Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Эскин, Об интегральном уравнении теории фазовых переходов в системе магнитных стержней, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 3, 427–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:07:00

Л. Д. Эскин*

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В СИСТЕМЕ МАГНИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Изучается нелинейное интегральное уравнение для ориентационной функции распределения (ОФР), описывающей анизотропное нематическое упорядочение в системе магнитных стержней. Для сильно вытянутых стержней дана классификация точек бифуркации и найдена их асимптотика в предельных случаях малых и больших магнитных моментов стержней. Развита алгоритм для построения в окрестности точки бифуркации ОФР, близкой к изотропной. Показано, что как в случае малых, так и в случае больших магнитных моментов полученные решения (ОФР) обладают левым направлением бифуркации. Однако для промежуточной области значений магнитных моментов, кроме решений с левым направлением бифуркации, существуют и решения с правым направлением.

1. В серии работ Онсагера, Лешера, Готтер, Кайзера и Ревече [1–4] подробно исследовались термодинамические свойства системы вытянутых жестких цилиндрических стержней ($\delta = dl^{-1} \ll 1$, d – диаметр, l – длина стержня) с парным взаимодействием типа стерического отталкивания (модель Онсагера исключенного объема). Было показано, что в системе, ориентационно разупорядоченной (изотропной) при малых концентрациях, с увеличением концентрации происходит фазовый переход первого рода в анизотропную ориентационно упорядоченную фазу, трактуемую как жидкокристаллический нематик. Все термодинамические свойства изотропной фазы описываются равномерной функцией распределения ориентаций осей частиц – ОФР $f(\mathbf{n}) = 1$ ($\mathbf{n}$ – орт стержня), термодинамические свойства нематика описываются отличной от единицы ОФР, имеющей единственный максимум в направлении директора (направление преимущественной ориентации осей) и симметричной относительно поворотов вокруг этого направления и при замене $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$. Для ОФР нематика Онсагером из условия минимума свободной энергии системы, вычисленной в приближении второго вириального коэффициента, было получено нелинейное интегральное уравнение, бифуркационный анализ которого показал, что существует единственная точка бифуркации – объемная концентрация $\varphi = 4dl^{-1}$, в которой от изотропной фазы ответвляется решение, описывающее нематик. Это решение наиболее полно и строго с помощью численных методов исследовалось в [4]. Достаточно полный обзор полученных результатов приводится в работе Семенова и Хохлова [5].

* Казанский государственный университет

Большой теоретический и прикладной интерес представляет исследование фазовых переходов в системе вытянутых цилиндрических магнитных стержней (с магнитным моментом $\mathbf{m}$ на единицу длины стержня). Цеберс [6], представив с помощью метода коллективных переменных [7] свободную энергию системы в приближении хаотических фаз в виде функционала от ОФР, показал с помощью критерия термодинамической устойчивости, что изотропная фаза теряет устойчивость уже при весьма низких концентрациях. Следует отметить, что в [6] учитывалось лишь дальнедействующее диполь-дипольное взаимодействие, чем и вызвано применение метода коллективных переменных. Учет короткодействующего стерического отталкивания выполнен автором и Корневым в работе [8], где вычислена свободная энергия системы и найдено нелинейное интегральное уравнение для ОФР, на основе которого начато изучение фазовых переходов из изотропной фазы в анизотропный нематик. Там же показано, что в системе магнитных стержней со стерическим отталкиванием число точек бифуркации интегрального уравнения для ОФР может меняться от одной до трех в зависимости от магнитного момента $\mathbf{m}$, формфактора δ и температуры T , что приводит к большему, чем в моделях Онсагера или Цеберса, разнообразию возможных антиферромагнитных жидкокристаллических состояний системы, именно такая сложная картина фазовых переходов и наблюдается в эксперименте (см. [9] и цитированную там литературу). Отметим, что модель Онсагера ($\mathbf{m} = 0$) характеризуется единственной точкой бифуркации, не зависящей от температуры, фазовый переход атермичен.

