Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Щепетилов, Некоторые квантово-механические задачи в пространстве Лобачевского, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 3, 395–405

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:12:55

А. В. Щепетиллов*

НЕКОТОРЫЕ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотрены квантово-механические задачи для потенциалов, являющихся решениями проблемы Бертрана в пространстве Лобачевского. Доказана самосопряженность соответствующих операторов Шредингера. Энергетические уровни вычислены как из уравнения Шредингера, так и методом Бора–Зоммерфельда. Обнаружен эффект квантово-механического связывания классически инфинитного движения. Показано, что квазиклассический предел в определенном смысле эквивалентен евклидову.

1. Как хорошо известно, среди центральных потенциалов в пространстве $\mathbf{E}^n$ существуют два выделенных (кулоновский потенциал и потенциал осциллятора), для которых все финитные траектории классической частицы замкнуты (в предположении их существования). Нахождение таких потенциалов и составляет содержание одной из трех разновидностей проблемы Бертрана [1]. Аналогичная задача на сфере $\mathbf{S}^3$ исследовалась в [2], а в пространстве Лобачевского $\mathbf{L}^3$ – в [3]. Было показано, что в каждом из этих случаев также существуют два выделенных потенциала (назовем их потенциалами типа Бертрана), для которых все финитные траектории классической частицы замкнуты. В [4] для этих потенциалов на группе $SU(2) \simeq \mathbf{S}^3$ была рассмотрена квантово-механическая задача.

Нашей целью является изучение квантово-механических задач с потенциалами типа Бертрана в пространствах $\mathbf{L}^2$ и $\mathbf{L}^3$. Сначала дадим, на наш взгляд, более простое, чем в [2, 3, 5], решение проблемы Бертрана одновременно в пространствах $\mathbf{L}^n$ и $\mathbf{S}^n$ при $n \geq 2$, в котором особенно заметна схожесть этих случаев между собой и со случаем пространства $\mathbf{E}^n$.

Пусть ds_1^2 – стандартная метрика на единичной сфере $\mathbf{S}^{n-1}$. Рассмотрим следующие две модели односвязных пространств постоянной секционной кривизны для $n \geq 2$:

$\mathbf{L}^n = \{0\} \cup (0, 1) \times \mathbf{S}^{n-1}$ с метрикой

$$ds^2 = 4R^2 \frac{dr^2 + r^2 ds_1^2}{(1 - r^2)^2}, \quad r \in [0, 1),$$

и секционной кривизной $\kappa = -R^{-2}$ (модель Пуанкаре в шаре [6]);

*Московский государственный университет

$\mathbf{S}^n = \{0, \infty\} \cup (0, \infty) \times \mathbf{S}^{n-1}$ с метрикой

$$ds^2 = 4R^2 \frac{dr^2 + r^2 ds_1^2}{(1+r^2)^2}, \quad r \in [0, \infty),$$

и секционной кривизной $\kappa = R^{-2}$ (стереографическая проекция).

Функция Лагранжа точечной частицы единичной массы в центральном потенциале $U(r)$ есть $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{s}^2 - U(r)$. Легко видеть, что, как и в евклидовом случае, движение двумерное, т. е. траектория частицы расположена на $\mathbf{L}^2 \subset \mathbf{L}^n$ или $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{S}^n$. Пусть теперь $n = 2$, $ds_1 = d\phi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Введем величину

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2R} \left(r - \frac{1}{r} \right), & -\infty \leq \xi \leq +\infty, & \quad \text{для } \mathbf{S}^2, \\ \xi &= \frac{1}{2R} \left(r + \frac{1}{r} \right), & \frac{1}{R} < \xi \leq +\infty, & \quad \text{для } \mathbf{L}^2 \end{aligned}$$

и

$$\xi = \frac{1}{r}, \quad 0 < \xi \leq \infty, \quad \text{для } \mathbf{E}^2.$$

Тогда уравнение траектории частицы имеет вид

$$\phi = \int M \left(2(E - U(r(\xi))) - M^2 \xi^2 - \kappa M^2 \right)^{-\frac{1}{2}} d\xi,$$

