Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Жук, Х. Клейнерт, Эффект Казимира при ненулевой температуре в закрытой Вселенной Фридмана, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 2, 307–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:30:22

А. Жук*, Х. Клейнерт

ЭФФЕКТ КАЗИМИРА ПРИ НЕНУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ В ЗАКРЫТОЙ ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА

Исследуется эффект Казимира при ненулевой температуре для массивного и безмассового скалярных полей с произвольной связью с гравитационным полем в медленно эволюционирующей Вселенной Фридмана. Найдены перенормированные выражения для свободной энергии, плотности энергии и давления, и обсуждаются их физические свойства. Показано, например, что для случая радиации с произвольной связью уравнение состояния имеет вид $P = \rho/3$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время хорошо известно, что глобальная топология пространства-времени может оказывать влияние на локальные свойства Вселенной, такие как плотность энергии и давление всех флуктуирующих полей. Рассмотрим, например, три топологически различные Вселенные Фридмана: открытую плоскую, открытую гиперболическую и закрытую. В отличие от открытых плоской и гиперболической Вселенных замкнутая Вселенная имеет конечный размер, поэтому спектр колебаний флуктуирующих в ней полей является дискретным. В результате статистические суммы содержат дополнительные члены – разность между спектральной суммой и интегралом. Аналогичный эффект в плоском пространстве-времени для электромагнитных волн между двумя проводящими пластинами приводит к притяжению этих пластин, известному как эффект Казимира [1] и интенсивно обсуждаемому в литературе (см., например, обзоры [2–3]).

Другим важным квантовым эффектом в закрытой Вселенной Фридмана является рождение частиц [4–6]. Это динамический эффект и он сильно зависит от скорости эволюции Вселенной. Мы игнорируем это явление, предполагая достаточно медленную эволюцию Вселенной, чтобы выделить чисто казимировский эффект [7, 8].

Цель данной работы заключается в исследовании эффекта Казимира для массивного и безмассового скалярных полей в закрытой Вселенной Фридмана, имеющей конечный объем. Разница между энергией поля в бесконечной и конечной Вселенных будет называться энергией Казимира этого поля.

До сих пор эффект Казимира исследовался в основном при нулевой температуре [3–6, 9, 10] (вакуумный случай). В данной работе мы будем исследовать его при произволь-

*Одесский университет, физический факультет, Петра Великого 2, 270100 Одесса, Украина

ной температуре. В нашей статье [11] мы уже рассматривали эффект Казимира при ненулевой температуре во Вселенной с топологией 3-тора. В этом случае пространство является плоским. Пространственная топология закрытой Вселенной Фридмана – это 3-сфера. В результате спектры флуктуирующих полей будут отличаться для этих двух случаев. Гравитация также оказывает влияние на спектры через связь с материальными полями. Здесь мы будем рассматривать массивное и безмассовое скалярные поля с произвольной связью с гравитационным полем. Если массу положить равной нулю, то результат будет описывать радиацию. Свободная энергия скалярного поля получается с помощью функционального интегрирования по фурье-компонентам свободного поля [12, 13]. В статическом случае такое интегрирование не представляет сложности, так как частота колебаний не зависит от времени. Необходимо отметить, что эффект Казимира при ненулевой температуре для скалярных полей во Вселенной Фридмана исследовался также в работе [14] и основное отличие нашей работы от этой статьи состоит в учете произвольной связи скалярного поля с гравитацией.

Регуляризация бесконечных сумм может быть выполнена с помощью различных стандартных методов, существующих в литературе [15–19]. В нашем случае наиболее удобной является формула суммирования Абеля–Плана [3–5]. Выражения для плотности энергии и давления получаются из свободной энергии с помощью стандартных термодинамических соотношений.

Из физических соображений ясно, что для систем с энтропией $S \gg 1$, как для современной Вселенной, поправки из-за конечности объема Вселенной являются пренебрежимо малыми, и эффект Казимира не будет наблюдаться. Эффект Казимира “тонет” в горячей Вселенной, что следует явно из формул, полученных с помощью перехода к высокотемпературному пределу. Эффект Казимира может играть важную роль в моделях, где энтропия не является слишком большой, например в некоторых инфляционных моделях на ранних стадиях эволюции Вселенной. Эффекты конечности Вселенной должны быть значительными также в многомерных моделях Калуцы–Клейна [20].

2. СВОБОДНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА

Действие для действительного скалярного поля на фоне произвольного гравитационного поля имеет вид [5, 6]

$$S = \int d^{D+1}x |g|^{1/2} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (2.1)$$

где $D+1$ -мерная пространственно-временная метрика $g_{\mu\nu}$ имеет сигнатуру $-++\dots+$. Для массивного скалярного поля наиболее общий вид гармонического потенциала $V(\varphi)$ следующий:

$$V(\varphi) = \frac{\xi R \varphi^2}{2} + \frac{m^2 \varphi^2}{2}, \quad (2.2)$$

где R – скалярная кривизна пространства-времени, m – масса скалярного поля φ и ξ – константа связи. Мы будем рассматривать здесь случай произвольного ξ . При $\xi = (D-1)/4D$ действие для безмассового скалярного поля становится конформно-инвариантным.

