Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Павлов, В. И. Рыжий, Точечные и антиточечные квантовые инфракрасные детекторы: итерационные методы решения уравнения Лапласа в сложных областях, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 2, 163–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:18:23

© 2004 г.

Б. С. Павлов*, В. И. Рыжий†

ТОЧЕЧНЫЕ И АНТИТОЧЕЧНЫЕ КВАНТОВЫЕ ИНФРАКРАСНЫЕ ДЕТЕКТОРЫ: ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ

Предложены итерационные методы для решения задачи Дирихле в сложных областях. Эти задачи возникают в связи с проблемой оптимизации точечных и антиточечных квантовых инфракрасных детекторов. Дана оценка приближенного решения относительно точного.

Ключевые слова: гармонические функции, отображение Пуассона, принцип максимума.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантово-точечный инфракрасный фотодетектор (КТИФ) может быть построен (см., например, [1], [2]) как набор квантовых точек, вкрапленных в материал с относительно широкой полосой энергетической лакуны. Эта структура помещается между контактными слоями: эмиттером Γ_+ : $z = L$ и коллектором Γ_- : $z = 0$. Проводимость всей структуры зависит от распределения потенциала $\varphi(x, y, z)$ между контактными слоями, которое определяется напряжением, приложенным к ним, и зарядами квантовых точек или зарядовой плотностью на пластинах, содержащих антиточки. В частности, плотность тока фотоэмиссии на эмиттере вычисляется как

$$j_{\text{photo}}(x, z) = j_{\text{max}} \exp\left(\frac{e\varphi(x, y, L)}{k_B T}\right),$$

где j_{max} — максимальная плотность тока, $e\varphi(x, y, L)$ — произведение заряда электрона на потенциал эмиттера, k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. С другой стороны, распределение заряда определяется процессом фотоэмиссии из точек, и проводимость антиточечного устройства зависит от распределения потенциала в

*Department of Mathematics, University of Auckland, Auckland, New Zealand. E-mail: pavlov@math.auckland.ac.nz

†Solid State Computer Laboratory, University of Aizu, Aizu-Wakamatsu-City, Japan. E-mail: v-ryzhii@u-aizu.ac.jp

объеме материала полупроводника и определяется интенсивностью фотоэмиссии с металлических пластин. В обоих случаях потенциал может быть посчитан как решение соответствующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области со сложной геометрией, как предложено в работе [3]. Если геометрические параметры области уже выбраны, численное решение возможно. Но из-за присутствия многочисленных геометрических параметров оптимизация соответствующего построения по-прежнему трудна. Мы предлагаем итерационные методы для обеих задач Дирихле с точечным и антиточечным облачением и представляем надлежащую оценку отклонения приближенного решения от соответствующего точного. Построенное приближенное решение содержит все геометрические параметры в точной форме и, таким образом, может быть подставлено для получения точного решения в целях оптимизации построения КТИФ или антиточечного инфракрасного фотодетектора.

2. ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРИСУТСТВИИ КВАНТОВОЙ ТОЧКИ

Идея построения итерационного решения, основанная на принципе максимума для гармонических функций, вдохновлена книгой [4] и статьями [5], [6]. В случае КТИФ мы можем начать с построения функции Грина для слоя Ω между двумя контактными плоскостями $\Gamma_{\pm}$ и соответствующего отображения Пуассона P . Отображение Пуассона позволяет вычислить потенциал u внутри слоя для любых, в частности периодических, граничных данных гармонической функции (потенциала) на контактных плоскостях $\Gamma_{\pm}$. В действительности потенциал определяется также набором простых стандартных проводящих тел ω_s , погруженных в слой Ω между плоскостями, как $u|_{\partial\omega_s} = u_{\gamma_s}$. Эти тела играют роль квантовых точек и могут быть выбраны как эллипсоиды (сфероиды) или даже диски. Решение задачи Дирихле в дополнении к одиночному сфероидальному проводящему телу может быть получено путем разделения переменных в форме сходящегося ряда функций Ламе (см., например, [7]), но уже для двух тел разделение переменных становится невозможным. Мы утверждаем, что наш итерационный метод позволяет получить решение задачи Дирихле и в этом случае, и в значительно более трудном случае нескольких тел внутри слоя. Если тела распределены периодически, то задача во всем слое в присутствии тел сводится к задаче на периоде.

Существенным наблюдением является оценка согласно *принципу максимума* для решения u задачи Дирихле в слое для единичного тела ω с нулевыми граничными условиями на контактных плоскостях; эту оценку следует производить в терминах решения U задачи Дирихле в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ с теми же данными на границе $\gamma = \partial\omega$ тела ω .

Опишем алгоритм построения решения. Рассмотрим отображение Пуассона P_{ω} в дополнении к ω и решение

$$u_1(x) = P_{\omega} u|_{\gamma} = P_{\omega} u_{\gamma}$$

задачи Дирихле в $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ с граничными данными $u|_{\gamma} = u_{\gamma}$ на γ . Если $U(x) = P_{\omega} \chi$ — гармоническая функция на дополнении к ω со стандартными граничными данными

$U_s(x)|_\gamma = \chi = 1$, то в силу принципа максимума

$$|u(x)| \leq U(x) \max_\gamma |u_\gamma|. \quad (1)$$

Обозначая через $u|_\Gamma$ сужение решения u на сумму $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ контактных плоскостей $\Gamma_\pm$, мы можем рассмотреть “отраженное” решение $P[u|_\Gamma] = u_\gamma^{(1)}$ внутри слоя Ω . Гармоническая функция

$$u_\gamma^1 = u - u_\gamma^{(1)}$$

равна нулю на контактных плоскостях, и сужение ее на границу $\Gamma \cup \gamma$ может быть оценено по принципу максимума:

$$|u_\gamma^{(1)}|_\gamma \leq U|_\Gamma \max_\gamma |u_\gamma|.$$

Тогда сужение “дважды отраженного” решения

$$P_\omega[u_\gamma^{(1)}|_\gamma] = u_\gamma^{(2)}$$

на контактные плоскости удовлетворяет оценке

$$u_\gamma^{(2)}|_\Gamma \leq [U]^2|_\Gamma \max_\gamma |u_\gamma|.$$

Гармоническая функция

$$u_3 = u(x) - u^{(1)}(x) + u^{(2)}$$

совпадает с граничной функцией $u|_\gamma$ на $\partial\gamma$ и оценивается на контактных плоскостях как

$$\max|u_3|_\Gamma \leq \max[U]|_\Gamma \max|u_1|.$$

Таким образом, преобразующий граничные данные оператор

$$T: u_1|_\Gamma \longrightarrow u_3|_\Gamma$$

является сжимающим с нормой, оцениваемой как

$$\|T\| \leq \max[U]|_\Gamma = \kappa < 1$$

в пространстве $C_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-}$ непрерывных функций на контактных плоскостях. Тогда итерации

$$u_1 \rightarrow Tu_1 = u_2 \rightarrow Tu_2 = T^2u_1 = u_3 \rightarrow \dots$$

образуют геометрически сходящуюся последовательность с общим членом u_{2s+1} , оцениваемым на $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ как

$$\max|u_s| \leq \kappa^s \max|u_1|.$$

Следовательно, построенная последовательность итераций сходится к решению задачи Дирихле на γ с граничными данными

$$u|_{\gamma} = u_{\gamma}, \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

так что соответствующее отображение Пуассона $\mathcal{P}_{\gamma}$ может быть получено как сумма геометрически сходящейся последовательности

$$\mathcal{P}_{\gamma} = P_{\gamma*} - P[P_{\gamma*}]|_{\Gamma} + P_{\gamma}[P[P_{\gamma*}]|_{\Gamma}]|_{\gamma} - P[P_{\gamma}[P[P_{\gamma*}]|_{\Gamma}]|_{\gamma}]|_{\Gamma} - \dots$$

Теперь мы можем построить “дополнительное” отображение Пуассона $\mathcal{P}_{\Gamma}$ в “возмущенной” области $\Omega \setminus \omega$, которое может быть использовано для построения решения граничной задачи с ненулевыми данными только на Γ . Мы можем построить $\mathcal{P}_{\Gamma}$, основываясь на отображении Пуассона P в невозмущенной области Ω и пользуясь уже вычисленным “суженным” отображением Пуассона $\mathcal{P}_{\gamma}$:

$$\mathcal{P}_{\Gamma*} = P*|_{\Gamma} - \mathcal{P}_{\gamma}[P*|_{\Gamma}]|_{\gamma}.$$

Тогда сумма $\mathcal{P}_{\Gamma} + \mathcal{P}_{\gamma} = \mathcal{P}$ является отображением Пуассона с возмущенной области $\Omega \setminus \omega$.

Построение итерационного решения в случае нескольких тел ω_s в области Ω можно выполнить по индукции, используя полученное на первом шаге отображение Пуассона $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ в $\Omega \setminus \omega$ вместо отображения Пуассона P в “пустом” слое Ω . Затем, добавляя второе тело ω_2 , как ранее, мы получаем итерации отображения Пуассона $\mathcal{P}_2$ для области с двумя телами $\omega = \omega_1, \omega_2$ и т.д. Если второе тело находится далеко от первого, то возмущение отображения Пуассона $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$, вызванное добавлением второго тела, может быть оценено по квадрату обратного расстояния $|1/d_{12}|$ между телами в любой подобласти Ω_1 , $\text{diam } \Omega_1 \leq d_{12}/2$. В конечном итоге это позволяет распространить итерационную процедуру на периодическое распределение квантовых точек.

Описанная процедура построения итерационного решения может быть интерпретирована как решение интегрального уравнения. Предположим, что отображения Пуассона $\mathcal{P}_s$, $s = 1, 2$, в дополнениях $\mathbb{R}^3 \setminus \omega_s := \Omega_s$ известны. Построим решение задачи Дирихле в области $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\omega_1 \cup \omega_2)$ с граничными условиями на общей границе $\partial\Omega = \partial\omega_1 \cup \partial\omega_2 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$u|_{\Gamma_1} = u_1, \quad u|_{\Gamma_2} = u_2. \quad (2)$$

Не ограничивая общности, можно положить, что $u_1 \in C_{\Gamma_1}$ не равно тождественно нулю, но $u_2 = 0$. Предположим, что решения ξ_s , $s = 1, 2$, задачи Дирихле в области Ω_s , $s = 1, 2$, с граничными условиями

$$\xi_s|_{\Gamma_s} = 1$$

построены и $\sup \xi_s|_{\Gamma_t} < 1$ по крайней мере для одной комбинации $s = 1$, $t = 2$ или $s = 2$, $t = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи Дирихле в области Ω для уравнения Лапласа с граничными условиями (2) может быть выражено в форме*

$$\mathcal{P}_1 u - \mathcal{P}_2[\mathcal{P}_1 u]|_{\Gamma_2},$$

где u – решение интегрального уравнения в C_{Γ_1} :

$$u - [\mathcal{P}_2[\mathcal{P}_1 u]|_{\Gamma_2}]|_{\Gamma_1} = u_1.$$

Это интегральное уравнение имеет единственное решение в C_{Γ_1} , поскольку интегральный оператор

$$K: u \rightarrow [\mathcal{P}_2[\mathcal{P}_1 u]|_{\Gamma_2}]|_{\Gamma_1}$$

является сжатием при выполнении условия $\sup \xi_s|_{\Gamma_t} < 1$ при $s = 1, \quad t = 2$ или $s = 2, \quad t = 1$:

$$\|K\|_{C_{\Gamma_1}} \leqslant \sup \xi_1|_{\Gamma_2} \sup \xi_2|_{\Gamma_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на принципе максимума:

$$|\mathcal{P}_1 u_1|_{\Gamma_2} \leqslant \xi \|u_1\|_{C_{\Gamma_1}}.$$

3. ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРИСУТСТВИИ АНТИТОЧЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Начнем с трехмерного уравнения Лапласа

$$-\Delta u = 0 \tag{3}$$

в бесконечном слое Ω : $0 < z < H$ в вакууме, разделенном “металлическими” плоскостями L_s : $H_{s-1} < z < H_s$, $H_0 = 0$, $H_n = d$, с граничными условиями на каждой плоскости

$$u|_{L_s} = u_s = \text{const}, \quad s = 0, 1, \dots, n. \tag{4}$$

Эта “невозмущенная” граничная задача имеет единственное решение, представляемое кусочно-линейной функцией от одной переменной z

$$u(z) = u_{s-1} + (z - H_{s-1}) \frac{u_s - u_{s-1}}{H_s - H_{s-1}}, \quad H_{s-1} \leqslant z \leqslant H_s, \quad s = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

