Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Пассаре, А. К. Цих, А. А. Чешель, Кратные интегралы Меллина–Барнса как периоды многообразий Калаби–Яу с несколькими модулями, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 3, 381–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:14:19

М. Пассаре*, А. К. Цих†, А. А. Чешель†
**КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
МЕЛЛИНА–БАРНСА КАК ПЕРИОДЫ
МНОГООБРАЗИЙ КАЛАБИ–ЯУ
С НЕСКОЛЬКИМИ МОДУЛЯМИ**

В теории компактификации суперструн дается представление периодов на многообразиях Калаби–Яу с несколькими модулями в виде кратных интегралов Меллина–Барнса. С помощью этого представления и теории многомерных вычетов излагается метод аналитического продолжения фундаментального периода в терминах рядов Горна.

Суперструнный вакуум с $(2, 2)$ -суперсимметрией на мировом листе, а также вакуум теории Ландау–Гинзбурга определяются специальной геометрией пространства модулей многообразий Калаби–Яу и соответствующих орбифолдов. При этом модули деформаций комплексной структуры и кэлеровой метрики образуют два сектора в пространстве модулей и находятся во взаимнооднозначном соответствии с 27 и $\overline{27}$ мультиплетами полей материи, заряженной по группе E_6 в низкоэнергетическом пределе теории.

Благодаря зеркальной симметрии многообразий Калаби–Яу сектор модулей деформаций кэлеровой метрики идентифицируется с сектором модулей деформаций комплексных структур соответствующего зеркального многообразия [1]. Динамика полей в низкоэнергетическом пределе теории зависит от геометрии пространства модулей, а кинетический член и юкавские константы связи полей определяются голоморфным объектом на многообразии M — голоморфной $(3, 0)$ -формой Ω , или более точно, вектором периодов формы Ω по базису группы гомологий соответствующих циклов на M с компонентами

$$\varpi_j = \int_{\gamma_j} \Omega,$$

где γ_j — базисные циклы группы гомологий. Зеркальная симметрия позволяет изучить юкавские константы связи полей как $(2, 1)$ -формы многообразия M , вычисляя соответствующие периоды $(1, 1)$ -форм многообразия W — зеркального партнера M .

Идея зеркальной симметрии в теории компактификаций суперструн интенсивно развивалась в работах [1–11]. В частности, она эффективно использовалась при исследовании периодов на многообразиях Калаби–Яу.

*Стокгольмский университет, Математический институт

†Красноярский государственный университет

В работе [2] для широкого класса гиперповерхностей Калаби–Яу (произвольной размерности $N - 1$) во взвешенном проективном пространстве вычислен фундаментальный период голоморфной $(N - 1)$ -формы Ω . Как функция на пространстве модулей этот период является гипергеометрической функцией, а именно представляется рядом Горна (см. раздел 1), сходящимся для больших значений выделенного модуля φ_0 . При этом возникает важная задача аналитического продолжения периода в область малых значений модуля φ_0 , поскольку реализация аналитического продолжения позволяет вычислить и остальные периоды формы Ω . В [2–5] искусственным методом повторного суммирования рядов Горна удалось осуществить аналитическое продолжение для некоторых примеров гиперповерхностей с двумя модулями.

В настоящей статье предлагается общий метод аналитического продолжения периодов, зависящих от двух и более модулей. Этот метод основан на представлении периода кратным интегралом Меллина–Барнса (МБ) (см. раздел 3). В свою очередь, интеграл МБ вычисляется в виде ряда многомерных вычетов Гротендика. Это вычисление основано на методе разделяющих циклов, развитом одним из авторов [12, 13].

Идея этого метода состоит в том, что плоскость интегрирования является остовом (острием) множества полиэдров, и любой выбор согласованного с формой Ω полиэдра дает свою формулу вычетов для интеграла МБ (первую реализацию этой идеи в виде многомерной леммы Жордана о вычетах см. в [14]). Тем самым разные формулы вычетов дают аналитическое продолжение интеграла МБ, следовательно, первоначального периода. Исследование периода можно отразить в виде следующей 3-шаговой схемы:

$$\{ \text{период} \} \rightarrow \{ \text{ряд Горна} \} \rightarrow \{ \text{интеграл МБ} \} \rightarrow \{ \text{новый ряд Горна} \}.$$

При реализации второго и третьего шагов этой схемы используется простой язык комбинаторной геометрии, связанный со взаимным расположением полярных гиперплоскостей гамма-функций, участвующих в конструкции рядов Горна и интегралов МБ.

1. ПЕРИОДЫ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ КАЛАБИ–ЯУ ВО ВЗВЕШЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Взвешенное N -мерное проективное пространство определяется набором $N + 1$ натуральных чисел (весов) $k = (k_0, k_1, \dots, k_N)$. А именно, в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^{N+1}$ на множестве ненулевых векторов $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ рассматривается отношение эквивалентности

$$x_i \sim \lambda^{k_i} x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

где λ – некоторое ненулевое комплексное число. Фактор-пространство $\mathbb{C}^{N+1}/\{0\}$ по указанному отношению эквивалентности и есть взвешенное проективное пространство размерности N и веса $k_0, k_1, \dots, k_N$, которое обозначается $\mathbb{P}_{(k_0, k_1, \dots, k_N)}^N = \mathbb{P}_k^N$. Гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_k^N$ определяется как нулевое множество

$$M = \{x: P_0(x) = 0\} \tag{1.1}$$

взвешенно-однородного многочлена (суперпотенциала) $P_0(x)$ веса k . Это означает, что

$$P_0(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_N} c_{\alpha_0, \dots, \alpha_N} x_0^{\alpha_0} \dots x_N^{\alpha_N},$$