В качестве фоновой метрики мы выбираем метрику Робертсона–Уокера–Фридмана и предполагаем, что она меняется со временем настолько медленно, что Вселенную в наших вычислениях можно рассматривать как статическую. Таким образом, метрика имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2 dl^2, \quad (2.3)$$

где a – масштабный фактор и dl^2 – это метрика D -мерного пространства постоянной кривизны. Здесь мы будем рассматривать пространство размерности $D = 3$ с метрикой

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.4)$$

где $f(r)$ может быть $\sin r$, r , $\text{sh } r$ для различных пространств постоянной кривизны с $\chi = +1, 0, -1$, соответственно. Эффект Казимира имеет место только для $\chi = +1$. (Существуют также специальные типы риччи-плоских пространств ($\chi = 0$) и пространств постоянной отрицательной кривизны ($\chi = -1$), которые имеют конечный объем. Ясно, что эффект Казимира имеет место и для этих пространств.) Не составляет труда обобщить результаты на случай произвольного D .

Свободную энергию системы при температуре $k_B T \equiv 1/\beta$ можно представить следующим образом:

$$F = -k_B T \ln Z, \quad (2.5)$$

где статистическая сумма Z определяется выражением

$$Z = \int \mathcal{D} \varphi e^{-S^e} \quad (2.6)$$

и S^e – это евклидово действие, полученное из лоренцева (2.1) с помощью виковского поворота $t \rightarrow -i\tau$. Функциональное интегрирование выполняется по всем полям φ , периодическим по мнимому времени τ с периодом $\hbar\beta$. Для статической метрики (2.3) с пространственной частью (2.4) действие имеет вид

$$S^e = \frac{1}{2} \int d\tau d^3 x \gamma^{1/2} a^3 \left[(\partial_\tau \varphi)^2 + \frac{1}{a^2} \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi) (\partial_\beta \varphi) + M^2 \varphi^2 \right], \quad (2.7)$$

где эффективная масса определена следующим образом:

$$M^2 = \frac{6\chi\xi}{a^2} + m^2. \quad (2.8)$$

Чтобы вычислить интеграл по путям (2.6), мы должны разложить скалярное поле φ по собственным функциям оператора Лапласа–Бельтрами $\Delta_2^{(3)}$. Рассматривая случай положительной постоянной кривизны $\chi = +1$, мы выбираем собственные функции в виде

$$\Phi_J(\mathbf{x}) \equiv Q_{lm}^n(\mathbf{x}) = P_l^n(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.9)$$

где $Y_{lm}(\theta, \phi)$ являются скалярными сферическими гармониками и $\Pi_l^n(r)$ – это гармоники “Фока” [21]. Тогда разложение имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a^{3/2}} \sum_J [\varphi_J(\tau) \Phi_J(\mathbf{x}) + \text{с. с.}]. \quad (2.10)$$

Коэффициентные функции удовлетворяют периодическим граничным условиям

$$\varphi_J(\tau = 0) = \varphi_J(\tau = \hbar\beta) = 0. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в (2.7) и используя условие ортонормальности сферических гармоник [5, 6, 21, 22], мы получим для евклидова действия выражение

$$S^e = \sum_J \frac{1}{2} \int d\tau [|\dot{\varphi}_J|^2 + \omega_n^2 |\varphi_J|^2], \quad (2.12)$$

где точка означает дифференцирование по времени τ и $\omega_n^2 = M^2 + (n^2 - 1)/a^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, являются собственными частотами. Разложение на гармоники сводит функциональный интеграл для статистической суммы (2.6) к произведению простых интегралов по путям для гармонических осцилляторов. Тогда легко вычислить выражение для свободной энергии [12, 13]:

$$F = k_B T \sum_n n^2 \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_n}{k_B T}} \right) + \sum_n n^2 \frac{\hbar\omega_n}{2} \quad (2.13)$$

с частотами

$$\omega_n^2 = \frac{6\chi\xi}{a^2} + m^2 + \frac{n^2 - \chi}{a^2} = m^2 + \frac{n^2 + (6\xi - 1)\chi}{a^2}. \quad (2.14)$$

Множитель n^2 в суммах возникает из-за вырожденности собственных значений в изотропном пространстве. Второй член в (2.13) – это расходящаяся энергия вакуума. Регуляризация осуществляется различными стандартными методами. Пример такой регуляризации будет приведен в следующем разделе. В случае открытой Вселенной с $\chi = 0, -1$ суммы в (2.13) заменяются интегралами [4, 5] и стандартная регуляризация заключается в отбрасывании второго интеграла [12].

