N,n}), \quad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

в виде интеграла по плотности бозе-конденсата $\rho = |a|^2/V$ и b_k^+ , b_k и квантового шнура по бозонам с $k \neq 0$. Используя фурье-разложение со спектральным параметром $\nu = iy/\beta$, для символа δ мы получаем Q в виде интеграла по переменным y , ρ и функционального интеграла по траекториям b_k , b_k^* с периодическими граничными условиями на $[0, \beta]$. Следуя [15], можно вычислить Q по переменным b_k , b_k^* и получить статистическую сумму

$$Q = \int d\rho \int_{-\pi}^{\pi} dy \exp \left\{ \left[-\beta \frac{g_0}{2} \rho^2 + iy(\rho - R) \right] V \right\} \prod_{k \neq 0} \frac{\exp(\omega_k - \nu)\beta/2}{4 \operatorname{sh}^2(\beta E_k/4)}, \quad (3)$$

$$R = \frac{N}{V}, \quad E_k = [(\Omega_k + \rho g_0 - \nu)^2 + 2\rho g_k(\Omega_k + \rho g_0 - \nu)]^{1/2},$$

где спектр энергии E_k зависит от плотности конденсата ρ и параметра связи ν . В пределе $N, V \rightarrow \infty$ интеграл (3) дает эффективное действие конденсата S_{eff} для статистической суммы Q

$$S_{\text{eff}} = -\beta V (g_0 \rho^2/2 - \nu \rho + \nu R) + cV \int k^2 dk [\omega_k - \nu]\beta/2 - 2 \ln \operatorname{sh}(\beta E_k/4), \quad (4)$$

$$Q = \int d\rho d\nu \exp S_{\text{eff}}, \quad c^{-1} = 2\pi^2 h^3.$$

Вариационные уравнения для ρ и ν , порожденные действием (4), имеют вид

$$\frac{1}{\beta V} \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial \rho} = \nu - \rho g_0 - \frac{c}{2} \int k^2 (g_0 + g_k) \Phi dk + \rho G = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\beta V} \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial \nu} = \rho - R + r = 0, \quad r = \frac{c}{2} \int k^2 \Phi dk, \quad (6)$$

где

$$G = \frac{c}{2} \int k^2 \operatorname{cth} \left(\frac{\beta E_k}{4} \right) \frac{g_k^2}{E_k} dk > 0, \quad \Phi = \frac{\omega_k - \nu}{E_k} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta E_k}{4} \right) - 1,$$

$$\frac{\omega_k - \nu}{E_k} = \sqrt{1 + \left(\frac{g_k \rho}{E_k} \right)^2},$$

где введена плотность надконденсатных бозонов r [16]. Экстремальные значения параметров ρ , ν будут найдены в разделе 4 из уравнений (5), (6).

3. СПЕКТР

Общий анализ спектра E_k основан на предположении об отсутствии у него щели $E_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$. Этому предположению удовлетворяют два значения параметра связи ν , равные ρg_0 и $3\rho g_0$. Таким образом, появляются две ветви надконденсатных возбуждений [17]

$$E_k^2 = \begin{cases} E_{k1}^2 = \Omega_k^2 + 2\Omega_k \rho g_k, & \nu_1 = \rho g_0, \\ E_{k2}^2 = \Omega_k^2 + 2\Omega_k \rho g_k - 4\rho g_0(\Omega_k + \rho g_k - \rho g_0), & \nu_2 = 3\rho g_0. \end{cases} \quad (7)$$

Модель взаимодействия между надконденсатными бозонами в (1) выбирается в виде

$$g_k = \begin{cases} g_0 (1 - k^2/k_0^2) \geq 0, & 0 \leq k \leq k_0, \\ g_0 [(k - 2k_0)^2/k_0^2 - 1] \leq 0, & k_0 \leq k \leq 2k_0. \end{cases} \quad (8)$$