В настоящей работе на основе теории Ляпунова–Шмидта [10] развит алгоритм построения решений интегрального уравнения для ОФР [8], близких к изотропному. В п. 2 и 3 проведен бифуркационный анализ интегрального уравнения для ОФР. Указаны (при $\delta \ll 1$) границы, разделяющие области с различным числом точек бифуркации. Найден асимптотический вид точек бифуркации в предельных случаях малых (обобщение формулы Онсагера для бифуркационного значения объемной концентрации) и больших дипольных моментов. В п. 4 на основе результатов п. 3 развит алгоритм, позволяющий для ОФР, близких к изотропной, строить разложение в ряд по степеням отклонения концентрации от ее бифуркационного значения. Здесь проведены все вычисления для ОФР и параметра порядка с точностью до членов второго порядка малости включительно. Оказалось, что в случае малых и больших дипольных моментов построенное решение характеризуется левым направлением бифуркации. Для модели Онсагера аналогичный результат был ранее получен Кайзером и Ревече [4]. Однако в промежуточной области, когда фиксированному значению дипольного момента отвечают три точки бифуркации, наряду с решениями с левым направлением бифуркации существуют и решения с правым направлением.

2. В работе [8] из условия минимума свободной энергии системы вытянутых цилиндрических магнитных стержней в приближении хаотических фаз по дальнедействующему диполь-дипольному взаимодействию и второго вириального коэффициента для стерического отталкивания в случае антиферромагнитного состояния системы для плотности $f(\mathbf{n})$ ОФР осей стержней было получено нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \nu + \ln f(\mathbf{n}') + \lambda \delta (2\pi\gamma)^{-1} \int B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') f(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n} - \\ - \frac{\gamma\lambda}{\pi^2} \int \frac{B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z) f(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n}}{z^2 (1 + 2\lambda z^{-2} \int f(\mathbf{n}) \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{n}z/2) d^2\mathbf{n})} d^2\mathbf{k} dz = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}$ – орты, $d^2\mathbf{n} = (4\pi)^{-1} \sin\theta d\varphi d\theta$, $d^2\mathbf{k} = \sin\theta_0 d\varphi_0 d\theta_0$ ($\varphi, \theta, \varphi_0, \theta_0$ – сферические координаты ортов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$, соответственно), ядра B_1 и B_2 равны

$$B_1 = (1 - (\mathbf{nn}')^2)^{1/2}, \quad B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z) = \sin^2(\mathbf{kn}z/2) \sin^2(\mathbf{kn}'z/2),$$

$\mathbf{nn}', \mathbf{kn}, \mathbf{kn}'$ – скалярные произведения векторов, безразмерный параметр $\lambda = 8\pi\beta c \mathbf{m}^2 l^2$ пропорционален параметру магнитодипольного взаимодействия, определенному по среднему расстоянию между частицами, а $\gamma = 2\beta(\mathbf{ml})^2/l^3$ имеет смысл параметра магнитодипольного взаимодействия, определенного по длине частицы [6, 8], $c = N/V$ – плотность системы, $\beta = (k_B T)^{-1}$ (k_B – постоянная Больцмана). Интегрирование в (2.1) проводится по $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ по поверхности сферы, а по z – от 0 до ∞ . Неизвестное слагаемое ν не зависит от $\mathbf{n}'$ и определяется условием нормировки

$$\int f(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n} = 1. \quad (2.2)$$

Направив полярную ось сферической системы координат по направлению директора, получим, что функция $f(\mathbf{n})$, описывающая антиферромагнитный нематик, кроме уравнения (2.1) и условия нормировки (2.2), должна удовлетворять и дополнительным условиям: а) $f(\mathbf{n}) = f(-\mathbf{n})$, б) $f(\mathbf{n})$ не зависит от угла φ , т.е. $f(\mathbf{n}) = f(\theta)$, в) $f(0) = f(\pi) = \max$, других максимумов $f(\mathbf{n})$ не имеет.