т.е. решение есть линейная функция от z в каждом слое Ω_s : $H_{s-1} < z < H_s$ с толщиной $H_s - H_{s-1} = d_s$ и принимает равные граничные значения u_s на общей границе L_s двух соседних слоев Ω_{s-1} , Ω_s . Скачок нормальной производной решения пропорционален зарядовой плотности ρ на L_s :

$$\frac{u_{s+1} - u_s}{H_{s+1} - H_s} - \frac{u_s - u_{s-1}}{H_s - H_{s-1}} = 4\pi\rho.$$

В настоящей статье мы рассматриваем периодические модификации указанной выше “невозмущенной” задачи. Они достигаются видоизменением основной области $\Omega \rightarrow \Omega$ путем выделения периодических дисковых структур $\omega_{s,t}$ радиуса δ на плоскостях L_s . Мы предполагаем, что “основная подобласть” периодической области Ω – “период” Ω_0 – это параллелепипед $0 < x_1 < D_1$, $0 < x_2 < D_2$, $0 < z < H$, который содержит конечный набор дисков $\omega_{s,t}$ на различных пластинах $L_s = \Omega_0 \cap L_s$, $0 < s < n$, $\bigcup_t \omega_{s,t} = \omega_s$. Обозначим дополнение $L_s \setminus \omega_s$ базового множества дисков ω_s на L_s через γ_s . Тогда полный слой Ω с периодически распределенными дисками на пластинах может быть получен как счетная сумма сдвинутых копий $\Omega_m = \{\mathbf{x}_m = [x_1 + D_1 m_1, x_2 + D_2 m_2], m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_2, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_0\}$ периода Ω_0 ,

$$\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_2} \Omega_m.$$

Сумму по всем периодическим сдвигам базового множества дисков на всей бесконечной пластине L_s обозначим ω_s , а ее дополнение на L_s обозначим γ_s .

Мы исследуем периодическую граничную задачу в области Ω , которая может рассматриваться как возмущение исходной “невозмущенной” задачи:

Найти периодическое решение граничной задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ во всей области Ω с граничными данными

$$u|_{L_0} = 0, \quad u|_{\gamma_s} = u_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad u|_{L_n} = u_n$$

и следующими условиями согласования на дисках: решения уравнения Лапласа в соседних слоях Ω_s, Ω_{s+1} и их нормальные производные совпадают на дисках $\{\omega_{s,t}\}$.

Эта задача может быть предложена в качестве математической формулировки проблемы проводимости плазмы в присутствии периодического набора антиотечек $\{\omega_{s,t}\}$.

Рассмотрим эквивалентную граничную задачу для уравнения Лапласа на возмущенном и невозмущенном (без “дыр”) периоде Ω_0 с периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(\xi_1 + D_1, x_2) &= u(\xi_1, x_2), & u(x_1, \xi_2 + D_2) &= u(x_1, \xi_2), \\ \nabla \partial u(\xi_1 + D_1, x_2) &= \nabla \partial u(\xi_1, x_2), & \nabla \partial u(x_1, \xi_2 + D_2) &= \nabla \partial u(x_1, \xi_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где точки $(\xi_1, x_2), (x_1, \xi_2)$ находятся на “вертикальной” границе основной области $\partial\Omega_0 \setminus (L_0 \cup L_n)$: $\xi_l = 0, D_l$, $0 < z < d$, $l = 1, 2$. В действительности конструкция решения граничной задачи на периоде может быть продолжена периодически с условиями (6) на всю область Ω . Следовательно, мы можем ограничиться граничной задачей на периоде.

Начнем с построения ядра Пуассона в доле $\Omega_{0,s} = \Omega_s \cap \Omega_0$ каждого слоя Ω_s , $s = 0, 1, \dots, n-1$, невозмущенной основной области Ω_0 (без дыр). Горизонтальные моды уравнения Лапласа в доле $\Omega_{0,s} = \Omega_s \cap \Omega_0$ есть нормированные экспоненты:

$$\varphi_l = \frac{1}{\sqrt{D_1 D_2}} e^{i[2\pi x_1/D_1 + 2\pi x_2/D_2]},$$

следовательно, решение соответствующей граничной задачи в слое $d_{s-1} < z < d_s$ с (функциональными) граничными значениями $u_{s-1}(\mathbf{x})$, $u_s(\mathbf{x})$ на соответствующих долях $\mathbf{L}_{s-1}$, $\mathbf{L}_s$ плоскостей L_{s-1} , L_s внутри периода может быть представлено как

$$u_s(\mathbf{x}, z) = \sum_l \varphi_l(\mathbf{x}) \left[u_{s-1,l} \frac{\text{sh } |l|(H_s - z)}{\text{sh } |l|d_s} + u_{s,l} \frac{\text{sh } |l|(z - H_{s-1})}{\text{sh } |l|d_s} \right] \quad (7)$$

с коэффициентами Фурье $u_{s,l} = \langle \varphi_l, u_s \rangle$ граничных данных u_s касательно горизонтальных мод φ_l в L_2 на соответствующих горизонтальных секторах $\mathbf{L}_s$ основной области. Отображение граничных данных u_{s-1} , u_s в периодические гармонические функции $u_s(\mathbf{x})$ в слое Ω_s называется отображением Пуассона и обозначается через $\mathbf{P}_s$. Его сужения на данные, поддерживаемые на нижней крышке $\mathbf{L}_{s-1}$ или верхней крышке $\mathbf{L}_s$ слоя Ω_s , будут обозначаться $\mathbf{P}_s^\pm$, соответственно, так что, например, $\mathbf{P}_s^+ u_{s-1}|_{\mathbf{L}_s} = 0$.