В первой зоне $k < k_0$ спектр (7) представляется следующим образом:

$$E_{k1} = \left(k^2 \frac{2\rho g_0}{\mu} - k^4 \frac{d}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad E_{k2} = \left(k^2 \frac{2\rho g_0 d}{\mu} - k^4 \frac{d}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d = \frac{2k_c^2}{k_0^2} - 1 \geq 0, \quad (9)$$

и во второй ($k_0 < k < 2k_0$, $-1 \leq d < 0$) для малых ρ –

$$E_{k1,k2} \simeq \frac{1}{\mu^2} \left[k^4 \left(1 + 2 \frac{k_c^2}{k_0^2} \right) + 2k^2 k_c^2 \left(p_{1,2} - 4 \frac{k}{k_0} \right) \right], \quad p_{1,2} = 3, 1,$$

где введен корреляционный импульс $k_c = (\rho g_0 \mu)^{1/2}$. В работе [17] показано, что ветвь E_{k1} спектра описывает боголюбовские максон-ротонные возбуждения, для которых энергия E_{k01} в точке равновесия $k = k_0$ совпадает с энергией свободных бозонов при том же значении импульса Ω_{k_0} . Ветвь спектра E_{k2} дает дисперсионную кривую без ротонного минимума, и значения энергий E_{k02} и Ω_{k_0} не совпадают. Соответствующая картина изображена на рис. 1. Большими точками обозначена дисперсионная кривая Ω_k , сплошной линией – боголюбовские возбуждения E_{k1} , штрих-пунктирной линией обозначена ветвь E_{k2} ($\mu = 1$, номера 1 и 2 соответствуют значениям $d_1 = 0.4$, $d_2 = 1.9$, соответственно). Штрих-пунктирная линия 3 обозначает ветвь E_{k2} при $d_3 = -0.3$.

Рис. 1

Если плотность конденсата ρ уменьшается, у ветви E_1 исчезает ротонный минимум и она превращается в дисперсионную кривую свободных бозонов Ω_k . Ветвь E_2 обнаруживает порог возбуждений при значении импульса, равного корреляционному k_c . Спектр возбуждений (7) при малых плотностях бозе-конденсата ($k_c \ll k_0$, $d < 0$) и малых импульсах ($k < k_0$) имеет вид

$$E_{k1,k2} \simeq \frac{1}{\mu} (k^4 \pm 2k_c^2 k^2)^{1/2} \rightarrow \Omega_k, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (10)$$

Первая из формул (10) совпадает с полюсами [9, 10] нормальной и аномальной функций Грина для решения, описывающего сверхтекучесть, в пределе малых ρ . Для малых корреляционных импульсов ($k_0 > k \gg k_c$) формула (10) дает

$$E_{k1,k2} \simeq \frac{1}{\mu}(k^2 \pm k_c^2)$$

и показывает, что ветви E_{k1} и E_{k2} приближаются к кривой дисперсии свободных бозонов Ω_k с разных сторон. Для малых значений импульса k ($k_0 \gg k_c > k$) первая ветвь

$$E_{k1} \simeq \frac{k}{\mu}\sqrt{2}k_c + \frac{k^3}{2\mu\sqrt{2}k_c} \quad (11)$$

дает фононное приближение Боголюбова, а вторая E_{k2} имеет порог возбуждений при импульсе $k = k_c$. Дополнительная фонон-ротонная ветвь с порогом возбуждений в модели Леннарда-Джонса для сверхтекучей жидкости была теоретически найдена в работе [18]. Очевидно, что боголюбовские фононные возбуждения, аналогичные (11), могут быть найдены также при больших плотностях конденсата из формулы (9).

