Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Аллахвердян, Д. Б. Саакян, Поправки конечного объема к намагниченности в спин-стекольной фазе модели Дерриды, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 3, 422–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:07:09

А. Э. Аллахвердян*, Д. Б. Саакян*†

ПОПРАВКИ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА К НАМАГНИЧЕННОСТИ В СПИН-СТЕКЛЬНОЙ ФАЗЕ МОДЕЛИ ДЕРРИДЫ

Рассматривается модель случайных энергий. В спин-стекольной фазе намагниченность затухает экспоненциально с ростом объема. Эта намагниченность соответствует вероятности правильного декодирования в ситуации, когда скорость передачи превосходит пропускную способность канала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Дерриды [1] является простейшим примером спинового стекла. В первом порядке нарушения репличной симметрии ее спектр известен точно [2]. В работе [3] была выдвинута гипотеза о том, что модель Дерриды дает пример оптимального кодирования. Эта гипотеза была доказана в [4, 5].

С точки зрения теории информации интересно вычислить намагниченность (с точностью до поправок конечного объема включительно), которая определяет вероятность безошибочного декодирования. Представляют интерес поправки конечного объема к намагниченности в трех случаях:

- 1) в ферромагнитной фазе,
- 2) в спин-стекольной фазе,
- 3) в точке перехода ферромагнетизм–спиновое стекло.

В [6] и [7] исследовалась первая задача в случае полностью связанной модели Дерриды.

В настоящей статье решается вторая задача в случае слабосвязанной системы. Для данной конфигурации N спинов $\xi = \pm 1$ строится гамильтониан $H(\tau_j, \sigma_i)$ для N спиновых переменных $\sigma_i = \pm 1$ (зависящий также от $Z = \alpha N$ констант $\tau_j = \pm 1$), который имеет единственный глобальный минимум при

$$\sigma_i = \xi_i. \quad (1)$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} \sum_{j=1}^z C_{i_1 \dots i_p}^j \tau_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}, \quad (2)$$

*Ереванский физический институт

†E-mail: saakian@vxl.yerphi.am

где

$$\tau_{i_1 \dots i_p} = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_p}, \quad (3)$$

а коэффициенты $C_{i_1 \dots i_p}^j$ случайным образом принимают значения 0 или 1, так что для любого $1 \leq j \leq Z$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} C_{i_1 \dots i_p}^j = 1. \quad (4)$$

Таким образом, в задаче фигурируют Z ненулевых констант связи τ^j :

$$\tau^j \equiv C_{i_1 \dots i_p}^j \tau_{i_1 \dots i_p}. \quad (5)$$

При наличии шума, когда наши константы τ^j с вероятностью $\frac{1+m}{2}$ сохраняют свой знак и с вероятностью $\frac{1-m}{2}$ меняют его, все равно состояние (1) остается единственным основным состоянием с намагниченностью близкой к 1 (при низких температурах):

$$\langle \sigma_i \xi_i \rangle = 1 - A \exp[-ZE(N/Z, m)], \quad (6)$$

где E – функция надежности. При этом требуется, чтобы соблюдалось неравенство Шеннона:

$$Z \left[\ln 2 + \frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2} \right] \geq N \ln 2. \quad (7)$$

Иначе в случае $Z > N$ при низких температурах система перейдет в спин-стекольную фазу, где вместо (6) будем иметь

$$\langle \sigma_i \xi_i \rangle = A \exp[-ZE_1(N/Z, m)] \quad (8)$$

и $E > 0$.

Величина $\langle \sigma_i \xi_i \rangle$ дает вероятность того, что мы можем правильно восстановить первоначальную конфигурацию ξ_i (численными методами поиска минимума функции H). В теории информации этой величине соответствует вероятность декодирования без ошибок. Функции E и E_1 являются универсальными. Вид E известен лишь в некоторой области значений переменных [7]. Функция E_1 известна для оптимального случая при всех значениях переменных [8]. Мы покажем в данной работе, что модель Дерриды дает этот (экстремальный, универсальный) результат.

2. ВЫВОД МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ЭНЕРГИЙ СО СЛАБОЙ СВЯЗАННОСТЬЮ И АСИММЕТРИЧНЫМИ КОНСТАНТАМИ

Определим функцию распределения для M конфигураций σ_i^α с уровнями энергии E_α :

$$P(E_1 \dots E_M) = \langle \delta(E_1 - H(\sigma_i^1)) \dots \delta(E_M - H(\sigma_i^M)) \rangle. \quad (9)$$

Если бы мы смогли продолжить это выражение до $M = 2^N$, то вычислили бы, что

$$\langle \ln Z(\tau, T) \rangle = \int \prod_{\alpha=1}^{2^N} dE_\alpha P(E_1 \dots E_{2^N}) \ln \sum_{\alpha=1}^{2^N} \exp(-BE_\alpha). \quad (10)$$

Для вывода (10) использован тот факт, что у нашей системы всего 2^N уровней энергии. Мы рассмотрели систему Z как функцию от 2^N переменных E_α .