В следующем разделе мы используем вместе с отображениями Пуассона для периодических решений условные отображения Пуассона: $\mathcal{P}_s^+$ в полупространстве Ω_s^+ : ($z - H_{s-1} > 0$) и $\mathcal{P}_s^-$ в полупространстве Ω_s^- : ($z - H_{s-1} < 0$), например

$$\mathcal{P}_s^+(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\mathbf{x} - \xi, e_z)}{|\mathbf{x} - \xi|^2},$$

$\mathbf{x} \in \Omega_s^+$, $\xi \in L_{s-1}$. Для любого измеримого множества $\omega \in L_{s-1}$ можно ввести индикатор $\chi_\omega(\xi)$ и гармоническую функцию

$$\int_{L_{s-1}} \mathcal{P}_s^+(\mathbf{x}, \xi) \chi_\omega(\xi) d^2 \xi = \int_\omega \mathcal{P}_s^+(\mathbf{x}, \xi) d^2 \xi := \mu^\mathbf{x}(\omega),$$

называемую обычно *гармонической мерой* ω относительно точки $\mathbf{x}$. Гармоническая мера пропорциональна пространственному углу, противолежащему множеству ω , с коэффициентом $1/(2\pi)$. Этот геометрический факт будет использован в следующем разделе при получении оценок для отклонений приближенных решений поставленной выше задачи от приближенных решений, которые мы собираемся построить.

Можно ввести аналоги $\mu_{\pm,s}^\mathbf{x}(\omega)$ гармонической меры на слоях. Например, если $\omega \in L_{s-1}$, $x \in \Omega_s$, то

$$\int_\omega \mathbf{P}_s^+(\mathbf{x}, \xi) d^2 \xi := \mu_{+,s}^\mathbf{x}(\omega).$$

Из принципа максимума следует, что аналоги отображения Пуассона на слоях доминируются отображениями Пуассона в полупространстве, например, если $\mathbf{x} \in \Omega_s$, $\omega \in L_{s-1}$, имеем

$$0 < \mu_{+,s}^\mathbf{x}(\omega) < \mu_+^\mathbf{x}(\omega). \quad (8)$$

Для каждого диска $\omega_{s,t}$ рассмотрим цилиндр

$$B_{s,t} = \left\{ \mathbf{x} \in \omega_{s,t}, |z - H_s| < \frac{1}{2} \min(d_s, d_{s+1}) \right\},$$

разбиваемый диском $\omega_{s,t}$ на две равные части $B_{s,t}^\pm$, которые лежат в верхнем и нижнем смежных слоях Ω_{s+1} , Ω_s , и соответствующие части границы $\Sigma_{s,t}^\pm \in \partial B_{s,t}$. Сумма по всем верхним (нижним) частям цилиндров, основаниями которых являются диски $\omega_{s,t} \in L_s$, обозначим $B_{\omega_s}^+$ ($B_{\omega_s}^-$). Соответствующие множества на периоде обозначим $\mathbf{B}_{\omega_s}^\pm$. Сходным образом можно построить цилиндры $B_{\gamma_s}^+$, $B_{\gamma_s}^-$ с основаниями на γ_s . Обозначим через $\Sigma_{s,t}$ поверхность цилиндра $B_{s,t}$ и через $\Sigma_{s,t}^\pm$ верхнюю и нижнюю его части: $\Sigma_{s,t}^\pm \subset \Omega_s^\pm$. Можно определить также сумму поверхностей $\Sigma_{\omega_s}^\pm = \bigcup_t \Sigma_{s,t}^\pm$ в целых бесконечных слоях или в их частях по периодам.

Получим теперь интегральное уравнение для решения первой из двух поставленных выше граничных задач (“антиточечная” проблема) на периоде с периодическими граничными условиями на вертикальной границе, условиями Дирихле на горизонтальных плоскостях L_s

$$\Delta v = 0, \quad v|_{L_s \cap \Omega_0} = u_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

граничными условиями согласования на дисках $\omega_{s,t}$ и с условием Майкснера на границе дисков: $u \in W_2^1(\Omega_0)$. Формально этот же метод может быть использован для решения второй (“квантово-точечной”) проблемы, но решение промежуточной граничной задачи на B_{γ_s} не может быть получено в точной форме.

Рассмотрим “антиточечную” задачу как возмущение исходной задачи с “бездырочностью” на пластинах L_s . Различие $w = v - u$ между решениями возмущенной и невозмущенной задач равно нулю на плоскостях вне дисков $\omega_{s,t}$. Мы можем восстановить гармоническую функцию w в каждом слое Ω_s , если известны ее сужения $w_{s,t}$, $w_{s-1,t}$ на диски $\omega_{s,t}$, $\omega_{s-1,t}$, расположенные внутри периода Ω_0 на плоскостях L_{s-1} , L_s . Выведем теперь интегральное уравнение для функций $w_{s,t}$. Обозначим через $\mathbf{w}$ столбец из вектор-функций w_s , $s = 1, 2, \dots, n$, с компонентами $\{w_{s,t}\}$, $t = 1, 2, \dots$. Для каждой вектор-функции w_s можно построить периодические решения задачи Дирихле в слоях Ω_s , Ω_{s+1} , используя формулы для отображения Пуассона

$$w_s^+(z) = \mathbf{P}_s^+ \left[\sum_t w_{s,t} \right],$$

$$w_s^-(z) = \mathbf{P}_{s-1}^- \left[\sum_t w_{s,t} \right].$$

Отсюда решение w полной граничной задачи в слое Ω представляется в виде прямой суммы решений w_s граничных задач в слоях Ω_s :

$$w|_{\Omega_s} = w_s = \mathcal{P}_s \left[\sum_t w_{s,t} + \sum_t w_{s-1,t} \right],$$