4. “НЕТРИВИАЛЬНОЕ” И “ТРИВИАЛЬНОЕ” РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОНДЕНСАТА

Вариационные уравнения (5), (6) для ρ и ν могут быть записаны в виде

$$R = \rho + r, \quad \frac{\nu}{g_0} - 2r = \rho \left[1 - \frac{G(\rho, \nu)}{g_0} \right]. \quad (12)$$

Первое из уравнений (12) следует из условия сохранения (2) суммы квантовых и классических частиц. Второе аналогично уравнению для ρ , представленному в работах [9, 10] в приближении малой плотности ρ . Уравнения (12) ниже будут исследованы для величин $\nu_{1,2}$ (использованных в предыдущем разделе) с целью нахождения значений ρ и β , совместимых с ними и с условием $\Phi \geq 0$ неотрицательности r в (5), (6). Принимая во внимание равенства

$$\Phi \geq 0, \quad \omega_k - \nu = \begin{cases} \rho g_0 - d\Omega_k, & \nu_1 = \rho g_0, \\ -\rho g_0 - d\Omega_k, & \nu_2 = 3\rho g_0, \end{cases}$$

и температурный интервал $k_B T < \max\{E_k\} \simeq 15 \text{ K}$ [14] наблюдений сверхтекучего He^4 , получаем условие низких температур $\beta E_k > 4$, выполняющееся в интересующей нас области переменных. Оно обеспечивает выполнение условия $\Phi \geq 0$ в форме неравенств

$$\begin{aligned} 4k_B T < \rho g_0 - \Omega_k d, & \quad \Omega_k < \rho g_0/d, & \quad d > 0, & \quad k < k_0, \\ 4k_B T < -\rho g_0 - \Omega_k d, & \quad \Omega_k > \rho g_0/|d|, & \quad d < 0, & \quad k > k_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Первая строка в (13) выполняется для больших значений ρ и конечных температур $T < T_c \equiv Rg_0/4k_B \simeq 3 \text{ K}$, в то время как вторая справедлива для малых значений ρ при любых температурах $k_B T < \Omega_k |d|$, $k > k_0$. Из-за наличия этих двух наборов

параметров уравнения (12) для плотности бозе-конденсата могут быть представлены в виде

$$R = \rho_1 + r_1, \quad 2g_0 r_1 = \rho_1 G(\rho_1) \quad (\nu = \nu_1), \quad T < T_c = \frac{Rg_0}{4k_B}, \quad (14)$$

$$R = \rho_2 + r_2, \quad 2g_0 r_2 = \rho_2 [2g_0 + G(\rho_2)] \quad (\nu = \nu_2). \quad (15)$$

По аналогии с идеальным бозе-газом эти формулы могут рассматриваться как уравнения для “нетривиального” (14) и “тривиального” (15) состояний бозе-газа со взаимодействием.

Заметим теперь, следуя [17], что нелинейные уравнения (14), (15) могут быть приведены к линейному виду подстановкой в функционал $G(\rho_{1,2})$ плотности бозе-конденсата идеального газа $\rho_{1,2}^0$:

$$G(\rho_{1,2}) \rightarrow G_0(\rho_{1,2}^0), \quad \rho_1^0 = R \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right], \quad \rho_2^0 \equiv 0. \quad (16)$$

Используя $\rho_{1,2}^0$ как нулевое приближение для плотности конденсата, находим приближенные решения уравнений (14), (15) в виде первой итерации:

$$\rho_1 = \frac{R}{1+x}, \quad r_1 = \frac{Rx}{1+x}, \quad x = \frac{G_0}{2g_0} = \frac{r_1}{\rho_1}, \quad T < T_c, \quad (17)$$

$$\rho_2 = \frac{r_2}{1+x} < r_2 = \frac{R(1+x)}{2+x}, \quad \frac{r_2}{\rho_2} = x+1. \quad (18)$$

Статистическая сумма Q теперь представляется как сумма вкладов Q_1 и Q_2 решений (17) и (18):

$$Q = Q_1|_{T < T_c} + Q_2, \quad Q_{1,2} = \frac{f_{1,2}}{\sqrt{\beta g_0}}, \quad f_{1,2} = e^{S_{\text{эф}}|_{1,2}}. \quad (19)$$