Из условий “а” и “б” следует, что $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ и разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра $P_{2s}(\mathbf{n}) = P_{2s}(\cos\theta)$. Отметим, что среди полиномов P_{2s} условию “в” удовлетворяет лишь P_2 , что существенно используется ниже.

3. Проведем бифуркационный анализ уравнения (2.1). Прежде всего отметим, что, используя известную формулу Бауэра для разложения $\exp(iz \cos\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра [11] и теорему сложения для сферических функций [12], нетрудно найти

$$\int \sin^2(\mathbf{kn}z/2) P_{2s}(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n} = m_s(z) P_{2s}(\mathbf{k}), \quad (3.1)$$

$$m_0 = 2^{-1}(1 - z^{-1} \sin z), \quad m_s = (-1)^{s+1} 2^{-1} \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} J_{2s+1/2}(z).$$

Отметим, что функции Бесселя $J_{2s+1/2}$ являются элементарными.

Перейдем к изучению бифуркаций уравнения (2.1). Изотропное решение $f(\mathbf{n}) = 1$ удовлетворяет уравнению (2.1) при подходящем выборе $\nu = \nu(\lambda, \gamma, \delta)$ при любых λ, γ, δ . Нашей задачей является изучение решений уравнения (2.1), удовлетворяющих условию нормировки (2.2) и условиям “а” – “в” и отличным от изотропного. Каждое такое решение описывает антиферромагнитный нематик и полностью определяет все его термодинамические свойства, в том числе свободную энергию системы. Полагая $f(\mathbf{n}) = 1 + h(\mathbf{n})$ и линеаризуя уравнение (2.1) около $f(\mathbf{n}) = 1$, придем с помощью формулы (3.1) с $s = 0$ к линейному интегральному уравнению

$$Ah = h - \int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda) h(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n} = 0$$

с ядром

$$\begin{aligned} B &= -\lambda\delta(2\pi\gamma)^{-1}B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') + \lambda\gamma\pi^{-2}B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda), \\ B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda) &= \int_0^\infty \frac{\int B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z) d^2\mathbf{k}}{z^2(1 + \lambda\rho(z))^2} dz, \\ \rho &= 2z^{-2}m_0 = z^{-2}(1 - z^{-1}\sin z). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ядро B симметрично по аргументам $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. Второе важное свойство ядра B – его инвариантность при одновременном повороте ортов $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ вокруг начала координат. Отсюда следует [4], что собственными функциями ядра B , удовлетворяющими условиям “а” и “б”, будут полиномы Лежандра P_{2s} . Ядро B_1 разлагается в ряд по полиномам Лежандра [12]:

$$B_1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} (4k+1) \frac{(2k-3)!!(2k-1)!!}{2^{2k+1}k!(k+1)!} P_{2k}(\mathbf{nn}') \right). \quad (3.3)$$

Снова используя теорему сложения для сферических функций и соотношения (3.1)–(3.3), найдем

$$\begin{aligned} \int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda) P_{2s}(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n} &= N_s(\lambda, \gamma, \delta) P_{2s}(\mathbf{n}'), \\ N_s &= \frac{(2s-3)!!(2s-1)!!\lambda\delta}{2^{2s+3}s!(s+1)!\gamma} + \frac{4\lambda\gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{m_s^2 dz}{z^2(1 + \lambda\rho)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Бифуркационное уравнение для нелинейного интегрального уравнения (2.1) получим, приравняв единице собственное значение N_s ядра B при $s = 1$. Обозначив $g_1 = \lambda\gamma^{-1} - \delta(\lambda/\gamma)^2/64$,

$$g_2 = \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F^2 dz}{z^2(1 + \lambda\rho)^2}, \quad F = 2m_1(z) = z^{-3}(3\sin z - 3z\cos z - z^2\sin z),$$

запишем бифуркационное уравнение в виде

$$g_1(\lambda, \gamma, \delta) = g_2(\lambda). \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) было анонсировано без вывода в [8], оно определяет бифуркационное значение λ_b параметра λ (а вместе с ним и бифуркационное значение плотности $c_b = (8\pi\beta\mathbf{m}^2 l^2)^{-1}\lambda_b$). При $\lambda = \lambda_b$ от изотропного решения ответвляется анизотропная ветвь.