причем каждый моном $c_\alpha x^\alpha$ имеет одну и ту же взвешенную степень $d = k_0 \alpha_0 + \dots + k_N \alpha_N$. Нас будут интересовать гладкие гиперповерхности, характеризующиеся тем, что многочлен P_0 и его градиент dP_0 не имеют совместных нулей в $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$. Кроме того, будем предполагать выполненным условие

$$d = \sum_{i=0}^N k_i, \quad (1.2)$$

т.е. степень гиперповерхности должна совпадать с суммой компонент веса k . Условие (1.2) гарантирует, что гиперповерхность (1.1) является многообразием Калаби–Яу: первый класс Черна M тривиальный, и на M нет нетривиальных голоморфных дифференциальных форм степеней $p = 1, 2, \dots, N-2$. Далее в суперструнной теории рассматривается деформация многообразия M посредством семейства многочленов

$$P_\varphi(x) = P_0(x) - \varphi_0 x_0 x_1 \dots x_N + \sum_{\beta \in B} \varphi_\beta x^\beta.$$

Добавляемые к $P_0(x)$ стандартный моном $x_0 x_1 \dots x_N$ и мономы $x^\beta, \beta \in B$, выбираются так, что их коэффициенты φ_0 и $\{\varphi_\beta\}$ параметризуют комплексные структуры многообразия M ; поэтому эти коэффициенты называются модулями, а пространство векторов $\varphi = \{\varphi_0, \{\varphi_\beta\}\}$ – пространством модулей. При описании указанных комплексных структур важную роль играет следующая голоморфная дифференциальная $(N-1)$ -форма:

$$\Omega = \Omega(\varphi) = \text{Res}_{M_\varphi} \left[\frac{\mu}{P_\varphi(x)} \right], \quad (1.3)$$

где вычет Res берется относительно деформированного подмногообразия

$$M_\varphi = \{x: P_\varphi(x) = 0\},$$

на котором мероморфная форма $\mu/P_\varphi(x)$ имеет полюс [15]. Для того чтобы дробь $\mu/P_\varphi(x)$, записанная в однородных координатах $x = (x_0, x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$, была корректно определенной дифференциальной формой на взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_k^N$, в частности была инвариантной относительно эквивалентности $x_i \sim \lambda^{k_i} x_i$, необходимо, чтобы μ имело вид

$$\mu = \sum_{i=0}^N (-1)^{i+1} k_i x_i dx_0 \dots [i] \dots dx_N,$$

где $[i]$ – знак пропуска. Поскольку форма Ω определяется как вычет мероморфной формы, то по формуле вычета Лере [15, п. 21] всякий период формы Ω определяется некоторым N -мерным интегралом формы $\mu/P_\varphi(x)$ по N -мерному циклу в $\mathbb{P}_k^N \setminus M_\varphi$. В свою очередь, каждый такой интеграл сводится к $(N+1)$ -мерному интегралу в аффинном пространстве $\mathbb{C}^{N+1}$ рациональной формы $dx/P_\varphi(x)$, где $dx = dx_0 dx_1 \dots dx_N$ [12, §20.1]. В работе [16] было показано, что если знаменатель рациональной формы $dx/Q(x)$ имеет фиксированные коэффициенты, то каждая вершина многогранника Ньютона многочлена Q , не лежащая в координатной плоскости, определяет вычет этой формы, причем

совокупность таких вычетов линейно независима. В нашем случае часть мономов знаменателя $P_\varphi(x)$ имеет переменные коэффициенты φ_α , и в этом случае каждому моному $\varphi_\beta x^\beta$, для которого β не лежит в координатной плоскости, можно сопоставить вычет, предположив, что коэффициент φ_β выделенного монома гораздо больше всех остальных коэффициентов по модулю. Среди мономов с переменными коэффициентами (участвующими в деформации многочлена P_0) специально выделен моном $\varphi_0 x_0 \dots x_N$, соответствующий в каком-то смысле центру многогранника Ньютона для P_0 . Оказывается, что соответствующий этому моному вычет может быть вычислен разложением подынтегрального выражения в ряд Лорана, этот вычет называется фундаментальным периодом формы Ω . Вот его точное определение [2]:

$$\varpi_0(\varphi) = -\frac{\varphi_0}{(2\pi i)^{N+1}} \int_\gamma \frac{dx_0 \dots dx_N}{P_\varphi(x)}, \quad |\varphi_0| \gg 1, \quad (1.4)$$

где контур γ представляет собой декартово произведение $N+1$ окружностей $|x_i| = 1$, $i = 0, 1, \dots, N$. Коэффициент при интеграле выбран для удобства записи результата вычисления интеграла.