С целью выяснить температурную зависимость x вычислим интеграл G_0 в рамках принятого выше приближения. В пределах $[q, k_0]$ интеграла по k значения x равны 0.3; 0.5 и 5 для температур 0.1, 0.5 и 2 К при значениях q , равных $10^{-4}k_0$, $10^{-3}k_0$ и $10^{-2}k_0$, соответственно, где $k_0 = 1(\text{\AA})^{-1}$. Что касается тривиального решения (12), значения $x \ll 1$ и $x > 1$ соответствуют температурам $T \leq T_c$ и $T \gg T_c$, последний диапазон которых нас не интересует. Таким образом, когда выполнено неравенство $x > 1$, уравнение (18) описывает состояние бозе-газа с пренебрежимо малой плотностью конденсата $\rho_2 \simeq 0$, $r_2 \simeq R$. При низких температурах ($x \ll 1$) решение (17) описывает состояние бозе-газа с большой плотностью конденсата $\rho_1 \gg r_1$, в то время как решение (18) описывает состояние бозе-газа с плотностью $\rho_2 < R/2 < r_2$.

Заметим, что параметр x в (17) не равен нулю при температуре $T = 0$ и, следовательно, плотность конденсата нетривиального решения ρ_1 не равна полной плотности бозонов R . Точно так же плотность конденсата ρ_2 “тривиального” решения (18) не исчезает сразу же при $T > T_c$.

Свободная энергия Гельмгольца $F_{1,2}$ для решений (17) и (18) выражается формулами

$$F_{1,2} = -\frac{1}{V\beta} S_{\text{eff}}|_{1,2} = (F^0 - \phi)_{1,2}, \quad F^0 = g_0 \frac{\rho^2}{2} - \nu\rho + \nu R, \\ \phi = \frac{c}{2} \int k^2 \left[E_k \left(\frac{\omega_k - \nu}{E_k} - 1 \right) + \frac{4}{\beta} e^{-\beta E_k/2} \right] dk, \quad (20)$$

где пределы интегрирования по k будут определены в следующем разделе. Подстановка формул (17) и (18) в приближении “среднего поля”

$$\phi \simeq \frac{c}{2} \int k^2 E_k \Phi dk \simeq \rho g_0 r / 2$$

в $F_{1,2}$ приводит к формулам

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho_1 g_0 R = \frac{g_0}{2} R^2 \frac{1}{x+1}, \quad F_2 = 2.5 \rho_2 g_0 R - 2 \rho_2^2 g_0 = \frac{g_0}{2} R^2 \frac{5x+4}{(2+x)^2}. \quad (21)$$

Очевидно, что в области сосуществования ($T < T_c$) решений (17) и (18) “нетривиальное” решение более устойчиво вследствие неравенства $F_1 < F_2$.

Таким образом, первое слагаемое Q_1 в (19) существует при температуре $T < T_c$ и представляет собой вклад боголюбовских возбуждений конденсата, связанных с “нетривиальным” решением для его плотности. Второе слагаемое Q_2 существует при всех температурах и представляет собой вклад второй ветви E_{k2} , связанной с “тривиальным” решением.

5. ФЛУКТУАЦИИ И ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Обратимся к термодинамическим свойствам статистической суммы (19). С ее помощью вычислим термодинамическую энергию

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = -\frac{\dot{S}_1 f_1 + \dot{S}_2 f_2}{f_1 + f_2}, \quad S_{1,2} = -\beta V F_{1,2}, \quad f_{1,2} = e^{S_{\text{eff}}|_{1,2}}, \quad (\dot{}) = \frac{\partial}{\partial \beta}(),$$

и ее дисперсию

$$D(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 \beta} \ln Q = \frac{\ddot{S}_1 f_1 + \ddot{S}_2 f_2}{f_1 + f_2} + \frac{f_1 f_2}{(f_1 + f_2)^2} (\dot{S}_1 - \dot{S}_2)^2.$$

