Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, Об одном классе эллиптических решений уравнения Буссинеска,
ТМФ, 1996, том 109, номер 3, 347–356

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:57:07

А. О. Смирнов*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Рассмотрен анзац кривых Кричевера, ассоциированных с двоякопериодическими конечнозонными решениями уравнения Буссинеска, выраженными через эквиангармонические эллиптические $\wp$ -функции Вейерштрасса. Приведены примеры.

ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические конечнозонные решения интегрируемых нелинейных уравнений представляют интерес не только сами по себе, как описывающие периодические (по времени и/или по координате) нелинейные процессы, они также могут быть использованы для изучения динамики интегрируемых систем частиц [1–3] или для исследований линейных обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений, аналогичных уравнениям Ламе или Требиха–Вердье (см., например, [2–16]).

При исследовании условий периодичности были найдены эллиптические по различным переменным конечнозонные решения основных интегрируемых нелинейных уравнений [4–23]. Однако эти уравнения несмотря на все различия имеют одну общую черту – их конечнозонные решения строятся по гиперэллиптической кривой. Уравнениям, конечнозонные решения которых ассоциированы с негиперэллиптическими кривыми, в первую очередь это уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) [2] и Буссинеска [24–26], уделено гораздо меньше внимания, несмотря на то что эллиптические по x решения уравнения Буссинеска играют такую же большую роль при изучении уравнения Альфана и его аналогов [27, 28 (ур. 3.9–3.12), 15, 29–31], как и эллиптические решения уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) при исследовании оператора Шредингера с потенциалами Ламе и Требиха–Вердье.

В данной работе описывается класс кривых, ассоциированных с эллиптическими по x решениями уравнения Буссинеска.

1. КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Следуя Кричеверу [32, 33], рассмотрим риманову поверхность (РП) Γ рода g с выделенной на ней точкой $\mathcal{P}_\infty$. Выберем на Γ базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

* Санкт-Петербургская государственная академия аэрокосмического приборостроения

Ему соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g.$$

Хорошо известно, что матрица периодов

$$B_{jk} = \oint_{b_j} d\mathcal{U}_k, \quad j, k = 1, \dots, g,$$

есть симметрическая матрица с положительно определенной мнимой частью.

По матрице периодов B построим тэта-функцию с характеристиками $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g$:

$$\begin{aligned} \Theta[\alpha; \beta](u|B) &\equiv \Theta[\alpha; \beta](u) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ \pi i \langle B(m + \alpha), m + \alpha \rangle + 2\pi i \langle m + \alpha, u + \beta \rangle \}, \\ \Theta[0; 0](u|B) &\equiv \Theta(u|B) \equiv \Theta(u), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $u \in \mathbb{C}^g$, суммирование ведется по целочисленной g -мерной решетке, а угловые скобки $\langle, \rangle$ обозначают евклидово скалярное произведение.

Определим на Γ нормированные абелевы интегралы второго рода $\Omega_j(P)$, $P \in \Gamma$, с единственными полюсами в выделенной точке $\mathcal{P}_\infty$:

$$\begin{aligned} \Omega_j(P) &= \xi^{-j} + c_j \xi + O(\xi^2), \quad P \rightarrow \mathcal{P}_\infty, \\ \oint_{a_k} d\Omega_j &= 0, \quad k = 1, \dots, g, \end{aligned} \quad (1.2)$$

ξ — локальный параметр в окрестности точки $\mathcal{P}_\infty$.

Пусть функция $\Psi(P, x, t_1, \dots, t_N)$ удовлетворяет следующим условиям (аксиомам Бейкера–Ахиезера):

1) $\Psi(P, x, t_1, \dots, t_N)$ есть однозначная функция от точки P римановой поверхности Γ , мероморфная на Γ , за исключением точки $\mathcal{P}_\infty$, и имеющая g простых полюсов в точках $\mathcal{P}_j$, которые образуют дивизор общего положения;

2) $\Psi(P, 0, 0, \dots, 0) = 1$;