3. ЭФФЕКТ КАЗИМИРА

Чтобы выполнить суммирование в выражении для свободной энергии (2.13), мы перепишем его следующим образом:

$$F = k_B T \sum_n n^2 \ln \left[2 \operatorname{sh} \frac{\hbar\omega_n}{2k_B T} \right], \quad (3.1)$$

где

$$\omega_n^2 = m^2 + \frac{n^2 - n_c^2}{a^2} \quad (3.2)$$

и

$$n_c^2 = (1 - 6\xi) \chi, \quad \chi = 1. \quad (3.3)$$

Обычно предполагается, что параметр ξ лежит в интервале [6] $0 \leq \xi \leq \frac{1}{6}$. Таким образом, $0 \leq n_c \leq 1$, и $n_c = 0$ для конформной связи ($\xi = 1/6$), $n_c = 1$ для минимальной связи ($\xi = 0$).

Начнем со случая массивного скалярного поля с конформной связью ($n_c = 0$), как наиболее простого. Тогда

$$\omega_n^2 = m^2 + \frac{n^2}{a^2}. \quad (3.4)$$

С использованием безразмерных частот

$$\tilde{\omega}_n^2 = m^2 a^2 + n^2 \quad (3.5)$$

формулу (3.1) перепишем в виде

$$F = k_B T \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \left[2 \operatorname{sh} \frac{\hbar \tilde{\omega}_n}{2\Theta} \right], \quad (3.6)$$

где мы ввели редуцированную температуру

$$\Theta \equiv k_B T \cdot a, \quad (3.7)$$

измеряемую в единицах $\hbar/ak_B$ (при $c = 1$). Чтобы выделить эффекты конечного объема системы (Вселенной), мы прибавим и отнимем F_∞ – свободную энергию в предельном случае бесконечной Вселенной ($a \rightarrow \infty$):

$$F = (F - F_\infty) + F_\infty \equiv F_{\text{fs}} + F_\infty. \quad (3.8)$$

Выражение для F_∞ является расходящимся:

$$F_\infty = k_B T \int_0^\infty dn n^2 \ln \left[2 \operatorname{sh} \frac{\hbar \tilde{\omega}}{2\Theta} \right]. \quad (3.9)$$

После стандартной регуляризации с помощью дзета-функции (в результате которой $\int_0^\infty dn n^2 \tilde{\omega}_n = 0$) получим

$$\begin{aligned} F_{\infty, \text{ren}} &= k_B T \int_0^\infty dn n^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T} \right)^2 + \left(\frac{\hbar n}{\Theta} \right)^2} \right) \right] = \\ &= -\frac{a^3 (k_B T)^4}{\hbar^3} \int_0^\infty dx x^4 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T} \right)^2 + x^2} \left[\exp \left(\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T} \right)^2 + x^2} \right) - 1 \right]}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эффект конечности Вселенной (эффект Казимира) заключается в конечной разности сумма минус интеграл:

$$F_{\text{fs}} = k_B T \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\hbar \tilde{\omega}_n}{2\Theta} \right) - \int_0^{\infty} dn n^2 \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\hbar \tilde{\omega}_n}{2\Theta} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Для вычисления этой разности удобно использовать формулу суммирования Абеля–Плана [3–5, 23]

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(n) dn \right] = -\frac{1}{2}f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(i\nu) - f(-i\nu)}{[\exp(2\pi\nu) - 1]} d\nu, \quad (3.12)$$

которая является корректной, если $f(\nu)$ регулярна при $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ (на мнимой оси $f(\nu)$ может иметь полюсы и точки ветвления, которые при интегрировании обходятся справа, т.е. при $\operatorname{Re} \nu > 0$). Тогда

$$F_{\text{fs}} = k_B T i \int_0^{\infty} \frac{f(i\nu) - f(-i\nu)}{[\exp(2\pi\nu) - 1]} d\nu, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2 \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\hbar}{2\Theta} \sqrt{m^2 a^2 + n^2} \right) = \\ &= n^2 \ln \left\{ \frac{\hbar}{\Theta} \sqrt{m^2 a^2 + n^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\hbar}{2\pi p \Theta} \right)^2 (m^2 a^2 + n^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Функция $f(n)$ имеет точки ветвления на мнимой оси при $n = [m^2 a^2 + (2\pi p \Theta / \hbar)^2]^{1/2}$, где $p = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, интеграл (3.13) разбивается на сумму интегралов:

$$\begin{aligned} F_{\text{fs}} &= k_B T 2\pi \int_0^{\infty} dn n^2 \sum_{p=0}^{\infty}{}' \theta \left[n^2 - m^2 a^2 - \left(\frac{2\pi p \Theta}{\hbar} \right)^2 \right] \frac{1}{\exp(2\pi n) - 1} = \\ &= k_B T 2\pi \sum_{p=0}^{\infty}{}' \int_{n_p}^{\infty} dn n^2 \frac{1}{\exp(2\pi n) - 1}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$n_p \equiv \left[m^2 a^2 + \left(\frac{2\pi p \Theta}{\hbar} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

и штрих в сумме означает, что член с $p = 0$ должен учитываться с весом $1/2$. Переходя обратно от импульсного квантового числа n к “физическим” волновым векторам $k = n/a$, мы видим, что формула (3.15) соответствует распределению Планка с эффективной температурой $T_{\text{eff}} = \hbar / a k_B$. Появление такой эффективной температуры типично для эффекта Казимира [10, 3].