Пронумеруем мономы стационарной части P_0 многочлена P_φ в виде $c_i x^{\alpha^i}$, а мономы варьированной части (исключая $\varphi_0 x_0 \dots x_N$) — в виде $\varphi_j x^{\beta^j}$. Вычисление показывает (ср. с [2, формула (2.21)], где $c_i = 1$), что

$$\varpi_0(\varphi) = \sum_{(n_i, m_j, r) \in L} \frac{\Gamma(r+1)}{\prod_i \Gamma(n_i+1) \prod_j \Gamma(m_j+1)} \frac{\prod_i c_i^{n_i} \prod_j \varphi_j^{m_j}}{\varphi_0^r}, \quad (1.5)$$

где суммирование ведется по подрешетке L целочисленной решетки переменных n_i, m_j, r , определенной системой $N+2$ линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_k^i n_i + \sum_j \beta_k^j m_j - r &= 0, \quad k = 0, \dots, N, \\ \sum_i n_i + \sum_j m_j - r &= 0, \end{aligned}$$

здесь α_k^i, β_k^j — координаты векторов α^i, β^j решетки $\mathbb{Z}^{N+1}$. Ряд Лорана вида (1.5) в многомерной теории гипергеометрических функций называется Γ -рядом (см. [17]). Существует стандартная процедура перехода от Γ -рядов к рядам Горна путем выбора базиса подрешетки L . Ряд Горна представляет собой степенной ряд, коэффициенты которого имеют специальный вид: они являются отношением произведений значений гамма-функции в аргументах, линейно зависящих от переменных суммирования. В большинстве моделей гиперповерхностей Калаби–Яу число мономов полинома P_0 равно $N+1$ — числу переменных, поэтому в таких случаях коэффициенты c_i можно отнести к переменным, т.е. считать $c_i = 1$. В результате выбора базиса подрешетки L ряд (1.5) сведется к степенному ряду Горна

$$\varpi_0(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\Gamma(\langle a, m \rangle + 1)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(\langle a^k, m \rangle + 1)} t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}, \quad (1.6)$$

где n – размерность пространства модулей (т.е. число коэффициентов $\{\varphi_0, \varphi_j\}$), векторы $a, a^k \in \mathbb{R}^n$ определяются по показателям α^i, β^j , а переменные t_i мономияльно зависят от φ_0, φ_j . При этом выполняется соотношение (баланс весов)

$$a = \sum_{k=1}^q a^k. \quad (1.7)$$

Для иллюстрации сказанного, а также дальнейших результатов настоящей статьи рассмотрим следующий пример, заимствованный из [2]. Рассмотрим многочлен

$$P_0 = x_0^7 + x_1^7 x_3 + x_3^3 + x_2^7 x_4 + x_4^3, \quad (1.8)$$

определяющий во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(3,2,2,7,7)}^4$ гиперповерхность Калаби–Яу степени 21. С этой гиперповерхностью связывается 2-параметрическое семейство многообразий

$$M_\varphi = \{x_0^7 + x_1^7 x_3 + x_3^3 + x_2^7 x_4 + x_4^3 - \varphi_0 x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 + \varphi_1 x_0 x_1^3 x_2^6 = 0\},$$

характеризующее комплексные структуры на гиперповерхности $P_0 = 0$. Фундаментальный период гиперповерхности представляется рядом Горна (см. [2, формула (4.19)])

$$\sum_{m_1, m_2 \geq 0} \frac{\Gamma(7m_1 + 3m_2 + 1)}{\Gamma^2(m_1 + 1) \Gamma^2(2m_1 + m_2 + 1) m_1! m_2!} t_1^{m_1} t_2^{m_2}, \quad (1.9)$$

где $t_1 = \varphi_0^{-7}$, $t_2 = \varphi_1/\varphi_0^3$, а факториалы $m_i! = \Gamma(m_i + 1)$ выделены для удобства оперирования с рядом.

2. ИНТЕГРАЛЫ МЕЛЛИНА–БАРНСА И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЯДАМИ ГОРНА

Под n -мерным интегралом МБ мы понимаем интеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(\langle a^j, z \rangle + b_j)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(\langle c^k, z \rangle + d_k)} (-t_1)^{-z_1} \dots (-t_n)^{-z_n} dz, \quad (2.1)$$

где a^j, c^k – векторы из вещественного пространства $\mathbb{R}^n$, числа b_j, d_k также вещественные, а вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ выбран так, что вещественно n -мерное множество интегрирования

$$\gamma + i\mathbb{R}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : z_1 = \gamma_1 + iy_1, \dots, z_n = \gamma_n + iy_n\}$$

не пересекает полярные гиперплоскости

$$\langle a^j, z \rangle + b_j = -\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, p;$$

наконец, $dz = dz_1 \dots dz_n$. В одномерном случае интеграл (2.1) превращается в следующий:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\prod_j \Gamma(a_j z + b_j)}{\prod_k \Gamma(c_k z + d_k)} (-t)^{-z} dz. \quad (2.2)$$

Интеграл вида (2.1) был изучен Барнсом, он представляет собой обратное преобразование Меллина подынтегрального выражения. В поведении интегралов (2.1) большую роль играют следующие две величины. Первая из них – это векторная величина

$$\Delta = \sum_j a^j - \sum_k c^k, \quad (2.3)$$

а вторая – скалярная величина

$$\alpha = \min_{\|y\|=1} \left(\sum_j |\langle a^j, y \rangle| - \sum_k |\langle c^k, y \rangle| \right), \quad (2.4)$$