3) в точке $\mathcal{P}_\infty$ функция $\Psi(P, x, t_1, \dots, t_N)$ имеет существенную особенность вида

$$\begin{aligned} \Psi(P, x, t_1, \dots, t_N) &\sim \exp \left\{ \xi^{-1} x + \sum_{i=1}^N \xi^{-i-1} t_i \right\} \times \\ &\times \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x, t_1, \dots, t_N) \xi^m \right), \quad P \rightarrow \mathcal{P}_\infty. \end{aligned}$$

Тогда она этими условиями определяется однозначно и может быть построена по формуле

$$\begin{aligned} \Psi(P, x, t_1, \dots, t_N) &= \exp \{ \Phi(x, t_1, \dots, t_N) \} \times \\ &\times \frac{\Theta(\mathcal{U}(P) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty) + \varphi(x, t_1, \dots, t_N) + \Delta) \Theta(\Delta)}{\Theta(\mathcal{U}(P) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty) + \Delta) \Theta(\varphi(x, t_1, \dots, t_N) + \Delta)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(x, t_1, \dots, t_N) &= \Omega_1(P)x + \sum_{i=1}^N \Omega_{i+1}(P)t_i, \\ \varphi(x, t_1, \dots, t_N) &= Ux + \sum_{i=1}^N V_i t_i, \quad \Delta = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty) - \mathcal{K} - \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}_j),\end{aligned}$$

$2\pi i U, 2\pi i V_i$ – векторы b -периодов абелевых интегралов $\Omega_1(P), \Omega_{i+1}(P)$, соответственно; $\mathcal{K}$ – вектор римановых констант [33–35].

ТЕОРЕМА 1 [32, 33]. *Функция $\Psi(P, x, t_1, \dots, t_N)$ является решением системы линейных дифференциальных уравнений*

$$\partial_{t_j} \psi = \partial_x^{j+1} \psi - \sum_{m=1}^j u_{jm}(x, t_1, \dots, t_N) \partial_x^{j-m} \psi, \quad (1.3)$$

где $u_{jm}(x, t_1, \dots, t_N)$ – функции, зависящие от $x, t_1, \dots, t_N$ и не зависящие от P .

В частности, если $N = 3$, то (при $y \equiv t_1, t \equiv t_2, z \equiv t_3$)

$$\partial_y \psi = \partial_x^2 \psi - u \psi, \quad (1.3a)$$

$$\partial_t \psi = \partial_x^3 \psi - \frac{3}{2} u \partial_x \psi - \left(\frac{3}{4} u_x + w \right) \psi, \quad (1.3b)$$

$$\begin{aligned}\partial_z \psi &= \partial_x^4 \psi - 2u \partial_x^2 \psi - \left(2u_x + \frac{4}{3} w \right) \partial_x \psi - \\ &\quad - \left(\frac{5}{6} u_{xx} - \frac{1}{2} u^2 + \frac{2}{3} w_x + v \right) \psi,\end{aligned} \quad (1.3b)$$

где

$$u(x, y, t, z) = -2\partial_x^2 \ln \Theta(Ux + V_1 y + V_2 t + V_3 z + \Delta) + 2c_1, \quad (1.4a)$$

$$w(x, y, t, z) = -\frac{3}{2} \partial_x \partial_y \ln \Theta(Ux + V_1 y + V_2 t + V_3 z + \Delta) + \frac{3}{2} c_2, \quad (1.4b)$$

$$v(x, y, t, z) = -\frac{4}{3} \partial_x \partial_t \ln \Theta(Ux + V_1 y + V_2 t + V_3 z + \Delta) + \frac{4}{3} c_3. \quad (1.4b)$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [32, 33]. *Условием совместности уравнений (1.3a) и (1.3b) является уравнение КП*

$$\begin{cases} u_y = \frac{4}{3} w_x, \\ u_t = w_y + \frac{1}{4} u_{xxx} - \frac{3}{2} u u_x. \end{cases} \quad (1.5)$$