и возмущенное решение в слое Ω_s равняется сумме невозмущенного кусочно-линейного решения (5) и корректирующего дополнения w : $v = u + w$. Рассмотрим сужения построенного решения $u + w$ на поверхности $\Sigma_{\omega_{s,t}}$ цилиндров с основаниями на дисках $\omega_{s,t} \in L_s$, $\omega_{s-1,t} \in L_{s-1}$:

$$u + w|_{\Sigma_{s,t}^+} : v_{\Sigma_{s,t}^+}, \quad u + w|_{\Sigma_{s,t}^-} : v_{\Sigma_{s,t}^-}.$$

Тогда сужение решения v возмущенной задачи (с дырами) на поверхность $\Sigma_{s,t} = \Sigma_{s,t}^+ \cup \Sigma_{s,t}^-$ представляет собой прямую сумму сужений

$$v|_{\Sigma_{s,t}} = v_{\Sigma_{s,t}^-} \oplus v_{\Sigma_{s,t}^+}.$$

Используя тот факт, что решение v есть гармоническая функция внутри цилиндра $B_{s,t}$, ее можно представить внутри цилиндра $B_{s,t}$ посредством интеграла Пуассона:

$$v = \mathcal{P}_{s,t}[v_{\Sigma_s^-} \oplus v_{\Sigma_s^+}] = \mathcal{P}_{s,t}[(u + w|_{\Sigma_{s,t}^+}) \oplus (u + w|_{\Sigma_{s,t}^-})].$$

Теперь сужение полученной функции v на диск $\omega_{s,t} \in B_{s,t}$ вновь дает начальную функцию $u_s + w_{s,t}$. Это приводит к интегральному уравнению для вектор-функции w . Описанный алгоритм построения уравнения для отклонения w решения возмущенной граничной задачи от решения невозмущенной (без дыр) может быть представлен в операторной форме. Обозначим через $[\cdot]_{\omega}$ сужение выражения в скобках $[\cdot]$ на множество ω . Тогда можно представить описанный алгоритм в следующей форме:

$$[\mathcal{P}_{s,t}([u + \tilde{\mathbf{P}}_{s+1}(w_s + w_{s+1})]_{\Sigma_{s,t}^+} \oplus [u + \tilde{\mathbf{P}}_s(w_s + w_{s-1})]_{\Sigma_{s,t}^-})]_{\omega_{s,t}} = w_{s,t} + u_s. \quad (10)$$

При некоторых условиях на геометрические параметры это уравнение может быть решено методом последовательных приближений (см. раздел 4). Чтобы описать процедуру построения приближенного решения, необходимо ввести нормы в пространстве непрерывных вектор-функций с компонентами, определенными на дисках и на слоях внутри периода Ω_0 :

$$|w_s| = \max_{\mathbf{x},t} |w_{s,t}(\mathbf{x})|, \quad |w| = \max_s |w_s|.$$

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (10) может быть представлено в операторной форме в пространстве непрерывных функций на дисках

$$w = Kw + f, \quad (11)$$

где

$$f = [\mathcal{P}_{s,t}([u]_{\Sigma_{s,t}^-} \oplus [u]_{\Sigma_{s,t}^+})]_{\omega_{s,t}} = w_{s,t}$$

и оператор K ,

$$(Kw)_{\omega_{s,t}} = [\mathcal{P}_{s,t}([\tilde{\mathbf{P}}_s(w_s + w_{s-1})]_{\Sigma_{s,t}^-} \oplus [\tilde{\mathbf{P}}_{s+1}(w_s + w_{s+1})]_{\Sigma_{s,t}^+})]_{\omega_{s,t}} = w_{s,t},$$

является суммой сжимающего и компактного операторов в пространстве непрерывных функций на дисках. В случае, когда в слой Ω введена лишь единственная пластина, оператор K является компактным и решение уравнения (11) может быть получено в форме сходящегося ряда

$$w = f + Kf + K^2f + K^3f + \dots \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим прежде всего, что оператор K может быть представлен как сумма $K = K_{\text{diag}} + K_{\text{mix}}$ “диагонального” оператора

$$(K_{\text{diag}} w_s)_{\omega_{s,t}} = [\mathcal{P}_{s,t} ([\mathbf{P}_s w_s]_{\Sigma_{s,t}^-} \oplus [\mathbf{P}_{s+1} w_s]_{\Sigma_{s,t}^+})]_{\omega_{s,t}},$$

преобразующего функцию w_s , определенную на множестве дисков ω_s , в функцию, определенную на том же множестве дисков, и “перемешивающего” оператора

$$(K_{\text{mix}}(w_{s-1} + w_{s+1}))_{\omega_{s,t}} = [\mathcal{P}_{s,t} ([\mathbf{P}_s w_{s-1}]_{\Sigma_{s,t}^-} \oplus [\mathbf{P}_{s+1} w_{s+1}]_{\Sigma_{s,t}^+})]_{\omega_{s,t}} = w_{s,t},$$

преобразующего функцию $w_{s\pm 1}$, определенную на множестве дисков $\omega_{s-1}, \omega_{s+1}$, в функцию, определенную на множестве дисков ω_s . Видно, что перемешивающий оператор содержит сужения отображений Пуассона $\mathbf{P}_s^-, \mathbf{P}_{s-1}^+$, действующих на функции w_{s+1}, w_{s-1} , соответственно, на поверхности $\Sigma_{s,r}$ вершин цилиндров $\min(d_s/2, d_{s+1}/2) := \delta_s$ с основаниями на пластине L_s . Из формулы (7) можно получить экспоненциальную оценку для сужений, например

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_s^- w_{s+1}|_{\Sigma_{s,t}^+} &= \sum_l \varphi_l(\mathbf{x}) u_{s+1,l} \frac{\text{sh } |l|(z - d_s)}{\text{sh } |l|d_{s+1}} \Big|_{\mathbf{x}, z \in \Sigma_{s,t}^+}, \\ |\mathbf{P}_s^- w_{s+1}|_{\Sigma_{s,t}^+}| &\leq \sum_l \frac{l}{\sqrt{D_1 D_2}} |u_{s+1,l}| \frac{\text{sh } |l|(d_{s+1} - \delta_s)}{\text{sh } |l|d_{s+1}}, \end{aligned} \quad (13)$$