Используя представление Фурье для δ -функции, получим

$$P(E_1 \dots E_M) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \prod_{\alpha=1}^M \frac{d\hat{E}_\alpha}{2\pi} \times \\ \times \exp \left[\sum_{\alpha=1}^M \hat{E}_\alpha E_\alpha - \sum_{\alpha} \hat{E}_\alpha \sum_{j=1}^Z \sum_{i_1 \dots i_p} \tau_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1}^\alpha \dots \sigma_{i_p}^\alpha \dots C_{i_1 \dots i_p}^j \right]. \quad (11)$$

Применяя стандартное представление

$$\exp(a\sigma) = \text{ch}(a) [1 + \text{th}(a)\sigma] \quad (12)$$

для $\sigma = \pm 1$, находим, разлагая выражение

$$\prod_{i_1 \dots i_p} [\text{ch}(\hat{E}_1) + m \text{sh}(\hat{E}_1)] \prod_{\alpha=2}^M \text{ch}(\hat{E}_\alpha) [1 + \text{th}(\hat{E}_\alpha) \sigma_{i_1}^\alpha \dots \sigma_{i_p}^\alpha], \quad (13)$$

следующее выражение для $P(E_1 \dots E_M)$:

$$P(E_1 \dots E_M) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \prod_{\alpha=1}^M \frac{d\hat{E}_\alpha}{2\pi} \exp(\hat{E}_\alpha E_\alpha) \{ \text{ch}(\hat{E}_1) + m \text{sh}(\hat{E}_1) \} \prod_{\alpha=1}^M \text{ch}(\hat{E}_\alpha). \quad (14)$$

При выводе (14) мы пренебрегли малыми членами порядка

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq N} (\sigma_{i_1}^\alpha \sigma_{i_1}^B \dots \sigma_{i_p}^\alpha \sigma_{i_p}^B) / C_N^P. \quad (15)$$

3. СПИН-СТЕКОВЫЙ ФАЗА

Мы хотим найти среднюю намагниченность в спин-стекловой фазе, где она мала. Вычислим среднее значение спина в узле 1. Всю совокупность $M = 2^N$ спиновых конфигураций делим на две части: для $1 - \frac{M}{2}$ конфигураций первой части спин $\sigma_1 = 1$ и для $1 + \frac{M}{2} - M$ второй — $\sigma_1 = -1$. Поэтому для намагниченности имеем выражение

$$\langle \langle \tau \rangle_T \rangle_J = \int \prod_{\alpha=1}^M dE_\alpha P(E_1 \dots E_M) \left(\sum_{\alpha=1}^{M/2} e^{-BE_\alpha} - \sum_{\alpha=\frac{M}{2}+1}^M e^{-BE_\alpha} \right) / \sum_{\alpha} e^{-BE_\alpha}. \quad (16)$$

Используя формулу

$$\int e^{-tZ} dt = 1/Z, \quad (17)$$

получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty dt \left\{ \int \prod_{\alpha=1}^M dE_\alpha P_1(E_1) P_1(E_2) \dots P(E_M) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[e^{-BE_1} + \sum_{\alpha=1}^{M/2} e^{-BE_\alpha} - \sum_{\alpha=M/2+1}^M e^{-BE_\alpha} \right] \right\} e^{-tE_1 \sum_{\alpha=1}^M e^{-BE_\alpha}} = \\
& = \int_0^\infty dt \left(\int_{-\infty}^\infty dE_1 P_1(E_1) e^{-BE_1 - te^{-BE_1}} \right) \left(\int_{-\infty}^\infty dE_2 P(E_2) e^{-BE_2 - te^{-BE_2}} \right)^{M-2} - \\
& \quad - \int_{-\infty}^\infty dE_1 P_1(E_1) e^{-te^{-BE_1}} \int_{-\infty}^\infty dE_2 P(E_2) e^{-BE_2 - te^{-BE_2}} \times \\
& \quad \times \left(\int_{-\infty}^\infty dE_2 e^{-te^{-BE_2}} \right)^{M-2}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Функции распределения энергии для первой конфигурации σ_i^1 и для остальных $M-1$ конфигураций σ_i^α , $\alpha > 1$, определены в (14). Перейдем к новой переменной $u = \ln t$. Определим функции

$$G_1(U) = \frac{1}{2\pi i} \int d\hat{E} e^{\hat{E} - e^{-BE+U} + \alpha N \ln \operatorname{ch} \hat{E}}, \tag{19}$$

$$G_2(U) = \frac{1}{2\pi i} \int d\hat{E} e^{\hat{E} - e^{-BE+U} + \alpha N \ln(\operatorname{ch} \hat{E} - m \operatorname{sh} \hat{E})}. \tag{20}$$