где $\|y\| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$ – евклидова норма на пространстве $\mathbb{R}^n$. В случае $n = 1$ имеем

$$\alpha = \sum_j |a_j| - \sum_k |c_k|. \quad (2.4a)$$

Величина α определяет значения комплексных параметров $t = (t_1, \dots, t_n)$, при которых интеграл (2.1) сходится, а именно, он сходится в области (см. [14])

$$U = \left\{ t \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n : [(\pi - \arg t_1)^2 + \dots + (\pi - \arg t_n)^2]^{1/2} < \frac{\pi}{2} \alpha \right\},$$

которая непустая при $\alpha > 0$. Величина Δ характеризует область в пространстве переменных интегрирования z , в которой подынтегральное выражение убывает. А именно, асимптотическая формула Стирлинга для гамма-функции показывает, что на множестве, отделенном от полюсов, подынтегральное выражение в (2.1) экспоненциально убывает на бесконечности в любом собственном полиэдральном конусе из полупространства

$$\Pi_{\Delta, \gamma} = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \langle \Delta, z \rangle < \langle \Delta, \gamma \rangle\}.$$

Вследствие вещественности вектора Δ это полупространство представляет собой прямую сумму $\pi + i\mathbb{R}^n$ полупространства $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \Delta, x \rangle < \langle \Delta, \gamma \rangle\}$ в вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ и мнимого подпространства $i\mathbb{R}^n$. В случае $n = 1$ полупространство $\Pi_{\Delta, \gamma}$ – это левая или правая полуплоскость (в зависимости от знака числа Δ), а π – левая или правая полупрямая на вещественной оси. Таким образом, величина Δ играет такую же роль, как λ , в интеграле типа Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

который для подходящих функций $f(x)$ вычисляется с помощью известной леммы Жордана [18, гл. 5, §2] как сумма вычетов в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от знака λ . В случае же $\lambda = 0$ вычисление можно проводить через вычеты как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Напомним, что идея леммы Жордана состоит в следующем: интеграл (2.5) представляется в виде предела по $R \rightarrow \infty$ интегралов $\int_{-R}^{+R}$; отрезок интегрирования $[-R, R]$ замыкается полуокружностью до замкнутого контура в верхнюю или нижнюю полуплоскость; к полученному контуру применяется теорема

Коши о вычетах. Применительно к одномерным интегралам (2.2) эта идея была реализована Барнсом и др. (см. [19]) с заменой верхних и нижних полуплоскостей левой и правой полуплоскостями. При этом наибольший интерес вызывали интегралы (2.2) с нулевой характеристикой Δ , поскольку в этом случае они представляют все обобщенные гипергеометрические функции. Для $\Delta = 0$ интеграл (2.2) можно вычислять суммой вычетов как в левой, так и в правой полуплоскости. При этом сумма вычетов в левой полуплоскости есть степенной ряд Горна переменного t , сходящийся в некотором круге $|t| < r$, а сумма вычетов в правой полуплоскости представляет другой ряд Горна переменного t^{-1} , сходящийся вне этого круга; и если величина α положительна (см. (2.4a)), то каждый из указанных рядов есть аналитическое продолжение другого (см. [19]).

В многомерном случае ситуация несколько сложнее и разнообразнее. Дело в том, что для $n = 1$ вертикальная ось интегрирования $\operatorname{Re} z = \gamma$ является границей и одновременно острием всего двух полиэдральных конусов – левой и правой полуплоскостей. Под полиэдральным конусом мы понимаем множество вида

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} g_j(z) < r_j, \quad j = 1, \dots, m\},$$

где $g_j(z)$ – линейные функции с вещественными коэффициентами. Нас будут интересовать симплицальные конусы, соответствующие случаю $m = n$, и линейно независимым функциям g_j , $j = 1, \dots, n$ (у таких конусов n граней максимальной размерности). Вследствие вещественности коэффициентов полиэдральный симплицальный конус можно задать в виде $\pi + i\mathbb{R}^n$, где π – октант в вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$:

$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) < r_j, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Таким образом, если $\gamma \in \mathbb{R}^n$ – вершина октанта π (рис. 1), то “вертикаль” интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^n$ в интеграле (2.1) есть острие конуса Π (рис. 2).

Рис. 1

Рис. 2

Поскольку к вершине γ может примыкать бесконечное множество октантов, то “вертикаль” интегрирования является острием также бесконечного числа полиэдральных конусов. Соответственно для интеграла (2.1) можно получать различные формулы вычетов в конусах с острием $\gamma + i\mathbb{R}^n$. Речь идет о локальных вычетах в точках пересечений полярных гиперплоскостей

$$L_j^\nu = \{\langle a^j, z \rangle + b_j = -\nu\}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.6)$$

Если в данной точке

$$z = z_J^m = L_{j_1}^{m_1} \cap \dots \cap L_{j_n}^{m_n}$$

пересекаются только n комплексных гиперплоскостей вида (2.6), то в этой точке определен локальный вычет Гротендика

$$\operatorname{res}_{z_J^m} \omega = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_J^m} \omega,$$

где ω — подынтегральное выражение в (2.1), а γ_J^m — n -мерный цикл вида

$$\gamma_J^m = \{z: |\langle a^{j_1}, z \rangle + b_{j_1} + m| = \dots = |\langle a^{j_n}, z \rangle + b_{j_n} + m_n| = \varepsilon\},$$

где ε достаточно мало. С помощью замены переменных

$$w_j = \langle a^j, z \rangle + b_j + m_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

и формулы Коши легко убедиться, что

$$\operatorname{res}_{z_J^m} \omega = \frac{(-1)^{|m|}}{m! \Delta_J} \frac{\prod_{j \neq J} \Gamma(\langle a^j, z_J^m \rangle + b_j)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(\langle c^k, z_J^m \rangle + d_k)} (-t_1)^{(z_J^m)_1} \dots (-t_n)^{(z_J^m)_n}, \quad (2.7)$$

где $\Delta_J = \det(a^{j_1}, \dots, a^{j_n})$, $(z_J^m)_i$ — координаты точки z_J^m , $|m| = m_1 + \dots + m_n$, $m! = m_1! \dots m_n!$.