Полная перенормированная свободная энергия имеет вид

$$F_{\text{ren}} = F_{\text{fs}} + F_{\infty, \text{ren}} = \frac{k_B T}{4\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \int_{2\pi n_p}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} - \frac{a^3 (k_B T)^4}{\hbar^3} \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T}\right)^2 + x^2} \left[\exp \left(\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T}\right)^2 + x^2} \right) - 1 \right]}. \quad (3.17)$$

Плотность внутренней энергии флуктуаций скалярного поля может быть найдена с помощью стандартных термодинамических формул:

$$\rho = \frac{1}{V} U = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \frac{\partial(\beta F_{\text{ren}})}{\partial \beta} = \rho_{\text{fs}} + \rho_{\infty, \text{ren}}, \quad (3.18)$$

где $V = 2\pi^2 a^3$ – это объем закрытой Вселенной Фридмана. В явном виде:

$$\rho_{\text{fs}} = 8\pi^2 \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2 \left(\left(\frac{m\hbar}{2\pi k_B T} \right)^2 + p^2 \right)^{1/2}}{\exp \left(\frac{4\pi^2 \Theta}{\hbar} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\hbar}{2\pi k_B T} \right)^2 + p^2} \right) - 1}, \quad (3.19)$$

$$\rho_{\infty, \text{ren}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T}\right)^2 + x^2} dx}{\exp \left(\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T}\right)^2 + x^2} \right) - 1}. \quad (3.20)$$

Формулы (3.18)–(3.20) удобно использовать для перехода к высокотемпературному пределу $k_B T \gg \hbar/a$ ($\Theta/\hbar \gg 1$). Ясно, что в этом случае основной вклад дает член с $p = 1$.

Для нахождения давления флуктуаций мы используем формулу

$$P = -\frac{\partial F_{\text{ren}}}{\partial V} = -\frac{1}{6\pi^2 a^2} \frac{\partial F_{\text{ren}}}{\partial a} = P_{\text{fs}} + P_{\infty, \text{ren}}, \quad (3.21)$$

где

$$P_{\text{fs}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{fs}} + \frac{2}{3} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3} \left(\frac{m\hbar}{k_B T} \right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{m\hbar}{2\pi k_B T} \right)^2 + p^2 \right)^{1/2}}{\exp \left(\frac{4\pi^2 \Theta}{\hbar} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\hbar}{2\pi k_B T} \right)^2 + p^2} \right) - 1}, \quad (3.22)$$

$$P_{\infty, \text{ren}} = \frac{1}{6\pi^2} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T}\right)^2 + x^2} \left[\exp \left(\sqrt{\left(\frac{m\hbar}{k_B T}\right)^2 + x^2} \right) - 1 \right]}. \quad (3.23)$$

В высокотемпературном пределе $\Theta/\hbar \gg 1$ в формуле (3.22) мы должны удерживать члены с $p = 0, 1$. Они дают основной вклад в P .

Альтернативное выражение. Формулу (3.17) неудобно использовать в низкотемпературном пределе $\Theta/\hbar \ll 1$. Для этих целей полезна формула Пуассона [15–17]

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma(p) = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} c(2\pi p), \quad (3.24)$$

где $\sigma(p)$ и $c(p)$ связаны фурье-преобразованием

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x) e^{-i\alpha x} dx. \quad (3.25)$$

В нашем случае

$$\sigma(p) = \int_{2\pi n_p}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}, \quad (3.26)$$

тогда выражение (3.15) можно переписать в виде

$$F_{\text{fs}} = \frac{k_B T}{4\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sigma(p) = \frac{k_B T}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} c(2\pi p). \quad (3.27)$$

Выражение для $c(0)$ легко получить:

$$c(0) = \frac{\hbar}{4\pi^3 \Theta} \int_{2\pi m a}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 - (2\pi m a)^2} x^2 dx}{e^x - 1}. \quad (3.28)$$

Легко видеть, что (3.28) пропорционально свободной энергии флуктуаций вакуума F_{vf} :

$$F_{\text{vf}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\hbar \omega_n}{2} - \int_0^{\infty} n^2 \frac{\hbar \omega_n}{2} dn = \frac{\hbar}{a} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{2\pi m a}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 - (2\pi m a)^2} x^2 dx}{e^x - 1}, \quad (3.29)$$

где для регуляризации F_{vf} мы использовали формулу суммирования Абеля–Плана (3.12). Выражение (3.27) принимает вид

$$F_{\text{fs}} = F_{\text{vf}} + \frac{k_B T}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} c(2\pi p), \quad (3.30)$$

где для $p \neq 0$

$$c(\alpha) = \frac{1}{\pi \alpha} \left[-\frac{d^2}{dz^2} + (2\pi m a)^2 \right] \int_{2\pi m a}^{\infty} \frac{\sin \left(z \sqrt{x^2 - (2\pi m a)^2} \right)}{e^x - 1} dx \Big|_{z=\frac{\alpha \hbar}{4\pi^2 \Theta}}. \quad (3.31)$$

Таким образом, альтернативное выражение для полной перенормированной свободной энергии имеет вид $F_{\text{ren}} = F_{\text{fs}} + F_{\infty, \text{ren}}$, где F_{fs} определяется формулами (3.30), (3.31).