Делая подстановку $\hat{E} \rightarrow Be$ и выполняя интегрирование по E , легко получить

$$G_1(U) = \frac{1}{2\pi i} \int \exp\{-eU + \alpha N \ln \operatorname{ch} Be\} \Gamma(e) de, \tag{21}$$

$$G_2(U) = \frac{1}{2\pi i} \int \exp\{-eU + \alpha N \ln(\operatorname{ch} Be - m \operatorname{sh} Be)\} \Gamma(e) de. \tag{22}$$

При этом имеем равенство

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty P(E) dE e^{-BE - te^{-BE}} &= -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^\infty P(E) e^{-te^{-BE}} dE = \\
&= -e^{-U} \frac{d}{dU} \int P(E) e^{-e^{-BE+U}} dE. \tag{23}
\end{aligned}$$

Используя выражения (21), (22), перепишем (18) в виде

$$\int_{-\infty}^\infty dU [-G_1'(U) G_2(U)^{M-1} + G_2(U) G_2'(U) G_2(U)^{M-2}]. \tag{24}$$

Для функций $G_1(U)$ и $G_2(U)$ методом перевала легко получить асимптотики

$$G_1(U) \approx \begin{cases} 1 - \exp[-\alpha N f(x)], & m > -x, \\ \exp[-\alpha N f(x)], & m < -x, \end{cases} \tag{25}$$

$$G_2(U) \approx \begin{cases} 1 - \exp[-\alpha N g(x)], & x < 0, \\ \exp[-\alpha N g(x)], & x > 0, \end{cases} \tag{26}$$

где $x = U/\alpha NB$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ определены следующим образом:

$$g(x) = \ln 2 + \frac{1+x}{2} \ln \frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} \ln \frac{1-x}{2}, \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{1+x}{2} \ln \frac{1+x}{1+m} + \frac{1-x}{2} \ln \frac{1-x}{1-m}. \quad (28)$$

Определим x_c из уравнения

$$\alpha g(x_c) = \ln 2. \quad (29)$$

Ферромагнитная фаза при низких температурах возникает, если

$$m > x_c. \quad (30)$$

Из формулы (25) видно, что $G_1(U)$ имеет разрыв в точке $x = -m$. Точно так же функция $G_2(U)^{2^N}$ при $N \rightarrow \infty$ имеет разрыв при $x = -x_c$. Интегрируя (24) по частям, с учетом (28) получим

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} d[G'_1 G_2^{M-1}] - \frac{M}{M-1} \int G'_1 G_2^{M-1} = \\ &= -\frac{1}{M-1} - \frac{M}{M-1} \int_{-\infty}^{-x_1} G'_1 G_2^{M-1} \simeq A e^{-\alpha N f(-x_c)}. \end{aligned} \quad (31)$$

При выводе (31) мы использовали тот факт, что точка перевала находится вне интервала $[-\infty, -x_c]$. Выражение (31) соответствует вероятности безошибочного декодирования, когда скорость передачи больше пропускной способности [8].

Интересно также было рассмотреть случай критического значения C на границе ферромагнитных спин-стекольных фаз.

Д.Б. Саакян благодарен И. Костову за гостеприимство в Сакле. Работа была поддержана МНФ (грант MVM000), Министерством исследований и технологии ФРГ (грант 211-523), НАТО (грант LG 9303057) и INTAS (грант INTAS-93-633).

Список литературы

- [1] *B. Derrida*. Phys. Rev. Lett. 1980. V. 55. P. 79.
- [2] *D. Gross, M. Mezard*. Nucl. Phys. 1984. V. B240. P. 43.
- [3] *N. Soarlas*. Nature. 1989. V. 239. P. 693.
- [4] *Д. Б. Саакян*. Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 55. № 3. С. 198.
- [5] *D. Saakian*. Phys. Lett. 1993. V. A180. P. 169.
- [6] *Д. Б. Саакян*. Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61. № 8. С. 631.
- [7] *A. Allakhverdyan, D. Saakian*. Preprint cond.matt/95.06.007.
- [8] *И. Чусар, Я. Корнер*. Теория информации. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 24.VIII.1995 г.

A. E. Allakhverdyan, D. B. Saakian

FINITE VOLUME CORRECTIONS TO MAGNETIZATION IN THE SPIN-GLASS PHASE OF DERRIDA MODEL

The random energy model is considered. In the spin-glass phase magnetization disappears exponentially by volume. The magnetization corresponds to the probability of correct decoding, when the information transmission rate exceeds the channel capacity.