Если в точке z пересекается более чем n комплексных гиперплоскостей L_j^ν , то совокупность всех этих гиперплоскостей разбивается на n групп (n дивизоров) $D_1, \dots, D_n$ и определяется вычет Гротендика $\operatorname{res}_z \{D_1, \dots, D_n\} \omega$ относительно этих дивизоров (см. [12, 20]). В этом случае формула вычета становится более сложной, и в ней, кроме степеней переменных $t_1, \dots, t_n$, будут фигурировать степени логарифмов $(\ln t_1)^{p_1} \dots (\ln t_n)^{p_n}$, причем $p_1 + \dots + p_n$ по крайней мере на n единиц меньше числа гиперплоскостей, пересекающихся в данной точке. Сейчас мы увидим, что выражение (2.7) соответствует члену ряда Горна (его коэффициент есть отношение произведений значений гамма-функций в линейных по $m = (m_1, \dots, m_n)$ аргументах). В терминологии теории гипергеометрических функций [17] формула (2.7) (т.е. выражение вычета, когда через точку проходит лишь n полярных гиперплоскостей) соответствует нерезонансному случаю.

Итак, заметим, что z_J^m как решение системы линейных уравнений

$$\langle a^{j_1}, z \rangle + b_{j_1} = -m_1, \quad \dots, \quad \langle a^{j_n}, z \rangle + b_{j_n} = -m_n$$

параметризуется в зависимости от $m = (m_1, \dots, m_n)$ также линейным образом:

$$(z_J^m)_1 = \langle A^{j_1}, m \rangle + B_{j_1}, \quad \dots, \quad (z_J^m)_n = \langle A^{j_n}, m \rangle + B_{j_n}.$$

Следовательно, после вынесения множителя $(-t)^{B_J} = (-t_1)^{B_{j_1}} \dots (-t_n)^{B_{j_n}}$ в (2.7) и перехода к переменным $\tau_i = t_1^{a_i^{j_1}} \dots t_n^{a_i^{j_n}}$, $i = 1, \dots, n$, выражение (2.7) приводится к члену степенного ряда Горна относительно переменных $\tau_1, \dots, \tau_n$.

Теперь рассмотрим вопрос о том, через какие вычеты вида (2.7) выражается интеграл (2.1). Случай $n = 2$, $\Delta \neq 0$ был рассмотрен в [14]; здесь, как и для одного переменного, интеграл (2.1) выражается лишь одной формулой вычетов:

$$\Phi(t) = \sum_{z_J^m \in \Pi_{\Delta, \gamma}} \operatorname{res}_{z_J^m} \omega,$$

где суммирование ведется по всем таким точкам пересечения $z_J^m = L_{j_1}^{m_1} \cap L_{j_2}^{m_2}$ из полупространства $\Pi_{\Delta, \gamma}$, для которых прямые $L_{j_1}^{m_1}$ и $L_{j_2}^{m_2}$ пересекают прямую

$$l = \{x \in \mathbb{R}^2: \langle \Delta, x \rangle = \langle \Delta, \gamma \rangle\}$$

по разные стороны от точки $\gamma \in l$ (по этой причине цикл интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^2$ называется разделяющим комплексные прямые $L_{j_1}^{m_1}, L_{j_2}^{m_2}$).

В интересующем нас случае $\Delta = 0$ введем следующее понятие. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим произвольный угол (конус) π с вершиной γ (см. рис. 1). Будем говорить, что угол π согласован с семейством (2.7) полярных прямых L_j^ν подынтегрального выражения (2.1), если каждая такая прямая пересекает не более одной стороны угла π (на рис. 3 углы π_1, π_2, π_3 согласованы с семейством прямых, состоящим из вертикальных, горизонтальных и наклонных прямых). Тогда в соответствии с многомерной леммой Жордана [14] справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\Delta = 0$. Если угол π согласован с семейством $L_J^\nu = \{\langle a^j, z \rangle + b_j = -\nu\}$ полярных прямых интеграла (2.1), то для этого интеграла справедлива формула вычетов

$$\Phi(t) = \sum_{z_J^m \in \pi} \operatorname{res}_{z_J^m} \omega,$$

где суммирование ведется по всем точкам пересечения $z_J^m = L_{j_1}^{m_1} \cap L_{j_2}^{m_2}$ из π , для которых $L_{j_1}^{m_1}$ пересекает лишь одну сторону, а $L_{j_2}^{m_2}$ — лишь другую сторону угла π . При этом ряд вычетов сходится в области вида

$$\{t \in \mathbb{C}^2: |t_1^{A_1} t_2^{B_1}| < r_1, \dots, |t_1^{A_s} t_2^{B_s}| < r_s\}.$$