Это выражение является наиболее удобным в случае безмассового скалярного поля, как мы покажем ниже. Если масса скалярных частиц отлична от нуля, то в низкотемпературном пределе удобно использовать еще одно представление для свободной энергии.

Низкотемпературный предел в случае ненулевой массы. При $m \neq 0$ интеграл (3.31) нельзя вычислить точно. В этом случае низкотемпературный предел для F_{fs} можно получить непосредственно из формулы (3.11), которую можно переписать в виде

$$F_{\text{fs}} = k_B T \sum_1^{\infty} n^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar \tilde{\omega}_n}{\Theta} \right) \right] + F_{\text{vf}} - F_{\infty, \text{ren}}. \quad (3.32)$$

Добавляя к этому выражению $F_{\infty, \text{ren}}$, получим в низкотемпературном пределе

$$F_{\text{ren}} = k_B T \sum_1^{\infty} n^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar \tilde{\omega}_n}{\Theta} \right) \right] + F_{\text{vf}} \approx -k_B T \exp \left(-\frac{\hbar \tilde{\omega}_1}{\Theta} \right) + F_{\text{vf}}. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в формулу (3.18), получим

$$\rho = \frac{\hbar}{2\pi^2 a^4} \sum_1^{\infty} \frac{n^2 \tilde{\omega}_n}{\exp \left(\frac{\hbar \tilde{\omega}_n}{\Theta} \right) - 1} + \rho_{\text{vf}} \approx \frac{\hbar \tilde{\omega}_1}{2\pi^2 a^4} \exp \left(-\frac{\hbar \tilde{\omega}_1}{\Theta} \right) + \rho_{\text{vf}}, \quad (3.34)$$

где ρ_{vf} — это известное выражение для плотности энергии вакуумных флуктуаций массивного скалярного поля [3–6, 9, 10]:

$$\rho_{\text{vf}} = \frac{\hbar}{a^4 \pi (2\pi)^5} \int_{2\pi m a}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 - (2\pi m a)^2} x^2 dx}{e^x - 1}. \quad (3.35)$$

С помощью формул (3.21) и (3.33) мы получим для давления выражение

$$P = \frac{\hbar}{6\pi^2 \alpha^4} \sum_1^{\infty} \frac{n^4}{\tilde{\omega}_n \left[\exp \left(\frac{\hbar \tilde{\omega}_n}{\Theta} \right) - 1 \right]} + P_{\text{vf}} \approx \frac{\hbar}{6\pi^2 a^4 \tilde{\omega}_1} \exp \left(-\frac{\hbar \tilde{\omega}_1}{\Theta} \right) + P_{\text{vf}}, \quad (3.36)$$

где

$$P_{\text{vf}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{vf}} + \frac{(ma)^2 \hbar}{24\pi^2 a^4} \int_{2\pi m a}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - (2\pi m a)^2} (e^x - 1)}. \quad (3.37)$$

Интеграл в (3.37) является сходящимся.

Безмассовый случай. Полученные выше формулы значительно упрощаются в случае радиации ($m = 0$). Например, выражение (3.17) для F_{ren} принимает вид

$$F_{\text{ren}} = \frac{k_B T}{4\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \int_{\frac{4\pi^2 p \Theta}{\hbar}}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} - \frac{a^3 \pi^4}{\hbar^3 45} (k_B T)^4, \quad (3.38)$$

из которого следует формула для плотности энергии флуктуации безмассового скалярного поля

$$\rho = 8\pi^2 \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^3}{\exp \left(\frac{4\pi^2 p \Theta}{\hbar} \right) - 1} + \frac{\pi^2}{30} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3}. \quad (3.39)$$

Второй член в этой формуле – обычное выражение для плотности энергии черного тела. Эффект Казимира содержится в первом члене. В принципе данная формула открывает возможность получить информацию о глобальной топологии Вселенной из наблюдений микроволнового излучения. К сожалению, как будет показано ниже, в настоящий момент для стандартной горячей Вселенной Фридмана поправки к плотности энергии черного тела являются экспоненциально малыми. Если потребовать сохранения общей энергии флуктуаций при эволюции Вселенной, т.е. $\rho \cdot a^4 = \text{const}$ [24], тогда из формулы (3.39) следует

$$k_B T \cdot a = \Theta = \text{const}. \quad (3.40)$$

Это обычное соотношение между температурой радиации и масштабным фактором.

Формулу (3.39) удобно использовать для нахождения плотности энергии в высокотемпературном пределе $k_B T \gg \hbar/a$, который можно переписать в виде $\Theta/\hbar \gg 1$. В этом пределе мы получим для плотности энергии следующее выражение:

$$\rho \approx 8\pi^2 \frac{\hbar}{a^4} \left(\frac{\Theta}{\hbar} \right)^4 \exp \left(-4\pi^2 \frac{\Theta}{\hbar} \right) + \frac{\pi^2}{30} \frac{\hbar}{a^4} \left(\frac{\Theta}{\hbar} \right)^4. \quad (3.41)$$

Чтобы найти выражение для плотности флуктуаций, мы используем формулу (3.21) и получим

$$P = \frac{\rho}{3}, \quad (3.42)$$

где плотность энергии ρ определяется выражением (3.39). Это обычное уравнение состояния для радиации.