или даже

$$\mathbf{P}_s^- w_{s+1}|_{\Sigma_{s,t}^+} = \sum_{l \leq M} \varphi_l(\mathbf{x}) u_{s+1,l} \frac{\text{sh } |l|(z - H_s)}{\text{sh } |l|d_{s+1}} \Big|_{\mathbf{x}, z \in \Sigma_{s,t}^+} + O(e^{-M[\delta_s]}), \quad (14)$$

где через $O(e^{-M[\delta_s]})$ обозначен малый оператор с нормой, оцениваемой соответствующей экспонентой с некоторым положительным множителем. Принимая во внимание, что первое дополнение в правой части формулы (14) есть конечномерный оператор, заключаем, что вышеуказанное сужение, равно как и весь оператор K_{mix} , является компактным оператором в пространстве непрерывных функций:

$$K_{\text{mix}} = K_{\text{mix}}^M + K_{\text{mix}}^\varepsilon, \quad (15)$$

где M -мерная часть обозначена K_{mix}^M и малая часть обозначена $K_{\text{mix}}^\varepsilon$. Отметим, что выполненные вычисления дают также связь между M и ε .

Исследуем теперь диагональную часть оператора K . Обозначим $\chi_{s-1,t}$ индикатор диска $\omega_{s-1,t}$:

$$\chi_{s-1,t}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \omega_{s-1,t}, \\ 0, & \mathbf{x} \in L_s \setminus \omega_{s-1,t}, \end{cases}$$

и рассмотрим граничную задачу для уравнения Лапласа в слое Ω_s с граничным условием $w_{s-1,t} = \chi_{s-1,t}$ на всем семействе дисков на пластине L_{s-1} . Благодаря принципу максимума решение χ_s такой граничной задачи строго меньше, чем решение *внутри*

слоя Ω_s . Более того, сужение решения на каждую поверхность $\Sigma_{s-1,t}$ строго меньше, чем

$$\max_{s,t} \chi|_{\Sigma_{s-1,t}} := \mu_{s-1}.$$

Чтобы удостовериться в этом, необходимо вычислить предел сужения при приближении к пластине L_{s-1} , поскольку значения решений внутри слоя Ω_s между пластинами L_s, L_{s-1} строго меньше единицы. Мы оцениваем предел решения задачи Дирихле в слое Ω_s с граничными данными на верхней границе пластины L_{s-1} решением задачи Дирихле в полупространстве Ω_s^+ , которое равно гармонической мере $\mu^{\mathbf{x}}(\omega_s)$ всей периодической системы дисков. При приближении пластины L_{s-1} к границе диска $\omega_{s,t}$ видно, что гармонические меры всех других дисков $\mu^{\mathbf{x}}(\omega_{s,t'})$, $t' \neq t$, стремятся к нулю благодаря равномерной сходимости ряда

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{m} \neq 0} \frac{\pi \delta^2 (z - H_{s-1})}{[(m_1 D_1)^2 + (m_2 D_2)^2 + (z - H_{s-1})^2]^{3/2}},$$

асимптотически приближаясь к гармонической мере объединения всех нетривиальных периодических сдвигов одного диска $\omega_{s,r}$. Поскольку полное число M_{s-1} дисков на пластине L_{s-1} внутри периода конечно, вклад объединения $\bigcup_{t' \neq t} \omega_{s-1,t'}$ в $\mu^{\mathbf{x}}(\omega_s)$ оценивается как

$$\frac{M_{s-1}}{2\pi} \sum_{\mathbf{m} \neq 0} \frac{\pi \delta^2 (z - H_{s-1})}{[(m_1 D_1)^2 + (m_2 D_2)^2 + (z - H_{s-1})^2]^{3/2}}$$

и стремится к нулю, когда $z \rightarrow H_{s-1}$.

Оставшийся член в $\mu^{\mathbf{x}}(\omega_s)$, обусловленный наличием диска $\omega_{s,t}$, когда точка $(\mathbf{x}, z)$ приближается к $(\mathbf{x}, H_{s-1})$, может быть оценен интегралом

$$\mu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{s,t}} \frac{z - H_{s-1}}{|\xi - \mathbf{x}|^2 + |z - H_{s-1}|^2}^{3/2} d\xi^2,$$

который мажорируется схожим интегралом по полудиску радиуса 2δ с центром в точке $\mathbf{x}$ и может быть легко сосчитан:

$$\mu_0 < \frac{1}{2} \left[1 - \frac{z - H_{s-1}}{\sqrt{|z - H_{s-1}|^2 + \delta^2}} \right] \rightarrow \frac{1}{2}$$

при $z - H_{s-1} \rightarrow 0$. Следовательно, сужение гармонической меры суммы дисков ω_{s-1} на сумму поверхностей $\Sigma_{s-1,t}^+$ строго меньше единицы:

$$\sup \mu_s|_{\Sigma_{s-1,t}^+} := \mu_{s-1}^+ < 1.$$

Объявленная оценка для нормы диагональной части оператора K может быть получена из этого факта на основе принципа максимума. Чтобы удостовериться в этом, положим, что норма граничных данных w в пространстве непрерывных функций есть $\|w\|$. Тогда $\|w\|_{\omega_{s-1,t}} < \|w\|_{\chi_{s-1,t}}$, и “диагональная” часть решения $\mathbf{w}$ подходящей задачи