Рис. 3

Интересующие нас случаи применения многомерной ($n > 2$) леммы Жордана будут приведены в разделах 3, 4, а сейчас рассмотрим следующий двумерный пример:

$$\Phi(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)\Gamma(-7z_1 - 3z_2 + 1)}{\Gamma^2(-z_1 + 1)\Gamma^2(-2z_1 - z_2 + 1)} (-t_1)^{z_1} (-t_2)^{z_2} dz_1 dz_2. \quad (2.8)$$

Из результатов раздела 3 следует, что данный интеграл представляет ряд (1.9), тем самым – фундаментальный период для многообразия (1.8). Здесь мы имеем три семейства полярных прямых:

$$L_1^\nu = \{z_1 = -\nu\}, \quad L_2^\nu = \{z_2 = -\nu\}, \quad L_3^\nu = \{-7z_1 - 3z_2 + 1 = -\nu\},$$

изображенные на рис. 3. В конусе π_1 пересекаются лишь прямые из первых двух семейств, т.е. полюсы гамма-функций $\Gamma(z_1)$ и $\Gamma(z_2)$. Точки пересечения $L_1^{m_1} \cap L_2^{m_2}$ параметризуются в виде $(z_1, z_2) = (-m_1, -m_2)$, поэтому по утверждению 1 и формуле (2.7) интеграл $\Phi(t)$ представляется рядом Горна (1.9).

В данном примере угол π_1 не единственный, который согласован с семейством полярных прямых L_j^ν . Поэтому для $\Phi(t)$ существуют другие формулы вычетов, осуществляющие аналитическое продолжение ряда (1.9). Так, в π_2 пересекаются полюсы функций $\Gamma(z_1)$ и $\Gamma(-7z_1 - 3z_2 + 1)$. Соответствующие точки пересечения $L_3^{m_1} \cap L_1^{m_2}$ параметризуются в виде

$$(z_1, z_2) = \left(-m_2, \frac{1}{3}m_1 + \frac{7}{3}m_2 + \frac{1}{3}\right).$$

Определитель Δ_{31} равен 3, поэтому по утверждению 1 и формуле (2.7) интеграл (2.8) допускает представление в виде ряда

$$\frac{(-t_2)^{-\frac{1}{3}}}{3} \sum_{m_1, m_2 \geq 0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}m_1 + \frac{7}{3}m_2 + 1\right) e^{\pi i\left(\frac{2}{3}m_1 - \frac{7}{3}m_2\right)} \left(\frac{1}{t_2^{1/3}}\right)^{m_1} \left(\frac{t_1}{t_2^{7/3}}\right)^{m_2}}{m_1!m_2! \Gamma^2(m_2 + 1) \Gamma^2\left(-\frac{1}{3}m_1 - \frac{1}{3}m_2 + \frac{2}{3}\right)}, \quad (2.9)$$

сходящегося уже в другой области переменных t_1, t_2 , чем ряд (1.9).

Наконец, в угле π_3 пересекаются полюсы функций $\Gamma(z_2)$ и $\Gamma(-7z_1 - 3z_2 + 1)$. Точки пересечения $L_2^{m_1} \cap L_3^{m_2}$ параметризуются в виде

$$(z_1, z_2) = \left(\frac{3}{7}m_1 + \frac{1}{7}m_2 + \frac{1}{7}, -m_1\right).$$

Определитель Δ_{23} равен 7, поэтому по утверждению 1 и по формуле (2.7) интеграл (2.8) допускает представление в виде ряда

$$\frac{(-t_1)^{-\frac{1}{7}}}{7} \sum_{m_1, m_2 \geq 0} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{7}m_1 + \frac{1}{7}m_2 + \frac{1}{7}\right) e^{\pi i\left(\frac{6}{7}m_2 - \frac{3}{7}m_1\right)} \left(\frac{t_2}{t_1^{3/7}}\right)^{m_1} \left(\frac{1}{t_1^{1/7}}\right)^{m_2}}{m_1!m_2! \Gamma^2\left(-\frac{3}{7}m_1 - \frac{1}{7}m_2 + \frac{6}{7}\right) \Gamma^2\left(\frac{1}{7}m_1 - \frac{2}{7}m_2 + \frac{5}{7}\right)}. \quad (2.10)$$

Тот факт, что ряды (2.9) и (2.10) аналитически продолжают ряд (1.9), вытекает из утверждения, которое будет приведено в разделе 4.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРИОДОВ ИНТЕГРАЛАМИ МЕЛЛИНА–БАРНСА

Мы знаем, что фундаментальный период ϖ выражается рядом Горна (1.6). Найдем представление такого ряда в виде интеграла МБ (2.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если в ряде (1.6) вектор a имеет положительные компоненты, то этот ряд допускает представление в виде интеграла МБ*

$$\varpi_0(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(z_j) \Gamma(1 - z_j) \Gamma(1 - \langle a, z \rangle)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(1 - \langle a^k, z \rangle)} (-t)^{-z} dz, \quad (3.1)$$

где γ – любая точка из многогранника

$$\{x \in \mathbb{R}^n: 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, n, \langle a, x \rangle < 1\},$$

$$a \quad (-t)^{-z} = (-t_1)^{-z_1} \dots (-t_n)^{-z_n}.$$

Для доказательства рассмотрим полиэдр $\Pi = \pi + i\mathbb{R}^n$, где

$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^n: x_j \leq \gamma_j, j = 1, \dots, n\};$$