Решениями уравнения (3.5) (точками бифуркации $\lambda_b = \lambda_b(\gamma, \delta)$) являются абсциссы точек пересечения кривых $y = g_1$ и $y = g_2$ в плоскости λ, y . Функция $g_2(\lambda)$ монотонно возрастает от 0 до ∞ и имеет единственную точку перегиба (она без труда находится численно), слева от точки перегиба кривая g_2 выпукла вниз, справа – вверх. Нам понадобятся далее асимптотики функций g_2, g_2', g_2'' при $\lambda \gg 1$. Можно показать, что

$$g_2 \sim \lambda^{1/2}/8, \quad g_2' \sim (16\lambda^{1/2})^{-1}, \quad g_2'' \sim -(32\lambda^{3/2})^{-1}. \quad (3.6)$$

Кривая g_1 при любых γ, δ – парабола с вершиной $D(32\gamma/\delta, 16/\delta)$, ее восходящая ветвь пересекает ось λ в начале координат, а нисходящая – в точке $M(64\gamma/\delta, 0)$. При увеличении γ вершина параболы перемещается вправо по прямой $y = 16/\delta$, а точка M – вправо

Графики кривых: 1 — $y = g_2(\lambda)$, 2 — парабола в случае $\gamma = \gamma_R$, 3 — парабола в случае $\gamma = \gamma_Q$

по оси λ , парабола все более вытягивается вдоль оси λ . Кривая g_2 не меняется с изменением γ . Из (3.6) следует, что кривая g_2 пересекает в некоторой точке P прямую $y = 16/\delta$. При некотором $\gamma = \gamma_P$ вершина параболы совпадает с точкой P . Абсцисса λ_P точки P будет, очевидно, точкой бифуркации. С помощью (3.6) нетрудно найти

$$\lambda_P \sim 2^{14}\delta^{-2}, \quad \gamma_P = \delta\lambda_P/32 \sim 2^9\delta^{-1}. \quad (3.7)$$

Условие касания параболы и кривой g_2 записывается в виде системы уравнений

$$\lambda\gamma^{-1} - \frac{\delta(\lambda/\gamma)^2}{64} = g_2(\lambda), \quad \gamma^{-1} - \frac{\delta\lambda}{32\gamma^2} = g'_2, \quad (3.8)$$

определяющей абсциссу λ точки касания и параметр γ параболы, касающейся кривой g_2 . Решение системы (3.8) следует искать в виде разложений по степеням δ . Возможны как ограниченные при $\delta \rightarrow 0$ решения, так и неограниченные. Оказывается, что существует единственное решение первого типа, имеющее вид $\lambda_R = \lambda_0 + O(\delta)$, $\gamma_R = \gamma_0 + O(\delta)$, причем из (3.8) следует

$$\gamma_0 = (g'_2(\lambda_0))^{-1}, \quad (3.9)$$

а λ_0 — единственное решение уравнения

$$\lambda g'_2(\lambda) = g_2(\lambda) \quad (3.10)$$

(оно легко находится численно). С помощью (3.6) нетрудно найти, что для единственного неограниченного решения λ_Q, γ_Q системы (3.7) справедлива асимптотика

$$\lambda_Q \sim 2^{20} \cdot 3^{-4}\delta^{-2}, \quad \gamma_Q \sim 2^{14} \cdot 3^{-3}\delta^{-1} \quad (\lambda_Q < \lambda_P, \quad \gamma_Q > \gamma_P). \quad (3.11)$$