Дирихле может быть оценена на поверхностях $\Sigma_{s-1,t}^+$ благодаря принципу максимума как

$$\sup_{\Sigma_{s-1,t}^+} |\mathbf{w}| \leq \mu_{s-1} \|w\|.$$

Если сходная оценка имеет место в соседнем слое Ω_{s-1} , тогда мы можем оценить решение граничной задачи с данными $|w|$ на всей поверхности $\Sigma_{s-1,t} = \Sigma_{s-1,t}^+ \cup \Sigma_{s-1,t}^-$ через $\max[\mu_{s-1}^+, \mu_{s-1}^-] \|w\|$. Затем согласно принципу максимума, применив отображение Пуассона к граничным данным на всей поверхности $\Sigma_{s,t}$, получим оценку для решения граничной задачи внутри цилиндра $B_{s-1,t}$:

$$|\mathbf{w}| \leq \max[\mu_{s-1}^+, \mu_{s-1}^-] \|\mathbf{w}\|.$$

Следовательно, сужение этого решения на диск $\omega_{s-1,t} \in B_{s-1,t}$ также удовлетворяет оценке выше. Теперь диагональная часть оператора K является сжимающей, поскольку $\max[\mu_{s-1}^+, \mu_{s-1}^-] < 1$ для любого $s = 2, 3, \dots, n$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что оценки для гармонической меры в теореме 2 могут быть слегка модифицированы, чтобы включить оценку вклада дисков с другой пластины. Чтобы удостовериться в этом, обозначим через μ_{s-1} максимальное значение гармонической меры суммы дисков ω_s на поверхностях $\Sigma_{s-1,t}^+$ с основаниями на дисках $\omega_{s-1,t}$, расположенных на пластине L_{s-1} . Тогда из оценок, полученных выше, следует, что μ_{s-1} мажорируется рядом

$$\frac{M_s}{2\pi} \sum_{\mathbf{m}} \frac{\pi \delta^2 d_s}{[(m_1 D_1)^2 + (m_2 D_2)^2 + (d_s - \delta_s)^2]^{3/2}} := \mu_s.$$

Если сумма $\mu_{s-1} + \mu_s$ строго меньше единицы, то сужение на $\Sigma_{s-1,t}^+$ гармонической меры всего образца дисков $\omega_s \subset L_s$ и $\omega_{s-1} \subset L_{s-1}$ строго меньше единицы. В следующем разделе приведены некоторые грубые оценки для максимумов гармонической меры, которые могут гарантировать сходимость ряда последовательных приближений (12).

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Используем итерационные решения, полученные выше, как аппроксимации для точного решения задачи. Хотя наша итерационная процедура является сходящейся геометрически, необходимы предварительные оценки отклонений конечных аппроксимаций от точного решения. Эти оценки могут быть получены из следующих нескольких элементарных утверждений.

ЛЕММА 1. Если области ω_s , $s = 1, 2$, компактны, B_s — минимальные шары, содержащие ω_s , $\text{diam } B_s = 2d_s$ и $\text{dist}(\omega_1, \omega_2) = d$, то

$$0 < \sup_{\Gamma_2} \xi_1 < \frac{d_1}{d + d_1}, \quad 0 < \sup_{\Gamma_1} \xi_2 < \frac{d_2}{d + d_2},$$

и норма оператора K из раздела 3 может быть оценена как

$$\|K\| \leq \frac{d_1 d_2}{(d + d_2)(d + d_1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основывается на принципе максимума: функции ξ_s мажорируются в Ω_s кулоновскими потенциалами зарядов $4\pi d_s$, расположенных в центрах минимальных шаров B_s , содержащих ω_s .

ЛЕММА 2. *Предположим, что область ω компактна, B – минимальный шар, содержащий ω , $\text{diam } B = 2d$ и $\Gamma_{1,2}$ – параллельные плоскости, образующие открытый слой Ω , ограниченный $\Gamma_{1,2}$, $\text{dist}(\Gamma_{1,2}, B_1) = d_{1,2}$. Рассмотрим отображение Пуассона $\mathcal{P}$ дополнительной области $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ и отображение Пуассона $\mathcal{P}_\Gamma$ невозмущенного слоя Ω . Рассмотрим задачу Дирихле в возмущенном слое $\Omega \setminus \omega$ с нулевыми граничными условиями на плоскостях и константой $u|_\Gamma = u_\Gamma$ на границе $\partial\omega = \Gamma$. Тогда норма интегрального оператора в C_Γ*

$$K: u \rightarrow [\mathcal{P}_\Gamma[\mathcal{P}u]_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}]_\Gamma$$

оценивается как

$$\|K\| \leq \sup_{x \in \Gamma} \leq \frac{d}{d_1 + d} \frac{\text{dist}(x, \Gamma_2)}{d_1 + d_2 + 2d} + \frac{d}{d_2 + d} \frac{\text{dist}(x, \Gamma_1)}{d_1 + d_2 + 2d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основывается на принципе максимума: соответствующие функции ξ_s мажорируются в Ω кулоновским потенциалом заряда $4\pi d$, расположенного в центре минимального шара B , содержащего ω , и линейной функцией внутри невозмущенного слоя.

ЛЕММА 3. *Сужения гармонических функций $\mathcal{P}_i \chi_{s,t}$, $i = s-1, s$, на каждую полусферу $\Sigma_{i,t}^\pm$ допускает оценку*

$$\sup_{\Sigma_{i,t}^\pm} |\mathcal{P}_i \chi_{s,t}| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно провести с использованием того факта, что решение граничной задачи внутри слоя в силу принципа максимума не превышает решения граничной задачи с теми же граничными данными $\chi_{s,t}$ в соответствующем полупространстве. Утверждение остается справедливым при замене одиночной граничной функции $\chi_{s,t}$ на плоскости L_s соответствующей периодически продолженной функцией $\tilde{\chi}_{s,t}$. Решения v_s^+ , v_s^- граничной задачи в смежных полупространствах Ω_s^+ , Ω_s^- , соответственно, и $\tilde{v}_{s+1}^+$, $\tilde{v}_s^-$ в слоях Ω_{s+1} , Ω_s с периодически продолженными граничными условиями являются положительными периодическими функциями, $0 < \tilde{v}_{s+1} < v_{s+1}$, $0 < \tilde{v}_s < v_s$, поскольку $\tilde{v}_{s-1}$, $\tilde{v}_s$ исчезают на L_{s-1} , L_{s+1} , соответственно. Мы оцениваем решение v_s в полупространстве Ω_s^+ , основываясь на факте, что, вообще говоря, решение задачи Дирихле с граничными данными, положенными равными индикатору χ_ω множества $\omega \in L_s$ (гармоническая мера множества, сосчитанная в точке $\mathbf{x}$), равняется пространственному углу в точке $\mathbf{x}$, противолежащему множеству ω с коэффициентом $(4\pi)^{-1}$. В