где M – интеграл момента, а κ – секционная кривизна. Поскольку член κM^2 можно объединить с E , анализ замкнутости траекторий для всех пространств проводится, как в [1] и [7] для евклидова случая, и дает возможные потенциалы $U_1 = k\xi$ (аналог кулоновского потенциала) и $U_2 = k\xi^{-2}$ (аналог потенциала осциллятора). Возвращаясь к более наглядной координате r , получим

для $\mathbf{S}^2$:

$$\begin{aligned} U_1^s(r) &= k \left(r - \frac{1}{r} \right), \\ U_2^s(r) &= \frac{k_1 r^2}{(r^2 - 1)^2}, \quad 0 \leq r < 1; \\ U_2^s(r) &= \frac{k_2 r^2}{(r^2 - 1)^2}, \quad 1 < r \leq \infty, \\ k_1, k_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

для $\mathbf{L}^2$:

$$U_1^l(r) = k \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad U_2^l(r) = \frac{kr^2}{(r^2 + 1)^2}.$$

Заметим, что особенность $U_2^s(r)$ разделяет $\mathbf{S}^2$ по экватору $r = 1$ на области движения, которые частица не может покинуть, и этим объясняется двухпараметрический вид $U_2^s(k_1, k_2, r)$. В случае $k_1 = k_2$ U_2^s можно рассматривать как потенциал в пространстве

Римана в узком смысле – фактор-пространстве сферы $\mathbf{S}^2$ по центральной симметрии. В терминах расстояния ρ на римановом пространстве до точки $r = 0$ имеем

$$\begin{aligned} U_1^s(\rho) &= -\frac{k}{R} \operatorname{ctg} \frac{\rho}{R}, & U_2^s(\rho) &= \frac{\omega^2 R^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\rho}{R}, & \rho &= 2R \operatorname{arctg} r, \\ U_1^l &= -kR^{-1} \operatorname{cth} \frac{\rho}{R}, & k > 0, & & U_2^l &= \frac{\omega^2}{2} R^2 \operatorname{th}^2 \frac{\rho}{R}, & \rho &= R \ln \frac{1+r}{1-r}. \end{aligned}$$

Постоянные здесь подобраны так, чтобы в евклидовом пределе $R \rightarrow \infty$ получались $U_1^e = -k/\rho$, $U_2^e = \frac{1}{2}\omega^2 \rho^2$. Отметим, что при замене $R \rightarrow iR$ U_j^s переходит в U_j^l , $j = 1, 2$, и что, как и в евклидовом случае, $[\Delta_3(U_1)] = 4\pi k \delta(0)$, но в отличие от евклидова случая $\Delta_3(U_2^{s,l}) \neq \operatorname{const}$, где Δ_3 – оператор Лапласа–Бельтрами в $\mathbf{L}^3$ или $\mathbf{S}^3$.

2. Рассмотрим пространства $\mathbf{L}^2$ и $\mathbf{L}^3$. Будем пользоваться моделью Бельтрами [6]: $\mathbf{L}^n = \{0\} \cup (0, 1) \times \mathbf{S}^{n-1}$ с метрикой

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dv^2}{(1-v^2)^2} + \frac{v^2 ds_1^2}{1-v^2} \right), \quad v \in [0, 1),$$

$U_1(v) \equiv U_1^l = -k(Rv)^{-1}$, $U_2(v) \equiv U_2^l = \frac{1}{2}R^2\omega^2 v^2$. Гамильтониан частицы в $\mathbf{L}^2$ имеет вид

$$H_2(p_v, v, p_\phi, \phi) = \frac{1}{2R^2} \left((1-v^2)^2 p_v^2 + \frac{1-v^2}{v^2} p_\phi^2 \right) + U(v).$$

Рассмотрим случай U_1 . Траектория частицы:

$$v = p(1 + e \cos \phi)^{-1},$$

где

$$p = \frac{M^2}{Rk}, \quad M = |p_\phi| = \operatorname{const}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2M^2}{k^2} \left(E + \frac{M^2}{2R^2} \right)}.$$

Условия существования движения с энергией E :

$$\begin{aligned} E &\geq -\frac{k^2}{2M^2} - \frac{M^2}{2R^2} & \text{при} & \quad \frac{M^2}{Rk} < 1; \\ E &> -\frac{k}{R} & \text{при} & \quad \frac{M^2}{Rk} \geq 1, \end{aligned}$$