Таким образом, имеем две точки касания параболы и кривой g_2 : парабола с параметром γ_R касается g_2 в точке R с абсциссой λ_R , парабола с параметром γ_Q — в точке Q с абсциссой λ_Q . Точки R и Q лежат на выпуклой вверх части кривой g_2 , где $g''_2 < 0$. С учетом этого факта можно показать, что если δ достаточно мало, то парабола g_1 , касающаяся в точке R кривой g_2 , расположена в окрестности R выше g_2 (касание извне). Наоборот, используя асимптотику (3.11), нетрудно доказать, что парабола, касающаяся g_2 в точке Q , расположена в окрестности Q ниже кривой g_2 (касание изнутри). Проведенный анализ показывает, что в зависимости от величины γ возможны лишь следующие случаи (см. рисунок; без обоснования эти случаи были указаны в [8]):

1) $0 < \gamma < \gamma_R$, бифуркационное уравнение имеет одно решение (точку бифуркации) – абсциссу λ_b точки пересечения нисходящей (правой) ветви параболы с кривой g_2 , $\lambda_b(\gamma, \delta) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$;

2) $\gamma = \gamma_R$, имеются два решения бифуркационного уравнения: $\lambda_b = \lambda_R$ и абсцисса точки пересечения нисходящей ветви параболы с g_2 ;

3) $\gamma_R < \gamma \leq \gamma_P$, существуют три точки бифуркации: абсциссы двух точек пересечения восходящей ветви параболы с g_2 и абсцисса точки пересечения нисходящей ветви параболы с g_2 ;

4) $\gamma_P < \gamma \leq \gamma_Q$, имеются две точки бифуркации: абсциссы двух точек пересечения (при $\gamma = \gamma_Q$ одна из них – точка касания Q) восходящей ветви параболы с g_2 ;

5) $\gamma > \gamma_Q$, существует одна точка бифуркации: абсцисса точки пересечения восходящей ветви параболы с g_2 .

При $\mathbf{m} = 0$ (частицы немагнитны) $\lambda = \gamma = 0$, но $\lambda\gamma^{-1} = 4\pi cl^3$, и из бифуркационного уравнения (3.5) находим единственную точку бифуркации с объемной концентрацией $\varphi_b = \pi c_b d^2 l / 4 = 4d/l$. Это известный результат Онсагера [1].

Рассмотрим случай малого дипольного момента, а именно случай $64\gamma \ll \delta$. Всегда справедлива оценка $\lambda_b < 64\gamma/\delta$, так что вместе с γ мало и λ_b , которое можно искать в виде ряда

$$\lambda_b = \alpha_1 \gamma + \alpha_2 \gamma^2 + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение (3.5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях γ , найдем

$$\alpha_1 = 64/\delta, \quad \alpha_2 = -\kappa \alpha_1^2 / \pi, \quad \kappa = \int_0^\infty (F/z)^2 dz. \quad (3.12)$$

Для объемной концентрации находим $\varphi_b = 4d/l - 256\kappa\gamma^2/\pi + \dots$. Как и следовало ожидать, диполь-дипольное взаимодействие смещает точку бифуркации влево. В противоположном предельном случае больших магнитных моментов $\gamma \gg \gamma_Q$ решение уравнения (3.5) ищем в виде

$$\lambda_b = \beta_1 \gamma^{-1} + \beta_2 \gamma^{-2} + \beta_3 \gamma^{-3} + \dots, \quad (3.13)$$

найдем

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \pi/\kappa, & \beta_2 &= 2\pi^2 \kappa_1 / \kappa^3, & \beta_3 &= 8\pi^3 \kappa_1^2 \kappa^{-5} - 3\pi^3 \kappa_2 \kappa^{-4} - \delta\pi^2 (64\kappa^2)^{-1}, \\ \kappa_1 &= \int_0^\infty (F/z)^2 \rho dz, & \kappa_2 &= \int_0^\infty (F\rho/z)^2 dz. \end{aligned}$$

Для объемной концентрации получаем $\varphi_b = (\delta/\gamma)^2 (\beta_1 + \beta_2 (2\gamma)^{-1} + \beta_3 (2\gamma^2)^{-1} + \dots)$.