Слагаемое, обусловленное при температурах $T < T_c$ решением (18), сравнительно мало в пределе $V, N \rightarrow \infty$, $\exp(S_2 - S_1) \rightarrow 0$ в результате неравенства $F_1 < F_2$. Формулы для энергии и ее дисперсии принимают вид

$$\langle E \rangle \simeq V (F_1 + \beta \dot{F}_1), \quad D(E) \simeq -V (2\dot{F}_1 + \beta \ddot{F}_1),$$

так что относительная флуктуация пропорциональна $(\sqrt{V})^{-1}$, а вклад решения (18) экспоненциально мал ниже T_c .¹⁾

Теперь вычислим теплоемкость C_V , следуя определению

$$D(E) = T^2 C_V, \quad C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = -VT \frac{\partial^2 F}{\partial T^2},$$

где формула (20) дает $F = F_1$ для $T < T_c$ и $F = F_2$ для $T > T_c$.

Далее будут рассмотрены случаи $T \ll T_c$, $T \rightarrow T_c$ и $T > T_c$ с использованием безразмерного параметра $y = \beta E_k > 4$ для интегралов по переменной k .

Полезно заметить, что слагаемое F_1^0 в F_1 слабо зависит от температуры при $T \ll T_c$ и не имеет особенностей при $T < T_c$. Следовательно, для “нетривиального” решения можно воспользоваться приближением

$$F_1 \simeq -\phi_1, \quad \frac{\partial F_0}{\partial T} \simeq 0, \quad C_V \simeq VT \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T^2}.$$

А. Для случая низких температур $T \ll T_c$ температурная зависимость теплоемкости может быть найдена для различных видов спектра возбуждений при импульсах $k < k_0$. Вклад возбуждений с дисперсией k^2 имеет вид

$$E_{k1} \simeq \frac{k^2}{\mu}, \quad \phi_1 \simeq \beta^{-5/2} J_1, \quad J_1 = \kappa J_1^0, \quad \kappa = \mu^{3/2} \frac{c}{2}, \quad J_1^0 = \Phi_0 \int_4^{\beta_c E_{k01}} y^{3/2} dy, \\ \Phi_0 = \sqrt{1 + \frac{(g_0 R)^2}{E_{k1}^2(k_c|_R)}} - 1, \quad C_V \simeq k_B V (k_B T)^{3/2} J_1. \quad (22)$$

Вычисление вклада фононных возбуждений дает

$$E_{k1} \simeq \frac{k k_c}{\mu}, \quad \phi_1 \simeq \beta^{-4} \epsilon_c^{-3/2} J_2, \quad J_2 = \kappa J_2^0, \\ J_2^0 = \Phi_0 \int_4^{\beta_c E_{k01}} y^3 dy, \quad \epsilon_c = \frac{k_c^2}{\mu} \simeq g_0 R, \\ C_V \simeq \frac{k_B V (k_B T)^3}{\epsilon_c^{3/2}} J_2. \quad (23)$$

Б. Для температур T , близких к T_c ($T < T_c$), используем приведенный выше потенциал ϕ_1 , однако в этом случае температурная зависимость $\epsilon_c = g_0 \rho_1^0 = g_0 R [1 - (T/T_c)^{3/2}]$, $T \simeq T_c$, должна быть принята во внимание следующим образом:

$$\left(\frac{\omega_k - \nu}{E_k} \right)_1 \simeq 1, \quad \phi_1 \simeq \beta^{-4} \epsilon_c^{-3/2} J_3, \quad J_3 = 2\kappa J_3^0, \quad J_3^0 = \int_{y_0}^{\infty} y^2 e^{-y/2} dy, \\ C_V(t) = VT J_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} \frac{(k_B T)^4}{\epsilon_c^{3/2}} \simeq 3k_B V (k_B T_c)^{3/2} J_2 \zeta(t), \quad t = \frac{T}{T_c}, \quad (24) \\ \zeta(t) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{4t^3}{(1 - t^{3/2})^{3/2}} + \frac{24t^4}{(1 - t^{3/2})^{5/2}} + \frac{45t^6}{(1 - t^{3/2})^{7/2}}.$$

¹⁾Проф. В. А. Рубаков обратил внимание автора на важность этого обстоятельства.