а условия финитности движения:

$$M < \sqrt{Rk}, \quad E < -\frac{k}{R}. \quad (1)$$

Отсюда видно, что в отличие от евклидова случая при $M \geq \sqrt{Rk}$ финитных движений не существует ни при каких E . Период обращения по замкнутой орбите [3]:

$$T = \frac{R\pi}{\sqrt{2}} \left(\left(-\frac{k}{R} - E \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{k}{R} - E \right)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Для U_2 траектория имеет вид

$$v^2 = \frac{M^2}{R^2} \left(E + \frac{M^2}{2R^2} - \sqrt{\left(E + \frac{M^2}{2R^2} \right)^2 - \omega^2 M^2 \sin 2\phi} \right)^{-1}.$$

Условия существования движения с энергией E :

$$\begin{aligned} E &\geq M\omega - \frac{M^2}{2R^2} && \text{при} \quad \frac{M}{\omega R^2} < 1; \\ E &> \frac{\omega^2 R^2}{2} && \text{при} \quad \frac{M}{\omega R^2} \geq 1, \end{aligned}$$

а условия финитности движения:

$$\frac{M^2}{2R^2} < E < \frac{\omega^2 R^2}{2}. \quad (2)$$

При $M \geq \omega R^2$ финитных движений не существует ни при каких E . Период обращения по замкнутой орбите [3]: $T = 2R\pi(\omega^2 R^2 - 2E)^{-\frac{1}{2}}$.

3. Квантование по Бору–Зоммерфельду. Для $\mathbf{L}^3$ гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H_3(p_v, v, p_\psi, \psi, p_\phi, \phi) &= \frac{1}{2R^2} \left((1-v^2)^2 p_v^2 + \frac{1-v^2}{v^2} \left(\frac{p_\phi^2}{\sin^2 \psi} + p_\psi^2 \right) \right) + U(v), \\ 0 &\leq \psi \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Интегралы движения: $M^2 = p_\psi^2 + p_\phi^2 \sin^{-2} \psi$, $L = p_\phi$, $E = H_3$. Базисные циклы на трехмерном торе выбираются аналогично евклидову случаю [8] и имеют те же индексы Маслова.

Рассмотрим U_1 . Условия квантования имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi\hbar} \int_0^{2\phi} L d\phi &= \frac{4L}{\hbar} = 4n_1, \quad n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \frac{4}{\pi\hbar} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{M^2 - \frac{L^2}{\sin^2 \psi}} d\psi &= \frac{4}{\hbar} (M - |L|) = 2 + 4n_2, \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\psi_1 = \arcsin \frac{|L|}{M}$, $\psi_2 = \pi - \psi_1$,

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi\hbar} \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{2R^2}{(1-v^2)^2} \left(E + \frac{k}{Rv} \right) - \frac{M^2}{(1-v^2)v^2} \right)^{\frac{1}{2}} dv &= \\ = \frac{2\sqrt{2}R}{\hbar} \left(-\sqrt{-E - \frac{k}{R}} + \sqrt{-E + \frac{k}{R}} \right) - \frac{4M}{\hbar} &= 2 + 4n_3, \quad n_3 = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где v_1, v_2 – корни последнего подынтегрального выражения. Отсюда получаем с учетом условий финитности движения: $L = n_1 \hbar$, $M = \hbar(\frac{1}{2} + n_2 + |n_1|)$,

$$E_n = -\frac{n^2 \hbar^2}{2R^2} - \frac{k^2}{2n^2 \hbar^2}, \quad 1 \leq n < \frac{\sqrt{Rk}}{\hbar}, \quad (4)$$

где $n := 1 + n_3 + n_2 + |n_1|$. Кратность вырождения энергетических уровней, как и в евклидовом случае, составляет n^2 . Заметим, что точно такую же формулу дает квантование по Бору, учитывающее только круговые орбиты, и что E_n монотонно возрастает при указанных n .