Условиями совместности уравнений (1.3а), (1.3в) и (1.3б), (1.3в) являются “высшие” уравнения КП:

$$\begin{cases} u_y = \frac{4}{3}w_x, \\ w_y = \frac{3}{2}v_x + \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}, \\ u_z = v_y + \frac{4}{9}w_{xxx} - \frac{4}{3}wu_x - \frac{4}{3}uw_x, \end{cases} \quad (1.6a)$$

$$\begin{cases} u_t = \frac{3}{2}v_x, \\ u_z = \frac{8}{9}w_t + \frac{4}{9}w_{xxx} - \frac{4}{3}wu_x - \frac{4}{3}uw_x, \\ w_z = v_t + \frac{1}{4}v_{xxx} - \frac{4}{3}ww_x + \frac{3}{2}u_xu_{xx} + \\ + \frac{3}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x - \frac{1}{12}u_{xxxx}. \end{cases} \quad (1.6b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [33, 35]. Пусть Γ — гиперэллиптическая поверхность и пусть точка $\mathcal{P}_\infty$ является точкой ветвления этой поверхности. Тогда на Γ существует мероморфная функция $E(P)$ с единственным полюсом второго порядка в точке $\mathcal{P}_\infty$. Если мы теперь выберем в качестве локального параметра в ее окрестности величину $\xi = [E(P)]^{-1/2}$, то в этом случае решение уравнения КП (1.5) не будет зависеть от y :

$$\Omega_2(P) = E(P), \quad V_1 = 0.$$

Иначе говоря, функция $u(x, t, z)$ (1.4а) при любом значении параметра z будет решением уравнения КдФ

$$4u_t - u_{xxx} + 6uu_x = 0,$$

а функция $\Psi(P, x, t, z)$ будет собственной функцией оператора Шредингера (см. (1.3а))

$$\partial_x^2 \psi - u\psi = E\psi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 [33, 24–26]. Если же на РП Γ существует мероморфная функция $E(P)$ с единственным полюсом третьего порядка в точке $\mathcal{P}_\infty$, то, выбрав в качестве локального параметра в ее окрестности величину $\xi = [E(P)]^{-1/3}$, мы добьемся независимости решения уравнения КП от t :

$$\Omega_3(P) = E(P), \quad V_2 = 0.$$

При этом функция $u(x, y, z)$ при любом значении параметра z будет решением уравнения Буссинеска

$$3u_{yy} + (u_{xxx} - 6uu_x)_x = 0, \quad (1.7)$$

а функция $\Psi(P, x, y, z)$ будет собственной функцией оператора третьего порядка:

$$\partial_x^3 \psi - \frac{3}{2}u\partial_x \psi - \left(\frac{3}{4}u_x + w\right)\psi = E\psi. \quad (1.8)$$

Это возможно только в двух случаях:

- а) когда РП Γ имеет род $g = 2$ и точка $\mathcal{P}_\infty$ не является точкой Вейерштрасса [36–38];
- б) когда РП Γ негиперэллиптическая, а точка $\mathcal{P}_\infty$ является точкой Вейерштрасса, допускающей существование вышеупомянутой мероморфной функции $E(P)$.

2. КРИВЫЕ КРИЧЕВЕРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА. СЛУЧАЙ $g_2 = 0$

Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma = \{(k, \alpha)\}$ рода g , n -листно ($n \geq 2$) накрывающую эквиангармоническую эллиптическую кривую Γ'_0 :

$$\Gamma'_0: \{\wp'(\alpha)\}^2 = 4\wp^3(\alpha) - g_3 \equiv 4 \prod_{j=1}^3 (\wp(\alpha) - e_j), \quad (2.1)$$

и удовлетворяющую следующим требованиям:

1)

$$\Gamma: \mathcal{R}(k, \alpha) \equiv k^n + \sum_{j=2}^n r_j(\alpha) k^{n-j} = 0, \quad (2.2)$$

где $r_j(\alpha)$ — эллиптические функции от $\alpha \in \Gamma'_0$ с полюсами в точках $\alpha = 0$;