здесь γ_j – компоненты вектора γ . В (3.1) подынтегральное выражение имеет $2n + 1$ семейств полярных гиперплоскостей $\{z_j = -\nu\}$, $\{1 - z_j = -\nu\}$, $\{1 - \langle a, z \rangle = -\nu\}$, причем лишь первые n семейств пересекают полиэдр Π . Каждое из этих семейств образует дивизор

$$D_j = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \{z_j = -\nu\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Набор дивизоров D_j согласован с полиэдром Π (см. [14]) в том смысле, что каждый D_j не пересекает соответствующую грань полиэдра Π . А именно, если $\pi_j = \{x \in \pi: x_j = \gamma_j\}$ – грань октанта π , то $\Pi_j = \pi_j + i\mathbb{R}^n$ – грань Π ; при этом, очевидно, выполняется условие согласованности

$$D_j \cap \Pi_j = \emptyset, \quad j = 1, \dots, n.$$

По абстрактной многомерной лемме Жордана [14] интеграл в (3.1) равен сумме вычетов Гротендика подынтегрального выражения в полиэдре Π . Каждый вычет рассматривается в точке $(-m_1, \dots, -m_n)$, он равен

$$\frac{(-1)^{|m|}}{m!} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1 + m_j) \Gamma(1 + \langle a, m \rangle)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(1 + \langle a^k, m \rangle)} (-t)^m = \frac{\Gamma(1 + \langle a, m \rangle)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(1 + \langle a^k, m \rangle)} t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}.$$

Тем самым утверждение доказано.

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПЕРИОДОВ

Заметим, что мы уже реализовали первые два шага схемы исследования фундаментального периода, приведенной во введении к статье. А именно, в разделе 1 был изложен первый шаг: $\{\text{период}\} \rightarrow \{\text{ряд Горна}\}$ (формула (1.6)), а в разделе 3 – второй шаг: $\{\text{ряд Горна}\} \rightarrow \{\text{интеграл МБ}\}$ (формула (3.1)). Результаты раздела 3 позволяют осуществить третий заключительный шаг схемы – интеграл МБ вычислить различными способами и тем самым построить аналитическое продолжение фундаментального периода.

Предположим, что в ряде (1.6) вектор a имеет положительные компоненты a_j , а в знаменателе коэффициентов есть набор всех множителей $\Gamma(m_j + 1) = m_j!$, $j = 1, \dots, n$. Пусть это будут множители $\Gamma(1 + \langle a^k, m \rangle)$, $k = s + 1, \dots, q$, где $s = q - n$. Нетрудно увидеть, что в таком случае интегральное представление (3.1) для такого ряда примет вид

$$\varpi_0(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^n} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(z_j) \Gamma(1 - \langle a, z \rangle)}{\prod_{k=1}^s \Gamma(1 - \langle a^k, z \rangle)} (-t)^{-z} dz, \quad (4.1)$$

причем выполнено условие баланса весов

$$a - \sum_{k=1}^s a^k = (1, \dots, 1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Авторам не известны случаи, чтобы в представлении (1.6) нарушалось условие положительности координат вектора a , если (1.6) представляет период на гиперповерхности Калаби–Яу во взвешенном проективном пространстве. Однако в работе [2] приведен пример периода (формула (5.3)), для которого в рядах типа (1.6) отсутствуют факториалы $m_i!$. Характерно, что для соответствующего многообразия Калаби–Яу отсутствует его зеркальный партнер во взвешенном проективном пространстве [2, 8]. Как показано в работе [11], отсутствующее зеркало можно реализовать как гиперповерхность в торическом многообразии [9].

Теперь сформулируем основное утверждение относительно интеграла (4.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для каждого j от 1 до n интеграл (4.1) представляется рядом

$$\varpi_j(t) = \frac{(-1)^{j-1}}{a_j} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^{|m|} \Gamma\left(\frac{1 + \langle A^j, m \rangle}{a_j}\right) (-t_1)^{m_1} \dots (-t_j)^{-\frac{1 + \langle A^j, m \rangle}{a_j}} \dots (-t_n)^{m_n}}{m! \prod_{k=1}^s \Gamma\left(\frac{a_j - a_j^k + \langle A^{kj}, m \rangle}{a_j}\right)},$$

где a_j, a_j^k – компоненты векторов a и a^k , вектор A^j равен $(a_1, \dots, 1, \dots, a_n)$ с единицей на j -м месте, A^{kj} – это векторы

$$(a_j a_1^k - a_1 a_j^k, \dots, -a_j^k, \dots, a_j a_n^k - a_n a_j^k),$$

$|m| = m_1 + \dots + m_n$ и $m! = m_1! \dots m_n!$. При этом, если для интеграла (4.1) величина α , определенная формулой (2.4), положительна, то каждый из рядов

$\varpi_j(t)$ аналитически продолжает фундаментальный период $\varpi_0(t)$ в свою область сходимости.

Например, для интеграла (2.8) величина α равна $2/\sqrt{58}$, поэтому ряды (2.9), (2.10) дают аналитическое продолжение ряда (1.9).