Рассмотрим $U = U_2$ на $\mathbf{L}^3$. Отличие состоит в замене уравнения (3) условием

$$\frac{2}{\hbar} \left(\omega R^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2E}{\omega^2 R^2}} \right) - M \right) = 2 + 4n_3, \quad n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

В итоге, подставляя $n := 2n_3 + n_2 + |n_1|$, получим

$$E_n^{(3)} = \hbar \omega \left(n + \frac{3}{2} \right) - \frac{\hbar^2 (n + \frac{3}{2})^2}{2R^2}, \quad 0 \leq n < \frac{\omega R^2}{\hbar} - \frac{3}{2}. \quad (5)$$

Кратность вырождения уровней совпадает с евклидовым случаем и составляет $(n+1)(n+2)/2$. Аналогично для $U = U_2$ на $\mathbf{L}^2$ получаем

$$E_n^{(2)} = \hbar \omega (n+1) - \frac{\hbar^2 (n+1)^2}{2R^2}, \quad 0 \leq n < \frac{\omega R^2}{\hbar} - 1. \quad (6)$$

Кратность вырождения есть $n+1$. Легко видеть, что при $R \rightarrow \infty$ выражения для E_n , $E_n^{(3)}$, $E_n^{(2)}$ переходят в известные формулы для евклидова случая.

4. Перейдем теперь к рассмотрению соответствующих спектральных задач для уравнения Шредингера $-\frac{\hbar^2}{2} \Delta \phi + U \phi = E \phi$, где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathbf{L}^3$ или $\mathbf{L}^2$.

4.1. Сформулируем вначале некоторые результаты о самосопряженности операторов $-\Delta + U$ в $\mathbf{L}^n$. Все пространства суммируемых функций понимаются относительно инвариантной меры в $\mathbf{L}^n$. Реализуем $\mathbf{L}^n$ в виде $\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n, x^n > 0\}$, $ds^2 = (x^n)^{-2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$, $d\mu(x) = (x^n)^{-n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$,

$$\Delta = (x^n)^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - (n-2)x^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Отсюда ясно видна эллиптичность оператора Δ .

Пусть $V(x) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{L}^n)$, $V(x) \geq 0$ – вещественнозначная функция. Определим $\hat{A} = -\Delta + V(x)$ на $C_0^\infty(\mathbf{L}^n)$. Пусть

$$q(\phi, g) := (\hat{A}\phi, g) = \int_{\mathbf{R}_+^n} \left(\frac{1}{(x^n)^{n-2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i} + \frac{V \phi \bar{g}}{(x^n)^n} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \\ \phi, g \in C_0^\infty(\mathbf{L}^n).$$

Ясно, что $\hat{A}$ – положительный симметричный оператор на $C_0^\infty(\mathbf{L}^n) \subset \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^n)$, и по теореме X.23 из [9, с.200] его расширение по Фридрихсу A самосопряжено. При этом $D(A) \subset D(q)$, где $D(q) = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^n) \mid q(f, f) < \infty\}$.

Известные результаты [9] для евклидова случая практически полностью переносятся на случай пространств $\mathbf{L}^n$ (теоремы 1 и 2) и более общо – на случай любых полных римановых пространств без края с бесконечным объемом. Единственным отличием является необходимость проведения вычислений в локальных (например, нормальных [10]) координатах.

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива формула*

$$D(A) = \{\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^n) \mid V\phi \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{L}^n), -\Delta\phi + V\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^n)\},$$

$$A\phi = -\Delta\phi + V\phi.$$

(Здесь и всюду далее производные понимаются в смысле обобщенных функций.)

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $V \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbf{L}^n)$, $V \geq 0$. Тогда $-\Delta + V$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbf{L}^n)$.*

Следующий вполне стандартный результат гарантирует локальную суммируемость вторых частных производных функций из $D(A)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $V \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{L}^n)$. Тогда $D(A) \subset W_{\text{loc}}^{2,2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in D(A)$ и пусть Ω – область в $\mathbf{L}^n$ с компактным замыканием. Тогда $(Af)|_\Omega \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, откуда в силу [11, с.177] $f|_{\Omega'} \in W^{2,2}(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$. Ввиду произвольности Ω имеем нужный результат.