2) в окрестности $\alpha = 0$ функция $\mathcal{R}(k, \alpha)$ представима в виде

$$\mathcal{R}(k, \alpha) = \left(k - \frac{n-1}{\alpha} + b_n(\alpha)\right) \prod_{j=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{\alpha} + b_j(\alpha)\right); \quad (2.3)$$

3) на Γ существует голоморфный автоморфизм третьего порядка ($\varepsilon = \exp\{2\pi i/3\}$):

$$\tau: (k, \alpha) \rightarrow (\varepsilon^2 k, \varepsilon \alpha), \quad (2.4)$$

имеющий $g+2$ неподвижные точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из п. 3, 2 следует, что выделенная точка $\mathcal{P}_\infty$ неподвижна относительно автоморфизма τ , переставляющего листы $\Gamma = \{(\chi, E)\}$:

$$\chi^3 = \prod_{j=1}^{g+1} (E - E_j)^{m_j}, \quad \tau: (\chi, E) \rightarrow (\varepsilon \chi, E), \quad (2.5)$$

$$m_j \in \{1; 2\}, \quad \sum_{j=1}^{g+1} m_j \not\equiv 0 \pmod{3},$$

и что функция E является мероморфной функцией с единственным полюсом третьего порядка в точке $\mathcal{P}_\infty = (\infty, \infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Используя формулу Римана–Гурвица [35, 12], нетрудно получить, что род g поверхности Γ (2.1)–(2.4) равен $p+1$, где $2p$ — число нулей функции $\partial_k \mathcal{R}(k, \alpha)$, не лежащих “над” $\alpha = 0$ и отличных от нулей функции $\partial_\alpha \mathcal{R}(k, \alpha)$ (с учетом кратности).

ТЕОРЕМА 2. Решение $u(x, y, z)$ уравнения Буссинеска (1.7), построенное по римановой поверхности Γ_g^n (2.1)–(2.4) и отмеченной точке $\mathcal{P}_\infty$, является эллиптической функцией по x :

$$u(x, y, z) = 2 \sum_{j=1}^n \wp(x - x_j(y, z)) + \text{const}, \quad (2.6)$$

где $\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами накрываемой поверхности (2.1), $x_j(y, z)$ — нули тэта-функции $\Theta(Ux + V_1y + V_3z + \Delta|B)$ как функции от переменной x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве мероморфной функции $E(P)$ функцию, инвариантную относительно автоморфизма τ (2.4) и имеющую единственный полюс третьего порядка в точке $\mathcal{P}_\infty$ вида

$$E(P) = -\frac{n^3}{\alpha^3} + \kappa + O(\alpha^3) \equiv \xi^{-3} + O(\xi^3), \quad P \rightarrow \mathcal{P}_\infty. \quad (2.7)$$

Из (2.7) вытекает, что нормированный абелев дифференциал второго рода $d\Omega_1$ будет иметь следующую асимптотику в окрестности точки $\mathcal{P}_\infty$:

$$d\Omega_1 = \left(-\frac{1}{\xi^2} + c_1 + O(\xi) \right) d\xi = \left(\frac{n}{\alpha^2} - \frac{c_1}{n} + O(\alpha) \right) d\alpha. \quad (2.8)$$

Применяя теорему Лиувилля, нетрудно показать, что нормированные абелевы дифференциалы второго рода $d\Omega_1$ и

$$d\Omega^0 = (\wp(\alpha) + \eta/\omega) d\alpha, \quad (2.9)$$

определенные на Γ и Γ'_0 , соответственно, связаны соотношением

$$\sigma^* d\Omega^0 \equiv d\Omega_1 + dk \quad (2.10)$$

с точностью до голоморфных дифференциалов. Здесь σ – накрывающее отображение, $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma'_0$, $\sigma(k, \alpha) = \alpha$; $2\omega, 2\omega'$ – периоды тора (2.1); $\eta = \zeta(\omega)$, $\zeta(\alpha)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса.