Как было подчеркнуто выше, формулы типа (3.39) являются неудобными для перехода к низкотемпературному пределу $\Theta/\hbar \ll 1$. Для этих целей мы используем выражение (3.30), где в безмассовом случае

$$F_{\text{vf}} = \frac{1}{240} \frac{\hbar}{a} \quad (3.43)$$

и [17]

$$c(\alpha) = -\frac{1}{\pi\alpha} \left\{ 4\pi^3 \frac{[1 + \exp(-\frac{\alpha\hbar}{2\pi\Theta})] \exp(-\frac{\alpha\hbar}{2\pi\Theta})}{[1 - \exp(-\frac{\alpha\hbar}{2\pi\Theta})]^3} - \frac{(4\pi^2\Theta)^3}{\alpha^3\hbar^3} \right\}. \quad (3.44)$$

Формула (3.43) – это известное выражение для свободной энергии вакуумных флуктуаций безмассового скалярного поля в закрытой Вселенной Фридмана [3–6, 9, 10]. В результате альтернативная формула для свободной энергии имеет вид

$$F_{\text{ren}} = \frac{1}{240} \frac{\hbar}{a} - k_B T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{[1 + \exp(-\frac{n\hbar}{\Theta})] \exp(-\frac{n\hbar}{\Theta})}{[1 - \exp(-\frac{n\hbar}{\Theta})]^3}. \quad (3.45)$$

Используя эту формулу, в низкотемпературном пределе получим

$$F_{\text{ren}} \approx \frac{1}{240} \frac{\hbar}{a} - k_B T \exp \left(-\frac{\hbar}{\Theta} \right). \quad (3.46)$$

Эту же оценку можно получить непосредственно из формул (3.32), (3.33). Подставляя (3.45) в (3.18), мы получим альтернативное выражение для плотности энергии:

$$\rho = \frac{\hbar}{480\pi^2} \frac{1}{a^4} + \frac{\hbar}{2\pi^2} \frac{1}{a^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + 4 \exp(-\frac{n\hbar}{\Theta}) + \exp(-\frac{2n\hbar}{\Theta})] \exp(-\frac{n\hbar}{\Theta})}{[1 - \exp(-\frac{n\hbar}{\Theta})]^4}, \quad (3.47)$$

которое быстро сходится при низких температурах. Из этой формулы легко видеть, что требование сохранения общей энергии опять приводит к условию (3.40) $k_B T \cdot a = \text{const}$. В низкотемпературном пределе $k_B T \ll \hbar/a$ получим приближенную оценку

$$\rho \approx \frac{\hbar}{480\pi^2} \frac{1}{a^4} + \frac{\hbar}{2\pi^2} \frac{1}{a^4} \exp\left(-\frac{\hbar}{\Theta}\right). \quad (3.48)$$

Для давления флуктуаций мы опять получим с помощью формулы (3.21) уравнение состояния (3.42), где ρ определяется формулой (3.47).

Случай неконформной связи. Рассмотрим теперь скалярное поле с произвольной связью $0 \leq \xi \leq 1/6$. Для упрощения вычислений будем исследовать безмассовый случай. Обобщение полученных формул на случай $m \neq 0$ является очевидным.

Частота (3.2) $\omega_n^2 = (n^2 - n_c^2)/a^2$ после вращения в комплексной n_c -плоскости $n_c \rightarrow i\nu_c$ принимает вид

$$\omega_n^2 = \frac{\nu_c^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \equiv m^2(a) + \frac{n^2}{a^2}, \quad (3.49)$$

или

$$\tilde{\omega}_n^2 = a^2 \cdot \omega_n^2 = \nu_c^2 + n^2, \quad (3.50)$$

где $m(a) = \nu_c/a$ играет роль массы скалярного поля, которая зависит от масштабного фактора. Теперь можно использовать формулы, полученные для массивного скалярного поля с конформной связью. В конце вычислений необходимо выполнить обратное вращение $\nu_c \rightarrow -in_c$.

Выражение для нерегуляризованной свободной энергии имеет вид

$$F = k_B T \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \left[2 \operatorname{sh} \frac{\hbar \sqrt{\nu_c^2 + n^2}}{2\Theta} \right]. \quad (3.51)$$

Выполняя регуляризацию, аналогичную (3.6)–(3.15), получим окончательно

$$\begin{aligned} F_{\text{fs}} &= k_B T 2\pi \int_0^{\infty} dn n^2 \sum_{p=0}^{\infty} \theta \left[n^2 + n_c^2 - \left(\frac{2\pi p \Theta}{\hbar} \right)^2 \right] \frac{1}{\exp(2\pi n) - 1} = \\ &= k_B T \pi (1 + 2p_c) \int_0^{\infty} \frac{n^2 dn}{\exp(2\pi n) - 1} + \\ &\quad + k_B T 2\pi \sum_{p=p_c+1}^{\infty} \int_{\sqrt{\left(\frac{2\pi p \Theta}{\hbar}\right)^2 - n_c^2}}^{\infty} dn n^2 [\exp(2\pi n) - 1]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где

$$p_c = \left\lfloor \frac{\hbar n_c}{2\pi\Theta} \right\rfloor \quad (3.53)$$

является наибольшим целым числом $\leq \hbar n_c / 2\pi\Theta$. Из формул (3.52), (3.53) видно, что p_c можно рассматривать в качестве параметра инфракрасного обрезания.