Формулировка теоремы 4 переносится из [9], хотя ее доказательство несколько видоизменяется, т.к. мы не можем воспользоваться преобразованием Фурье для доказательства основной оценки. При доказательстве существенно используется транзитивность группы изометрий $\mathbf{L}^n$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $V \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{L}^3) + \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^3)$, V – вещественная функция. Тогда A самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbf{L}^3)$ и самосопряжен на*

$$D(-\Delta) = \{\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^3) \mid -\Delta\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^3)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теорем X.12 и X.15 из [9] достаточно доказать оценку: $\forall a > 0 \exists b > 0$ такое, что $\forall \phi \in D(-\Delta)$ верно $\|\phi\|_\infty \leq a\|\Delta\phi\|_2 + b\|\phi\|_2$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathcal{L}^2(\mathbf{L}^3)$, а $\|\cdot\|_\infty$ – норма в $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{L}^3)$. Пусть $\Omega \subset\subset \mathbf{L}^3$ – область с компактным замыканием. В соответствии с теоремой 8.24 из [11] множество

$$P(B) = \{\phi \in D(-\Delta), \|\Delta\phi\|_{2,\Omega} + \|\phi\|_{2,\Omega} < B\}$$

компактно вложено в $C(\bar{\Omega}')$, $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$, $\forall B > 0$. Здесь $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ – норма в $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Покажем, что $\forall a > 0 \exists b > 0$ такое, что $\forall \phi \in D(-\Delta)$ выполнено $\|\phi\|_{C(\bar{\Omega}')} \leq a\|\Delta\phi\|_{2,\Omega} + b\|\phi\|_{2,\Omega}$. Допустим противное. Это означает, что $\exists a > 0$, $\{b_n\} \rightarrow \infty$, $\{\phi_n\} \subset D(-\Delta)$

такие, что $\|\phi_n\|_{C(\bar{\Omega}')} > a\|\Delta\phi_n\|_{2,\Omega} + b_n\|\phi_n\|_{2,\Omega} =: \alpha_n$. Без ограничения общности (при необходимости нормируя) можно считать, что $\|\Delta\phi_n\|_{2,\Omega} + \|\phi_n\|_{2,\Omega} = 1$. Ввиду компактности $P(2)$ в $C(\bar{\Omega}')$ $\exists \phi_{n_k} \rightarrow \psi$ в $C(\bar{\Omega}')$, а значит, и в $\mathcal{L}^2(\Omega')$. Последовательность α_{n_k} ограничена и (т.к. $b_{n_k} \rightarrow \infty$) $\|\phi_{n_k}\|_{2,\Omega} \rightarrow 0$. Но отсюда $\|\phi_{n_k}\|_{2,\Omega'} \rightarrow 0$, $\psi = 0$ и $\|\Delta\phi_{n_k}\|_{2,\Omega} \rightarrow 1$. Переходя к пределу, получаем противоречие: $0 = \|\psi\|_{C(\bar{\Omega}')} \geq a > 0$. Таким образом, $\forall a > 0 \exists b > 0$ такое, что $\forall \phi \in D(-\Delta)$ выполнено

$$\|\phi\|_{C(\bar{\Omega}')} \leq a\|\Delta\phi\|_{2,\Omega} + b\|\phi\|_{2,\Omega} \leq a\|\Delta\phi\|_2 + b\|\phi\|_2.$$

Пусть теперь точка $x \in \mathbf{L}^3$ произвольна. Существует изометрия γ , переводящая x в $x' \in \Omega'$. При этом

$$\|\Delta(\phi \circ \gamma)\|_2 = \|\Delta\phi\|_2, \quad \|\phi \circ \gamma\|_2 = \|\phi\|_2,$$

откуда имеем

$$\|\phi\|_\infty \leq a\|\Delta\phi\|_2 + b\|\phi\|_2.$$

4.2. Далее мы найдем собственные значения уравнения Шредингера с потенциалом U_1 в $\mathbf{L}^3$ и потенциалом U_2 в $\mathbf{L}^3$ и $\mathbf{L}^2$. Из общей теории эллиптических уравнений следует бесконечная гладкость собственных функций в точках гладкости коэффициентов уравнения и возможность их поиска методом разделения переменных в нашем центрально-симметричном случае. Рассмотрим $U = U_1$ в $\mathbf{L}^3$. Произведем замену $u := v^{-1}$, $1 < u \leq \infty$. Тогда

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \left((u^2 - 1)^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + (u^2 - 1) \Delta_s \right), \quad \omega_3 = \frac{R^3 du \wedge \omega_s^2}{(u^2 - 1)^2},$$