Теперь легко видеть, что утверждение теоремы 2 является следствием теоремы о редукции многомерной тэта-функции, накрывающей эллиптическую [18, 14, 20, 21], равенства (2.10) и формул связи эллиптических функций Вейерштрасса с одномерными тэта-функциями [39]. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из теоремы о редукции многомерной тэта-функции, накрывающей эллиптическую, и формул связи эллиптических функций Вейерштрасса с одномерными тэта-функциями также следует, что $(\dot{x}_j \equiv \partial_y x_j(y, z))$

$$w(x, y, z) = -\frac{3}{2} \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \wp(x - x_j) + \text{const}_1, \quad \sum_{j=1}^n \ddot{x}_j = 0. \quad (2.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6 [1, 2]. Полюсы $x_j(y)$ функций $u(x, y)$ и $w(x, y)$ удовлетворяют динамике интегрируемой системы частиц Калоджеро–Мозера

$$\ddot{x}_j = 4 \sum_{k \neq j} \wp'(x_j - x_k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Постоянная c_1 в формулах (1.2), (1.4а), (2.8) зависит от выбора базиса циклов на Γ . В частности, если при автоморфизме τ (2.4) a -циклы переходят в a -циклы, то $c_1 = 0$.

3. ПРИМЕР 1. ДВУХЗОННОЕ РЕШЕНИЕ

Самое простое двухзонное эллиптическое решение уравнения Буссинеска может быть построено по четырехлистному накрытию Γ_2^4 :

$$k^4 - 6\wp(\alpha)k^2 + 4(\wp'(\alpha) + h)k - 3\wp^2(\alpha) = 0, \quad (3.1)$$

где h – вспомогательный параметр, $g_2 = 0$, $g_3 = -h^2$.

Уравнение

$$\chi^3 = (E - 5h)^2(E^2 + 10hE - 83h^2) \quad (3.2)$$

описывает РП Γ_2^4 как трехлистное накрытие над сферой.

Связь между различными представлениями РП Γ_2^4 осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \wp(\alpha) &= \frac{(E - 5h)(E^2 + 10hE - 83h^2)(E - 13h)}{16\chi(E - 4h)^2}, \\ \wp'(\alpha) &= \frac{(E^2 + 10hE - 83h^2)^2}{32(E - 4h)^3} - h = \frac{(E - 5h)(E - 13h)^3}{32(E - 4h)^3} + h, \\ E &= \frac{(k^3 - 3\wp(\alpha)k + \wp'(\alpha) + h)^2}{2(\wp'(\alpha) + h)} + 4h, \quad k = -\frac{3\chi}{4(E - 4h)}. \end{aligned}$$

Накрытие (2.1), (3.1) соответствует редукции ненормированного голоморфного дифференциала

$$\sigma^*d\alpha = \frac{4dE}{3\chi} \quad (3.3)$$

и ненормированного абелева дифференциала второго рода с единственным полюсом в точке $\mathcal{P}_\infty$

$$d\Omega_1 = \wp(\alpha) d\alpha - dk = \frac{(E - h)(E - 5h)dE}{3\chi^2}. \quad (3.4)$$

Поскольку поверхность Γ_2^4 имеет род $g = 2$, она является гиперэллиптической и, следовательно, может быть представлена в виде двулистного накрытия сферы $\Gamma_2^4 = \{(\mu, \lambda)\}$:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \lambda^6 - 40h\lambda^3 + 432h^2, \\ \mu &= \frac{E^2 - 10hE + 33h^2}{E - 5h}, \quad \lambda = \frac{\chi}{E - 5h}, \\ \frac{\lambda d\lambda}{\mu} &= \frac{dE}{3\chi}, \quad \frac{d\lambda}{\mu} = \frac{(E - 5h)dE}{3\chi^2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что на Γ_2^4 существует мероморфная функция $\chi(P)$ с единственным полюсом четвертого порядка в точке $\mathcal{P}_\infty$ вида

$$\chi = \xi^{-4} + O(\xi^2),$$

и, следовательно,

$$\Omega_4(P) = \chi(P), \quad V_3 = 0,$$

функции $u(x, y)$ и $w(x, y)$ не зависят от параметра z и удовлетворяют “стационарным” высшим уравнениям КП (см. (1.6))

$$\begin{cases} w_{xxx} = 3(wu)_x, \\ ww_x = \frac{9}{8}u_x u_{xx} + \frac{9}{16}u u_{xxx} - \frac{9}{8}u^2 u_x - \frac{1}{16}u_{xxxx}, \end{cases} \quad (3.5)$$