Рис. 2

Здесь введен эмпирический параметр $y_0 > 4$, разделяющий области температуры ниже и выше критической в шкале энергий E_k , значение его будет найдено ниже. Результат вычисления функции $\zeta(t)$ показан на рис.2 (сплошная линия), так же как и кривые P_1 (пунктирная линия), P_2 (линия из коротких штрихов), P_3 (линия из более длинных штрихов). Особенность C_V при условии $\epsilon_c \rightarrow 0$, $\rho_1^0 \rightarrow 0$ дает главный вклад в температурную зависимость при $T \rightarrow T_c$, именно поэтому вкладом в (24) слагаемого F_1^0 можно пренебречь.

В. Для температуры больше критической ($T > T_c$) теплоемкость определяется в приближении среднего поля (21) функцией F_2 “тривиального” решения. Разложение $F_2(x)$ в степенной ряд при $x \ll 1$ дает формулу

$$F_2(x) \simeq \frac{g_0 R_2}{8} (4 + a_1 \beta^{-1/2} - a_2 \beta^{-1} + a_3 \beta^{-3/2} + a_4 \beta^{-2}),$$

$$a_1 = \gamma, \quad a_2 = 2\gamma^2, \quad a_3 = 2\gamma^3, \quad a_4 = -0.5\gamma^4,$$

$$\gamma = g_0 J_4 \sqrt{k_B}, \quad J_4 = \kappa J_4^0, \quad J_4^0 = \int_4^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{y}}, \quad (25)$$

$$C_V(\tau) = -VT \frac{\partial^2 F_2}{\partial T^2} \simeq V g_0 (\gamma R)^2 \xi(\tau) = 8k_B V (k_B T_c)^3 R^{-1} J_3^2 \xi(\tau), \quad \tau = \frac{T}{T^*},$$

$$\xi(\tau) = \frac{1}{4} \tau^{-1/2} - \frac{3}{4} \tau^{1/2} + \tau, \quad k_B T^* = (g_0 R J_3)^{-2}, \quad T > T_c.$$

Результат вычислений функции $\xi(\tau)$ показан на рис.3. Различные комбинации начальных параметров в формулах (24), (25) происходят из “нетривиального” (17) и “тривиального” (18) решений, определяющих теплоемкость C_V ниже (24) и выше (25) критической температуры T_c , соответственно. Для нахождения величин y_0 , T^* и относительного масштаба значений $C_V(t)$ и $C_V(\tau)$ необходимо сделать численные оценки этих

Рис. 3

комбинаций параметров. Интегралы $J_{3,4}^0$ могут быть оценены в приближении $y > 4$ в точке y_0 , которая является их верхним (для J_4^0) и нижним (для J_3^0):

$$J_4^0 \sim 2\sqrt{y_0}, \quad J_3^0 \sim 2y_0^2 e^{-y_0/2},$$

пределами. Для плотности He^4 $R = 6 \cdot 10^{23} (40\text{см}^3)^{-1}$, атомной массы $\mu \sim 8$ а. е. параметр y_0 выбран равным $y_0 = 20$, что дает оценку $T^* \simeq 4T_c$ и отношение

$$\frac{C_V(\tau)}{C_V(t)} = \frac{8(k_B T_c)^{3/2} \kappa (J_4^0)^2 \xi(\tau)}{3J_3^0 R \zeta(t)} \simeq 1.200 \frac{\xi(\tau)}{\zeta(t)}.$$