где ω_s^2 — форма объема на единичной сфере $\mathbf{S}_1^2$ со стандартной метрикой. Пусть $\psi = W(u)\Phi_{l,m}(x)$, $x \in \mathbf{S}_1^2$, $\Delta_s \Phi_{l,m} = -l(l+1)\Phi_{l,m}$, где $\Phi_{l,m}$ — сферическая гармоника. Уравнение для W имеет вид

$$W''(u) + \frac{a + bu + cu^2}{(u^2 - 1)^2} W(u) = 0, \quad (7)$$

где $a = 2R^2 E \hbar^{-2} + l(l+1)$, $b = 2Rk \hbar^{-2}$, $c = -l(l+1)$. Отметим, что переход к евклидову пределу осуществляется заменой $r = R/u$ и устремлением $R \rightarrow \infty$ при сохранении величины r , которая переходит в евклидов радиус.

Уравнение (7) является уравнением Римана [12] с тремя особыми точками $\pm 1, \infty$, в окрестности которых его решение как функция комплексного переменного ветвится. Критические показатели в этих точках имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1^{(1)} &= \frac{1 + \sqrt{1 - a - b - c}}{2}, & \rho_2^{(1)} &= \frac{1 - \sqrt{1 - a - b - c}}{2}, \\ \rho_1^{(-1)} &= \frac{1 + \sqrt{1 - a + b - c}}{2}, & \rho_2^{(-1)} &= \frac{1 - \sqrt{1 - a + b - c}}{2}, \\ \rho_1^{(\infty)} &= l, & \rho_2^{(\infty)} &= -1 - l. \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой 4 нас интересуют решения, для которых

$$\int_1^\infty \frac{|W|^2 du}{(u^2 - 1)^2} < \infty \quad \text{и} \quad \Delta \left[W \left(\frac{1}{v} \right) \Phi_{l,m}(x) \right] \in \mathcal{L}^2(\mathbf{L}^3). \quad (8)$$

Первое условие в (8) исключает асимптотику при $u \rightarrow 1$, соответствующую $\rho_2^{(1)}$, причем должно быть

$$1 - a - b - c > 0, \quad (9)$$

и асимптотику при $u \rightarrow \infty$, соответствующую $\rho_2^{(\infty)}$ при $l > 0$. Второе же условие в (8) исключает $\rho_2^{(\infty)}$ при $l = 0$. Таким образом, собственные функции должны иметь асимптотику порядка $(u - 1)^{\rho_1^{(1)}}$ при $u \rightarrow 1$ и u^{-l} при $u \rightarrow \infty$.

Исходя из общей теории уравнения Римана [12] приведем уравнение (7) к гипергеометрическому виду заменой $y(\xi) = W(u)(u - 1)^{-\rho_1^{(1)}}(u + 1)^{-\rho_2^{(-1)}}$, $\xi = \frac{1}{2}(1 - u)$. Тогда справедливо

$$\xi(1 - \xi)y'' + (\gamma - \xi(\alpha + \beta + 1))y' - \alpha\beta y = 0.$$

Критические показатели функции y следующие: α и β в ∞ ; 0 и $1 - \gamma$ в 0; 0 и $\gamma - \alpha - \beta$ в 1, вследствие чего получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho_1^{(\infty)} + \rho_1^{(1)} + \rho_2^{(-1)} = l + 1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - a - b - c} - \sqrt{1 - a + b - c} \right), \\ \beta &= \rho_2^{(\infty)} + \rho_1^{(1)} + \rho_2^{(-1)} = -l + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - a - b - c} - \sqrt{1 - a + b - c} \right), \\ 1 - \gamma &= \rho_2^{(1)} - \rho_1^{(1)} = -\sqrt{1 - a - b - c}, \\ \gamma &= 1 + \sqrt{1 - a - b - c}, \quad \alpha - \beta = 2l + 1. \end{aligned}$$

Нужная нам функция $y(\xi)$ должна иметь асимптотику: const в 0 и $\xi^{-\alpha}$ при $\xi \rightarrow -\infty$. Это означает, что

$$y(\xi) = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \quad \text{и} \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \xi^\beta = 0.$$

Поскольку [13]

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \xi^\beta = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

и $\gamma > 0$, $\alpha - \beta > 0$, $\gamma - \beta = 1 + l + \frac{1}{2}(\sqrt{1 - a - b - c} + \sqrt{1 - a + b - c}) > 0$, то должно быть: $\alpha = -m + 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$, т.е.