Обоснование сформулированного утверждения аналогично доказательству утверждения 2. В самом деле, для каждого j от 1 до n рассмотрим полиэдр $\Pi_j = \pi_j + i\mathbb{R}^n$, где π_j — следующий октант:

$$\pi_j = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i \leq \gamma_i, i = 1, \dots, [j] \dots, n, \langle a, x \rangle > \langle a, \gamma \rangle\}.$$

Ясно, что $\gamma + i\mathbb{R}^n$ является острием этого полиэдра и что дивизор полюсов функции $\Gamma(z_j)$ не пересекает полиэдр Π_j . Далее, дивизоры

$$D_1 = \{z_1 = -m_1\}, \dots, \quad D_j = \{1 - \langle a_j, z \rangle = -m_j\}, \dots, \quad D_n = \{z_n = -m_n\}$$

полюсов гамма-функций $\Gamma(z_1), \dots, \Gamma(1 - \langle a_j, z \rangle), \dots, \Gamma(z_n)$ согласованы с полиэдром Π_j , поэтому по многомерной лемме Жордана интеграл (4.1) представляется суммой вычетов Гротендика относительно дивизоров $D_1, \dots, D_n$ в точках из Π_j . Формула вычета в этих точках приводит к равенству этого интеграла ряду $\varpi_j(t)$.

Если величина α , определенная формулой (2.4) для интеграла (4.1), положительная, то область сходимости этого интеграла пересекает каждую из областей сходимости рядов $\varpi_j(t)$. Следовательно, в этом случае последние ряды аналитически продолжают $\varpi_0(t)$ в свои области сходимости.

В заключение отметим, что одномерные интегралы МБ широко использовались в математической физике [21] в связи с вопросами асимптотик детерминантов в теории струн, асимптотик плотности p -бранных состояний, высокотемпературного предела свободной энергии скалярных полей в искривленном пространстве-времени и т. д. Авторы полагают, что некоторые из этих вопросов в большей общности целесообразно рассматривать с использованием многомерных интегралов МБ.

М. Пассаре и А. К. Цих выражают благодарность Шведской Королевской Академии за финансовую поддержку, а А. Чешель — В. Работину и В. Рубцову за полезные обсуждения и А. Ниemi за гостеприимство в Институте теоретической физики Упсальского университета (Швеция).

Список литературы

- [1] T. Hubsch. Calabi-Yau Manifolds-A Bestiary for Physicists. Singapore: World Scientific, 1992.
- [2] P. Berglund, P. Candelas, X. de la Ossa, A. Font, T. Hubsch, D. Jancic, F. Quevedo. Nucl.Phys. 1994. V. B419. P. 352.
- [3] P. Candelas, X. de la Ossa, A. Font, S. Katz, S. R. Morrison. Nucl.Phys. 1994. V. B416. P. 481.
- [4] P. Candelas, A. Font, S. Katz, S. R. Morrison. Mirror Symmetry for Two Parameter Model-2: hep-th/9403187.
- [5] P. Berglund, E. Derrick, T. Hübsch, D. Jančić. On Periods for String Compactifications: HUPAPP-93/6, IASSNS-HEP-93/80, UTTG-27-93.
- [6] S. Hosono, A. Klemm, S. Taisen, S.-T. Yau. Mirror Symmetry, Mirror Map and Application to Calabi-Yau Hypersurfaces: hep-th/9308083.
- [7] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Greene, L. Parkes. Nucl. Phys. 1991. V. B359. P. 21.
- [8] B. R. Greene, M. R. Plesser. Nucl.Phys. 1990. V. B338.

- [9] *V. V. Batyrev*. Duke Math. Journ. 1993. V. 69. P. 349.
- [10] *P. Candelas, X. de la Ossa, S. Katz*. Mirror Symmetry for Calabi–Yau Hypersurfaces in Weighted $\mathbb{CP}(4)$ and Extensions of Landau–Ginzburg Theory: hep-th/9412117.
- [11] *P. Berglund, S. Katz*. Nucl. Phys. 1994. V. B420. P. 289; hep-th/9311014.
- [12] *A. K. Tsikh*. Multidimensional Residues and Their Applications. V. 103. Providence: AMS, 1992.
- [13] *А. К. Цих*. Методы теории многомерных вычетов: Докт. дисс. Новосибирск: ИМ СОРАН, 1990.
- [14] *M. Passare, A. Tsikh, O. Zhdanov*. Aspects of Math. 1994. V. E26. P. 233.
- [15] *Ж. Лере*. Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии. М: ИЛ, 1961.
- [16] *М. А. Мкртчян, А. П. Южаков*. Изв. АН Арм. ССР. 1992. Т. 17. С. 99.
- [17] *И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов*. Функ. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. С. 94.
- [18] *А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов*. Теория функций комплексной переменной. М: Наука, 1967.
- [19] *О. И. Маричев*. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Наука, 1978.
- [20] *P. Griffiths, J. Harris*. Principles of algebraic geometry. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- [21] *E. Elizalde, K. Kirsten, S. Zerbini*. Application of the Mellin–Barnes integral representation. V: hep-th/9501048.

Поступила в редакцию 12.III.1996 г.

M. Passare, A. K. Tsikh, A. A. Cheshel

ITERATED MELLIN–BARNES INTEGRALS AS PERIODS ON THE CALABI–YAU MANIFOLDS WITH SEVERAL MODULES

In superstring compactification theory the representation of periods on the Calabi–Yau manifolds with several modules is given by iterated Mellin–Barnes integrals. By using this representation and multidimensional residues a method of analitic continuation for fundamental period is developed.