а ψ -функция является собственной функцией оператора четвертого порядка с эллиптическими потенциалами

$$\partial_x^4 \psi - 2u \partial_x^2 \psi - \left(2u_x + \frac{4}{3}w\right) \partial_x \psi - \left(\frac{5}{6}u_{xx} - \frac{1}{2}u^2 + \frac{2}{3}w_x\right) \psi = \chi \psi.$$

4. ПРИМЕР 2. ТРЕХЗОННОЕ РЕШЕНИЕ

Накрытие $\Gamma_3^5 = \{(k, \alpha)\}$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} k^5 - 10\wp(\alpha)k^3 + 10(\wp'(\alpha) + h)k^2 - \\ - 15\wp^2(\alpha)k + 2\wp(\alpha)(\wp'(\alpha) - 5h) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где h – вспомогательный параметр, $g_2 = 0$, $g_3 = -25h^2$.

Эта поверхность имеет род $g = 3$ и может быть записана в виде

$$\chi^3 = (E - 35h)^2(E + 45h)(E^2 + 25hE - 1700h^2). \quad (4.2)$$

Связь между различными представлениями РП Γ_3^5 осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \wp'(\alpha) &= \frac{2(E - 115h)^3(E^2 + 25hE - 1700h^2)}{125(E - 19h)^3(E + 45h)} + 5h = \\ &= \frac{2(E + 125h)^3(E - 35h)^2}{125(E - 19h)^3(E + 45h)} - 5h, \\ \wp(\alpha) &= \frac{(E - 115h)(E + 125h)\chi}{25(E - 19h)^2(E + 45h)}, \quad E = -\frac{4}{5k}\partial_k \mathcal{R}(k, \alpha) - 29h, \\ k &= -\frac{4(E - 35h)(E^2 + 25hE - 1700h^2)}{5(E - 19h)\chi}. \end{aligned}$$

Накрытие (2.1), (4.1) соответствует редукции ненормированного голоморфного дифференциала

$$\sigma^* d\alpha = \frac{5(E + 29h)(E - 35h)dE}{3\chi^2} \quad (4.3)$$

и ненормированного абелева дифференциала второго рода с единственным полюсом в точке $\mathcal{P}_\infty$

$$d\Omega_1 = \wp(\alpha) d\alpha - dk = \frac{(E - 15h)dE}{3\chi}. \quad (4.4)$$

Поскольку $\chi(P)$ – мероморфная функция с единственным полюсом пятого порядка в точке $\mathcal{P}_\infty$ вида

$$\chi = \xi^{-5} + O(\xi),$$

то

$$\Omega_5(P) = \chi(P), \quad V_4 = 0,$$

функции $u(x, y)$ и $w(x, y)$ удовлетворяют “стационарным” уравнениям КП более высокого порядка, чем (3.5), а ψ -функция является собственной функцией оператора пятого порядка с эллиптическими потенциалами.

Автор благодарит В.Б.Матвеева, М.А.Салля и В.З.Энольского за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95–01–00686).