нашем случае множество представлено как сумма $\omega_{s,t}$ и сдвигов на нем. Пространственный угол в северном полушарии $B_{s,t}$, под которым видно множество $\omega_{s,t}$, равняется $4\pi(1/2 - 1/(2\sqrt{2}))$, а угол, под которым видны все периодические сдвиги $\omega_{s,t}$, асимптотически мажорируется сходящимся рядом и оценивается следующим образом:

$$2\pi\delta^3 \sum_{\mathbf{m} \neq 0} \frac{1}{[(m_1 D_1)^2 + (m_2 D_2)^2 + \delta^2]^{3/2}} \leq 2\pi.$$

Суммируя вышеизложенные результаты, можно оценить гармоническую меру множества *всех сдвигов* $t \in \mathbb{Z}_2$ дисков $\omega_{s,t}$ на северном полюсе шара $B_{s,t}$ как

$$\frac{1}{4\pi} [2\pi + 2\pi - \pi\sqrt{2}] = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1.$$

Оценка ограничения на полусферу Σ_+ решения $\tilde{v}_s$ в слое Ω_s следует из полученного выше неравенства для гармонической меры $\tilde{v}$ в силу принципа максимума. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Предполагая, что имеется несколько дисков $\omega_{s,t} \in L_s$ на периоде Ω_0 , можно оценить угол в точке на сумме полусфер $\sum_t \Sigma_{s,t}$ с основаниями $\omega_{s,t} \in L_s$, противолежащий множеству $\bigcup_t \omega_{s,t} \in s \cap \Omega_0$, как сумму гармонической меры одного диска и гармонической меры всех других дисков, поэтому гармоническая мера суммы $\sum_t \omega_{s,t}$ на полусферах $\sum_t \Sigma_{s,t}$ допускает ту же оценку, а именно $1 - (2\sqrt{2})^{-1}$. Следовательно, результат не зависит от радиусов $\delta_{s,t}$ дисков $\omega_{s,t}$ и их числа, если диски не перекрываются и $\sup_t \delta_{s,t} < \min[(d_{s+1} - d_s), (d_s - d_{s-1})]$.*

Чтобы оценить гармоническую меру дисков $\sum_t \omega_{s,t} \in L_s$ на полусферах $\sum_t \Sigma_{s+1,t}$ с основаниями на дисках $\sum_t \omega_{s+1,t} \in L_{s+1}$, необходимы дополнительные данные о геометрической конфигурации плоскостей L_s, L_{s+1} и дисков на них. Следующее утверждение почти очевидно.

ЛЕММА 4. *Рассмотрим граничную задачу для уравнения Лапласа на доле Ω_s периода Ω_0 с периодическими граничными условиями на вертикальной границе и граничными данными $\sum_t \chi_{s,t}$ на верхней крышке $L_s \cap \Omega_0$. Тогда максимум решения $\tilde{v}_s$ на сумме полусфер $\sum_t \Sigma_{s-1,t}$ с основаниями на $\sum_t \omega_{s-1,t}$, может быть оценен как*

$$\max \tilde{v}_s \leq \frac{\sum_t \delta_{s,t}^2}{2(d_s - d_{s-1} - \max_t \delta_{s-1,t})^2} := \rho_{s-1,+}. \quad (16)$$

Аналогичная оценка имеет место для максимума гармонической меры дисков $\sum_t \omega_{s-1,t}$ на полусферах, находящихся на дисках $\sum_t \omega_{s,t}$:

$$\max \tilde{v}_{s-1} \leq \frac{\sum_t \delta_{s-1,t}^2}{2(d_s - d_{s-1} - \max_t \delta_{s,t})^2} := \rho_{s,-}. \quad (17)$$

Суммируя полученные результаты, можно сформулировать следующую априорную оценку для решения v граничной задачи в $\Omega_s \cap \Omega_0$ с периодическими граничными данными на вертикальной границе и условиями Дирихле на верхней и нижней крышках $L_s \cap \Omega_0$, $L_{s-1} \cap \Omega_0$:

$$v|_{L_s \cap \Omega_0} = \sum_t \chi_{s,t}, \quad v|_{L_{s-1} \cap \Omega_0} = \sum_t \chi_{s-1,t}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Решение указанной граничной задачи допускает оценки*

$$v|_{\sum_t \Sigma_{s,t}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \rho_{s,-},$$

$$v|_{\sum_t \Sigma_{s-1,t}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \rho_{s-1,+}$$

на семействе полусфер $\sum_t \Sigma_{s,t}$, $\sum_t \Sigma_{s-1,t}$ с основаниями на дисках $\omega_{s,t} \in L_s$ и $\omega_{s-1,t} \in L_{s-1}$, соответственно.

Благодарности. Авторы признательны профессору В. Бабищу за важные ссылки и профессору С. М. Ермакову за интересные и вдохновляющие дискуссии.

Список литературы

- [1] V. Ryzhii. Semicond. Sci. Technol. 1996. V. 11. P. 759–765.
- [2] V. Ryzhii, V. Pipa, I. Khmyrova, V. Mitin, M. Wilander. Japan. J. Appl. Phys. P. 2. 2000. V. 39. P. L1283–L1285.
- [3] M. Ryzhii, V. Ryzhii, V. Mitin. Microelectronics J. 2003. V. 34. P. 411–414.
- [4] И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
- [5] В. Готлиб. ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1109–1113.
- [6] B. Pavlov. New Zealand J. Math. 1996. V. 25. P. 199–216.
- [7] Н. Н. Лебедев. Специальные функции в математической физике. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 22.IX.2003 г.,
после доработки 18.II.2004 г.