$$-\sqrt{1 - a - b - c} + \sqrt{1 - a + b - c} = 2(m + l) = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

откуда

$$\sqrt{1 - a - b - c} + \sqrt{1 - a + b - c} = \frac{b}{n}. \quad (11)$$

Складывая и вычитая (10) и (11), с учетом (9) получаем $\sqrt{1-a+b-c} = \frac{b}{2n} + n$, $\sqrt{1-a-b-c} = \frac{b}{2n} - n > 0$. Отсюда, подставляя значения a, b, c , получим

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2R^2} - \frac{n^2 \hbar^2}{2R^2} - \frac{k^2}{2n^2 \hbar^2}, \quad 1 \leq n < \frac{\sqrt{Rk}}{\hbar}. \quad (12)$$

Заметим, что при указанных значениях n энергия E_n монотонно возрастает. Ее уровни по-прежнему n^2 -кратно вырождены. Мы видим, что уравнение (12) отличается от (4) наличием дополнительного члена $\frac{\hbar^2}{2R^2}$, который, как мы сейчас покажем, ответствен за любопытный эффект квантово-механического связывания классически инфинитного движения.

Второе условие финитности классического движения (1) может быть не выполнено для E_n из (12), т.к., выбирая Rk так, что $\sqrt{Rk} \hbar^{-1} = n_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, можно добиться, что $E_{n_1} > -\frac{k}{R} = U_1^{\max}$, причем всегда $E_n - U_1^{\max} < \frac{\hbar^2}{2R^2}$. Заметим, что, как и в евклидовом случае, оператор квадрата полного момента есть $-\hbar^2 \Delta_s$, его собственные значения суть $\hbar^2 l(l+1) = \hbar^2 (n-m)(n-m+1) \leq \hbar^2 (n-1)n < Rk$, что удовлетворяет первому условию из (1).

Обратимся теперь к виду радиальной собственной функции $W_{n,l}$, отвечающей энергии E_n . При $\alpha = 1-m$, $\beta = -m-2l$, $\gamma = 1 + \frac{Rk}{n\hbar^2} - n$ $y(\xi) = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ есть полином в точности $(m-1)$ -й степени. Его точный вид:

$$y(\xi) = P_{m-1}(\xi) = 1 + \sum_{p=1}^{m-1} \frac{(\alpha)_p (\beta)_p}{p! (\gamma)_p} \xi^p,$$

где $(\alpha)_p := \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)$. Поскольку $\rho_1^{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Rk}{n\hbar^2} - n\right)$, $\rho_2^{(-1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Rk}{n\hbar^2} - n\right)$, получаем

$$W_{n,l}(u) = P_{n-l-1} \left(\frac{1-u}{2} \right) (u^2-1)^{\frac{1-n}{2}} \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^{\frac{Rk}{2n\hbar^2}}.$$

При переходе к евклидову пределу нужно предварительно положить $u = R/r$ и умножить $W_{n,l}$ на R^{n-1} , а затем устремить $R \rightarrow \infty$. При этом r станет евклидовым радиусом.

Уравнение для радиальных собственных функций для U_2 также приводится к уравнению Римана с независимой переменной $t = u^2$. Выпишем только результаты. Собственные значения, соответствующие потенциалу U_2 в $\mathbf{L}^3$, суть

$$E_n^{(3)} = \frac{\hbar^2}{2R^2} \left(\frac{3}{4} - \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 \right) + \omega \hbar \left(n + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{4\omega^2 R^4}},$$

$$0 \leq n < \frac{\omega R^2}{\hbar} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{4\omega^2 R^4}} - \frac{3}{2}.$$

Степень вырождения энергетических уровней, как и в евклидовом случае, есть $(n+1) \times (n+2)/2$. Собственные функции, соответствующие $E_n^{(3)}$, имеют вид

$$\psi_{n,l,m}(u, x) = (u^2-1)^{-\frac{\sigma+n}{2}} u^\sigma P_{n,l}^{(3)}(u^2) \Phi_{l,m}(x),$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 R^4}{\hbar^2}} \right), \quad x \in \mathbf{S}^2,$$

$$P_{n,l}^{(3)}(t) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(-k)_j (-k-l-\frac{1}{2})_j}{j! (-\sigma-n)_j} (1-t)^j, \quad n = 2k+l.$$