Список литературы

- [1] *H. Airault, H.P. McKean, J. Moser.* Comm. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 95–148.
- [2] *И.М. Кривчевер.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. Вып. 4. С. 45–54.
- [3] *А.Р. Итс, В.З. Энольский.* Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. Вып. 1. С. 73–74.
- [4] *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков.* ЖЭТФ. 1974. Т. 67. Вып. 12. С. 2131–2143.
- [5] *В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [6] *Е.Д. Белоколов, А.И. Бобенко, В.Б. Матвеев, В.З. Энольский.* УМН. 1986. Т. 41. Вып. 2. С. 3–42.
- [7] *J.-L. Verdier.* In: Algebraic Analysis. Vol. II (Micio Sato Sixtieth Birthday Vol.). Academic Press, 1988. P. 901–910.
- [8] *A. Treibich.* Duke Math. J. 1989. V. 59. № 3. P. 611–627.
- [9] *A. Treibich, J.-L. Verdier.* Solitons elliptiques. Volume en l'honneur du 60^e anniversaire du prof. A. Grothendieck. Boston: Birkhäuser, 1990.
- [10] *Е.Д. Белоколов, В.З. Энольский.* УМН. 1989. Т. 44. Вып. 5. С. 155–156.
- [11] *Е.Д. Белоколов, В.З. Энольский.* Функц. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. Вып. 1. С. 57–58.
- [12] *А.О. Смирнов.* Мат. заметки. 1989. Т. 45. Вып. 6. С. 66–73.
- [13] *E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its, V.B. Matveev.* Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations. Springer Ser. Nonlinear Dynamics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1994.
- [14] *A.O. Smirnov.* Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 125–166.
- [15] *V.Z. Enol'skii, N.A. Kostov.* Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 57–86.
- [16] *E.D. Belokolos, V.Z. Enol'skii.* Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 87–117.
- [17] *А.И. Бобенко.* Функц. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. Вып. 3. С. 74–75.
- [18] *А.О. Смирнов.* Мат. заметки. 1989. Т. 46. Вып. 5. С. 100–102.
- [19] *А.О. Смирнов.* Мат. сборник. 1990. Т. 181. Вып. 6. С. 804–812.
- [20] *А.О. Смирнов.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 183–198.
- [21] *А.О. Смирнов.* Мат. сборник. 1994. Т. 185. Вып. 8. С. 103–114.
- [22] *А.О. Смирнов.* Мат. заметки. 1995. Т. 58. Вып. 1. С. 86–97.
- [23] *А.О. Смирнов.* Мат. сборник. 1995. Т. 186. Вып. 8. С. 134–141.
- [24] *В.Б. Матвеев, А.О. Смирнов.* ДАН СССР. 1987. Т. 293. Вып. 1. С. 78–82.
- [25] *В.Б. Матвеев, А.О. Смирнов.* В кн.: Распространение волн. Теория рассеяния (Проблемы математической физики, вып. 12). Л.: ЛГУ, 1987. С. 225–236.
- [26] *V.B. Matveev, A.O. Smirnov.* Lett. in Math. Phys. 1987. V. 14. P. 25–31.
- [27] *G.H. Halphen.* Mem. pres. l'Acad. de Sci. de France. 1884. V. 28. P. 1–300.
- [28] *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.

- [29] *V.P. Gerdt, N.A. Kostov.* In: Computers and Mathematics. Eds E.Kaltofen, S.M.Watt. Berlin–Heidelberg: Springer, 1989. P. 277–283.
- [30] *J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 3. P. 1192–1201.
- [31] *Yu.V. Brezhnev.* Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 94–100.
- [32] *И.М. Кривчер.* ДАН СССР. 1976. Т. 227. Вып. 2. С. 291–294.
- [33] *И.М. Кривчер.* УМН. 1977. Т. 32. Вып. 6. С. 180–208.
- [34] *Э.И. Зверович.* УМН. 1971. Т. 26. Вып. 1. С. 113–179.
- [35] *V.B. Matveev.* Abelian functions and solitons: Preprint № 373. Univ. of Wrocław, 1976.
- [36] *A. Hurwitz.* Math. Ann. 1893. V. 41. P. 403–442.
- [37] *F.K. Schmidt.* Math. Zeit. 1938. V. 45. P. 75–96.
- [38] *В.В. Сильвестров, Л.И. Чубрикова.* Изв. вузов. Математика. 1979. № 12. С. 51–56.
- [39] *Н.И. Ахиезер.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 17.IV.1996 г.

A. O. Smirnov
ON SOME SET OF ELLIPTIC SOLUTIONS
OF THE BOUSSINESQ EQUATION

An ansatz concerning Krichever curves is considered for two-periodic finite-gap solutions of the Boussinesq equation. These solutions are expressed in terms of equianharmonic elliptic Weierstrass $\wp$ -functions. Examples are given.