Регуляризованный предел $a \rightarrow \infty$ для (3.51) имеет вид

$$\begin{aligned} F_{\infty, \text{ren}} &= -\frac{a^3}{3\hbar^3} (k_B T)^4 \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(\frac{\hbar\nu_c}{\Theta}\right)^2 + x^2} \left[\exp\left(\sqrt{\left(\frac{\hbar\nu_c}{\Theta}\right)^2 + x^2}\right) - 1 \right]} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} -\frac{\pi^4}{45} \frac{a^3}{\hbar^3} (k_B T)^4. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Это обычное выражение для свободной энергии черного тела, и данный результат можно было предсказать заранее, так как “масса” $m(a)$ стремится к нулю при $a \rightarrow \infty$. Таким образом, $F_{\infty, \text{ren}}$ имеет один и тот же вид для любой связи ξ .

Перенормированное выражение для свободной энергии может быть найдено в виде суммы

$$F_{\text{ren}} = F_{\text{fs}} + F_{\infty, \text{ren}}. \quad (3.55)$$

Тогда с помощью формул (3.18) и (3.21) мы получим для плотности энергии выражение

$$\rho = 8\pi^2 \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3} \sum_{p=p_c+1}^{\infty} \frac{p^2 \left(p^2 - \left(\frac{n_c \hbar}{2\pi\Theta} \right)^2 \right)^{1/2}}{\exp\left(\frac{4\pi^2\Theta}{\hbar} \cdot \sqrt{p^2 - \left(\frac{n_c \hbar}{2\pi\Theta} \right)^2} \right) - 1} + \frac{\pi^2}{30} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3}. \quad (3.56)$$

Как и следовало ожидать, давление удовлетворяет обычному уравнению состояния для радиации: $P = 1/3\rho$. Требование сохранения общей энергии во время эволюции Вселенной приводит опять к условию (3.40).

Формулы (3.52), (3.56) являются удобными для получения оценок в высокотемпературном пределе $\Theta/\hbar \gg 1$. Основной вклад в суммы будет давать член с $p = p_c + 1$.

Наличие “массы” в данной модели не дает возможности вычислить точно коэффициенты $c(\alpha)$ в (3.31). Чтобы получить оценки в низкотемпературном пределе $\Theta/\hbar \ll 1$, перепишем по аналогии с (3.33) выражение для F_{ren} в виде

$$F_{\text{ren}} = k_B T \sum_{n=n^*+1}^{\infty} n^2 \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\tilde{\omega}_n}{\Theta}\right) \right] + F_{\text{vf}}, \quad (3.57)$$

где мы ввели инфракрасное обрезание, аналогичное (3.53): $n^* = [n_c]$ и

$$n^* = \begin{cases} 0, & n_c < 1, \\ 1, & n_c = 1. \end{cases} \quad (3.58)$$

Энергия F_{vf} — это свободная энергия вакуумных флуктуаций

$$F_{\text{vf}} = \frac{\hbar}{a} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2 + (2\pi n_c)^2} x^2 dx}{e^x - 1}. \quad (3.59)$$

Соответствующая плотность энергии определяется выражением

$$\rho_{\text{vf}} = \frac{\hbar}{a^4 \pi (2\pi)^5} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2 + (2\pi n_c)^2} x^2 dx}{e^x - 1}, \quad (3.60)$$

а давление удовлетворяет уравнению состояния $P_{\text{vf}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{vf}}$. В низкотемпературном пределе $\Theta/\hbar \ll 1$ мы получим

$$\rho = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F_{\text{ren}}) \approx \frac{\hbar (n^* + 1)^2 \tilde{\omega}_{n+1}^*}{2\pi^2 a^4} \exp\left(-\frac{\hbar \tilde{\omega}_{n+1}^*}{\Theta}\right) + \rho_{\text{vf}}, \quad (3.61)$$

и давление опять удовлетворяет уравнению состояния $P = \rho/3$.

Требование сохранения общей энергии $\rho \cdot a^4 = \text{const}$ опять приводит к условию (3.40). Интересно отметить, что учет эффекта Казимира не меняет это соотношение.