Таким образом, рис. 2 и 3 качественно показывают экспериментальное [1] поведение теплоемкости C_V во всем интервале температур $0 < T < T_c$, $T > T_c$. Абсолютные значения $C_V(t)$ и $C_V(\tau)$ могут быть найдены с помощью *ab initio* вычисления интегралов $J_{3,4}^0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены “нетривиальное” (ρ_1) и “тривиальное” (ρ_2) решения (17) и (18) вариационных уравнений (12) для плотности бозе-конденсата ρ . Первое из них существует только при температуре, меньшей критической ($T < T_c$), в то время как второе, будучи справедливым при всех температурах, дает вклад в равновесные свойства лишь при $T > T_c$. Эти решения можно рассматривать как обобщение подобных им для идеального бозе-газа. Подробности их свойств определяются параметром $x = G/2g_0$, представляющим собой отношение взаимодействия G между надконденсатными бозонами к взаимодействию между бозонами конденсата g_0 с импульсом $k = 0$. Вариационные

уравнения линеаризуются благодаря замене $G \rightarrow G_0$, использующей характеристику идеального бозе-газа $\rho_{1,2}^0$. Для решений (17) и (18) найдены ветви возбуждений E_{k1} и E_{k2} . Первая из них – кривая обычной фонон-ротонной дисперсии. Она описывает возбуждения бозонов в состоянии равновесия в поле сил взаимодействия. Вторая ветвь описывает возбуждения атомов в состоянии вне этого равновесия. Критическое соотношение $\rho g_0 = k_0^2 \mu^{-1}$ между кинетической энергией атома с импульсом k_0 и плотностью конденсата ρ в шкале потенциала взаимодействия g_0 приводит к вырождению спектра $E_{k1} = E_{k2}$. Вклад второй ветви E_{k2} в термодинамические свойства системы при $T < T_c$ исчезает экспоненциально при больших объемах $V \rightarrow \infty$. Это означает, что описание узкой (n) и широкой (w) ветвей спектра нейтронного рассеяния в сверхтекучем He^4 [14] в терминах возбуждений E_{k1}, E_{k2} следует искать для конечных объемов, определяемых взаимодействием между нейтронами и бозонами модели (1). Таким образом, наличие двух решений вариационных уравнений системы (1) в нестационарной картине нейтрон-бозонного рассеяния может частично прояснять п. 1 введения. Поскольку эти решения следуют из интеграла движения (2) гамильтониана (1), возникает вопрос о влиянии на них теории возмущений с членами более высокого порядка по степеням b_k^+, b_k :

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{V^{1/2}} g_0 (b_0 a a^{*2} + a^* a^2 b_0^+) + \\ & + \frac{1}{2V^{3/2}} \sum_{k_1+k_2=k_3} (g_{k_1} + g_{k_2}) (a b_{k_1}^+ b_{k_2}^+ b_{k_3} + a^* b_{k_3}^+ b_{k_2} b_{k_1}) + \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{k_1+k_2=k_3+k_4} (g_{k_1-k_3} + g_{k_1-k_4}) b_{k_1}^+ b_{k_2}^+ b_{k_3} b_{k_4}. \end{aligned}$$

Гамильтониан $(H + h)$, описывающий взаимодействие между бозонами конденсата и надконденсатными бозонами, был получен из оператора энергии

$$\frac{1}{2V} \sum_{k_1+k_2=k_3+k_4} b_{k_1}^+ b_{k_2}^+ b_{k_3} b_{k_4}$$

с помощью сдвига $b_k^+ \rightarrow b_k^+ + \delta_{k,0} a^* V^{1/2}$, $b_k \rightarrow b_k + \delta_{k,0} a V^{1/2}$ [9]. Можно при этом заметить, что слагаемое h не нарушает квазиклассический закон сохранения (2) вследствие равенства

$$\{H + h, |a|^2\} + i \left[H + h, \sum_k b_k^+ b_k \right] = 0.$$

Следовательно, классификация решений, полученная в разделах 3 и 4, может быть также использована и в общем случае $(H + h)$.