Для потенциала U_2 в $\mathbf{L}^2$:

$$E_n^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{2R^2} (n+1)^2 + \omega \hbar (n+1) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{4\omega^2 R^4}},$$

$$0 \leq n < \frac{\omega R^2}{\hbar} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{4\omega^2 R^4}} - 1.$$

Степень вырождения энергетических уровней, как и в евклидовом случае, есть $n+1$. Мы видим, что для U_1 и U_2 в противоположность евклидову случаю имеет место отличие точных значений E_n от квазиклассических из (5) и (6). Собственные функции, соответствующие $E_n^{(2)}$, имеют вид

$$\psi_{n,m}(u, \phi) = (u^2 - 1)^{-\frac{\sigma+n}{2}} u^\sigma P_{n,m}^{(2)}(u^2) \exp(im\phi),$$

где

$$P_{n,m}^{(2)}(t) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(-k)_j (-k-|m|)_j}{j! (-\sigma-n+\frac{1}{2})_j} (1-t)^j, \quad n = 2k+|m|.$$

Заметим, что данные собственные функции во всех случаях при $R \rightarrow \infty$ переходят (при надлежащей нормировке) в известные собственные функции соответствующих задач на пространствах $\mathbf{E}^2$ и $\mathbf{E}^3$.

Нетрудно видеть, что энергии $E_n^{(3)}$ и $E_n^{(2)}$ монотонно возрастают с ростом номера уровня n , лежащего в указанных пределах. Аналогично случаю U_1 условия финитности классического движения (2) могут нарушаться при максимальных n , причем превышение $E_n^{(3)}$ над $U_2^{\max}$ опять не превосходит $\frac{\hbar^2}{2R^2}$, а превышение $E_n^{(2)}$ над $U_2^{\max}$ не превосходит $\frac{\hbar^2}{8R^2}$.

Данный результат инициирует следующую задачу. Пусть M – риманово многообразие бесконечного объема и $-\Delta + U(x)$ – оператор Шредингера на $M \ni x$, причем $U_{\max} = \sup U(x) < \infty$. Требуется найти оценку сверху для $E_n - U_{\max}$, где E_n – собственные значения данного оператора.

Все указанные выше формулы для собственных значений показывают, что квазиклассический предел эквивалентен евклидову в том смысле, что и при $\hbar \rightarrow 0$, и при $R \rightarrow \infty$ главным членом асимптотики собственных значений является соответствующая классическая формула в евклидовом пространстве.

Автор выражает благодарность за полезные обсуждения данных результатов С. Ю. Доброхотову, В. В. Белову, М. В. Карасеву и А. И. Шафаревичу, который также обратил внимание автора на работы [2–5].

Список литературы

- [1] П. Э. Анпель. Теоретическая механика. М.: ИЛ, 1960.
- [2] J. J. Slawianowski. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. phys. et astron. 1980. V. 28. № 2. P. 99–108.
- [3] В. В. Козлов. Вест. МГУ. Сер. 1, Матем. механ. 1994. № 2. С. 28–35.
- [4] J. J. Slawianowski, J. Slominski. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. phys. et astron. 1980. V. 28. № 2. P. 83–94.
- [5] V. V. Kozlov, A. O. Harin. Celest. Mech. and Dynam. Astron. 1992. V. 54. P. 393–399.
- [6] М. М. Постников. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.
- [7] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [8] В. В. Белов, Е. М. Воробьев. Сборник задач по дополнительным главам математической физики. М.: Высш. школа, 1978.
- [9] Б. Саймон, М. Рид. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
- [10] Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кириш, Б. Саймон. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [11] Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [12] В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.
- [13] Справочник по специальным функциям. Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 19.II.1996 г.

A. V. Shchepetilov

SOME QUANTUM MECHANICAL
PROBLEMS IN LOBACHEVSKY SPACE

For potentials, being the solutions of Bertrand's problem in Lobachevsky space, quantum mechanical problems are considered. The self-adjointness of the corresponding Schrödinger operators is proved. Energy levels are calculated both from Schrödinger equation and by the Bohr–Sommerfeld method. The effect of quantum binding of classical infinite states is discovered. It is shown that the semiclassical limit is equivalent in some sense to the Euclidean one.