Роль эффекта Казимира в современной Вселенной. Интересно оценить величину редуцированной температуры Θ для нашей Вселенной. Большинство космологов придерживаются мнения, что наблюдаемая сейчас Вселенная корректно описывается стандартной моделью горячей Вселенной [24], согласно которой величина масштабного фактора в настоящее время $a \sim 12,48 \cdot 10^{27}$ см. Тогда, используя температуру микроволнового излучения $T \sim 2,7$ К, мы получим $\Theta/\hbar \sim 1,5 \cdot 10^{29}$. Приблизительно такое же значение Θ получается для реликтовых нейтрино и гравитонов [24]. Таким образом, для этих видов излучений наша Вселенная на нынешней стадии эволюции находится в высокотемпературном пределе и, очевидно, эффект Казимира является сейчас ненаблюдаемым. Из оценки редуцированной температуры следует, что в стандартной модели горячей Вселенной невозможно использовать формулу (3.39) для ответа на вопрос о глобальной топологии нашей Вселенной из наблюдений микроволнового излучения.

Развитый в данной статье метод вычисления эффекта Казимира и температурных поправок к нему является полезным в моделях холодной Вселенной, а также в моделях с нетривиальной топологией, где безразмерный параметр Θ не является таким огромным, как для горячей Вселенной.

В заключение один из авторов (А. Ж.) считает приятным долгом поблагодарить институт теоретической физики Свободного университета г. Берлина за гостеприимство во время подготовки этой статьи. Мы также признательны рецензенту за то, что он обратил наше внимание на работу [14].

Работа одного из авторов (А. Ж.) выполнена при поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft (грант № Kl. 256), а также Deutscher Akademischer Austauschdienst.

Список литературы

- [1] *H.B.G. Casimir*. Proc. K. Ned. Akad. Wet. 1948. V. 51. P. 793; Physica. 1953. V. 19. P. 846–849.
- [2] *G. Plunien, B. Müller, W. Greiner*. Phys. Rep. 1986. V. 134. P. 87–193.
- [3] *В.М. Мостепаненко, Н.Н. Трунов*. УФН. 1988. Т. 156. С. 385–426; *В.М. Мостепаненко, Н.Н. Трунов*. Эффект Казимира и его приложения. М.: Энергоатомиздат, 1990.
- [4] *С.Г. Мамаев, В.М. Мостепаненко, А.А. Старобинский*. ЖЭТФ. 1976. Т. 70. С. 1577–1591.
- [5] *А.А. Гриб, С.Г. Мамаев, В.М. Мостепаненко*. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [6] *N.D. Birrell, P.S.W. Davies*. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- [7] *G. Cognola, K. Kirsten, S. Zerbini*. Phys. Rev. 1993. V. D48. P. 790–799.
- [8] *S. Bayin, M. Özcan*. Phys. Rev. 1993. V. D48. P. 2806–2812.
- [9] *L.H. Ford*. Phys. Rev. 1975. V. D11. P. 3370–3377.
- [10] *S.G. Mamaev, V.M. Mostepanenko*. In: Proceedings of the Third Seminar on Quantum Gravity. Singapore: World Scientific, 1985. P. 462.
- [11] *Х. Клейнерт, А. Жук*. ТМФ. 1996. Т. 108. № 3. С. 482–496.
- [12] *Р. Фейнман, А. Хубс*. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
- [13] *H. Kleinert*. Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics. Sec. ed. Singapore: World Scientific, 1995.
- [14] *J.S. Dowker, R. Critchley*. Phys. Rev. 1977. V. D15. P. 1484.
- [15] *M. Fierz*. Helv. Phys. Acta. 1960. V. 33. P. 855–858.
- [16] *J. Mehra*. Physica. 1967. V. 37. P. 145–152.
- [17] *J. Schwinger, L.L. DeRaad, K.A. Milton*. Annals of Physics. 1978. V. 115. P. 1–23.
- [18] *R. Balian, B. Duplantier*. Annals of Physics. 1978. V. 112. P. 165–208.
- [19] *D. Lohiya*. In: Gravitation, Gauge Theories and the Early Universe. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989. P. 315.
- [20] *P. Candelas, S. Weinberg*. Nucl. Phys. 1984. V. B237. P. 397–441; *U. Bleyer, A. Zhuk*. Class. Quant. Grav. 1995. V. 12. P. 89–100.
- [21] *U.H. Gerlach, U.K. Sengupta*. Phys. Rev. 1978. V. D18. P. 1773–1784.
- [22] *E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov*. Adv. Phys. 1963. V. 12. P. 185–249.
- [23] Higher Transcendental Functions. V. 1 / Eds. A. Erdélyi et al. N.Y.: McGraw-Hill, 1953.
- [24] *C.W. Misner, K.S. Torne, J.A. Wheeler*. Gravitation. San Francisco: Freeman, 1973.

Поступила в редакцию 9.XI.1995 г.

A. Zhuk, H. Kleinert

CASIMIR EFFECT AT NONZERO TEMPERATURE IN CLOSED FRIEDMANN UNIVERSE

We investigate the finite-size effects upon the free energy of massive and massless scalar field with arbitrary coupling to gravity at nonzero temperature in a slowly evolving closed Friedmann Universe. The renormalized free energy and the resulting energy density and pressure are found and their physical consequence are discussed. The equation of state turns out to have the form $P = \rho/3$ for radiation with arbitrary coupling.