Что касается пункта 2 введения, теплоемкость C_V рассмотрена для свободной энергии системы (1), полученной с помощью решения (17) при температурах $T < T_c$ и (18) при температурах $T > T_c$. Вклады $C_V \simeq T^{3/2}$ возбуждений свободных бозонов и $C_V \simeq T^3$ фононов обнаружены для температуры $T \ll T_c$ в низкотемпературном приближении $E_k > 4k_B T$. Для температур, близких к критическим, введен эмпирический

параметр y_0 для оценки интегралов $J_{3,4}$. Вблизи температуры перехода $T \rightarrow T_c$ найдена особенность теплоемкости $C_V \simeq [1 - (T/T_c)^{3/2}]^p$, $p = -7/2$. Для температур $T > T_c$ обнаружена зависимость теплоемкости C_V , близкая к экспериментальной.

Автор благодарит профессоров Ж. А. Козлова, П. П. Кулиша, В. Б. Приезжева, Г. В. Шляпникова, А. Н. Васильева за полезные обсуждения, профессора Ю. Л. Климонтовича, привлечшего внимание автора к проблеме теплоемкости He^4 , и профессора Л. Д. Фаддеева, указавшего автору на важность учета $\hbar$ -члена в гамильтониане.

Автор благодарен Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку проекта № 96-01-00223.

Список литературы

- [1] *D. R. Tilley, J. Tilley.* Superfluidity and superconductivity. Van Nostrand Company, 1974.
- [2] *L. D. Landau.* J. Phys. (USSR). 1941. V. 5. P. 71.
- [3] *Н. Н. Боголюбов.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. С. 77.
- [4] *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Статистическая физика. М.: Наука, 1978.
- [5] *И. М. Халатников.* Теория сверхтекучести. М., 1971.
- [6] *С. Т. Беляев.* ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 417.
- [7] *N. M. Hugenholtz, D. Pines.* Phys. Rev. 1962. V. 116. P. 489.
- [8] *В. В. Толмачев.* Теория бозе-газа. М., 1969.
- [9] *В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев.* ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1315.
- [10] *В. Н. Попов.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
- [11] *D. ter Haar.* Lectures on selected topics in statistical mechanics. Pergamon Press, 1977.
- [12] *A. D. Woods, E. C. Svensson.* Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 974.
- [13] *H. R. Glyde, A. Griffin.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1454.
- [14] *N. M. Blagoveshchenskii, I. V. Bogoyavlenskii, L. V. Karnatsevich, Zh. A. Kozlov, V. G. Kolobrodov, V. B. Priezzhev, A. V. Puchov, A. N. Skomorokhov, V. S. Yarunin.* Phys. Rev. B. 1994. V. 50. P. 16550.
- [15] *В. С. Ярунин.* ТМФ. 1993. Т. 96. № 1. С. 37.
- [16] *V. N. Popov, V. S. Yarunin.* Collective Effects in Quantum Statistics of Radiation and Matter. Dordrecht: Kluwer, 1988.
- [17] *V. S. Yarunin, L. A. Siurakshina.* Physica A. 1955. V. 215. P. 261.
- [18] *V. I. Yukalov.* Mod. Phys. Lett. B. 1991. V. 5. P. 725.

Поступила в редакцию 4.IV.1996 г.

V. S. Yarunin

BOSE-EINSTEIN CONDENSATION OF NONIDEAL GAS

The canonical distribution with a constraint is applied to the Bogoliubov model of a nonideal Bose-gas. Two approximate solutions of variational equations for the Bose-condensate density and a constraint parameter are found. They are treated as “nontrivial” and “trivial” parts of the process of Bose-condensation as far as they contribute to the thermodynamic properties at a temperature T below and above the critical T_c respectively. The corresponding branches of the spectrum are investigated. The heat capacity C_V is considered with the help of the derived solutions for all the temperatures. Low-temperature behaviour $C_V \sim T^{3/2}$ and $C_V \sim T^3$ due to the contributions of free Boson and phonon excitations is proved. The asymptotics of C_V for a temperature close to the critical temperature T_c below and above it are calculated for numerical values of parameters of He^4 in a qualitative agreement with the experiment.