4. При заданных γ и формфакторе δ точку бифуркации $\lambda_b(\gamma, \delta)$ (решение уравнения (3.5)) будем называть невырожденной, если для всех $s > 1$ имеем $N_s(\lambda_b, \gamma, \delta) \neq 1$, в противном случае точку бифуркации будем называть вырожденной. Случай невырожденной точки бифуркации – случай общего положения, случай вырожденной точки бифуркации – исключительный. Для невырожденной точки бифуркации мы построим

решение нелинейного интегрального уравнения (2.1), отвечающее при $\lambda = \lambda_b$ от изотропного и удовлетворяющее условию нормировки (2.2), записанному в виде

$$\int h(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} = 0, \quad (4.1)$$

и условиям “а”–“в” (п. 2). С этой целью преобразуем уравнение (2.1). В процессе преобразований неизвестная постоянная ν будет меняться, но мы сохраним за ней старое обозначение. Положим

$$\alpha(z, \mathbf{k}) = 2z^{-2} \int h(\mathbf{n}) \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{n}z/2) d^2 \mathbf{n},$$

$$I = \lambda \iint_0^\infty \frac{\int B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z) f(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n}}{z^2 (1 + 2\lambda z^{-2} \int f(\mathbf{n}) \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{n}z/2) d^2 \mathbf{n})} d^2 \mathbf{k} dz.$$

Будем иметь

$$I = \frac{1}{2} \iint_0^\infty \frac{\sin^2(\mathbf{k}\mathbf{n}'z/2)(\lambda\rho + \lambda\alpha)}{1 + \lambda\rho + \lambda\alpha} d^2 \mathbf{k} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^\infty (-1)^{i+1} (2\lambda)^i \int_0^\infty \frac{\int B_{2i} h(\mathbf{n}_1) \dots h(\mathbf{n}_i) d^2 \mathbf{n}_1 \dots d^2 \mathbf{n}_i d^2 \mathbf{k}}{z^{2i} (1 + \lambda\rho)^{i+1}} dz +$$

$$+ \pi\lambda \int_0^\infty \frac{\rho^2 z^2 dz}{(1 + \lambda\rho)^2},$$

$$B_{2i} = \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{n}'z/2) \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{n}_1z/2) \dots \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{n}_iz/2).$$

Наше преобразование законно, если справедлива оценка

$$|\lambda\alpha| < 1 + \lambda\rho \quad (4.2)$$

(эта оценка во всяком случае справедлива для $h(\mathbf{n})$, ограниченной по модулю не слишком большой величиной, что будет выполняться).

Уравнение (2.1) теперь можно переписать в виде

$$\nu + \sum_{i=1}^\infty (-1)^{i+1} h^i / i + \frac{\delta\lambda}{2\pi\gamma} \int B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') h(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} +$$

$$+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_{i=1}^\infty (-2\lambda)^i \int_0^\infty \frac{\int B_{2i} h(\mathbf{n}_1) \dots h(\mathbf{n}_i) d^2 \mathbf{n}_1 \dots d^2 \mathbf{n}_i d^2 \mathbf{k}}{z^{2i} (1 + \lambda\rho)^{i+1}} dz = 0 \quad (4.3)$$

с некоторой новой константой ν . При $i = 1$ ядро B_{2i} совпадает с ядром $B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z)$. Далее, полагая $\lambda = \lambda_b + \mu$, найдем

$$\frac{\lambda^i}{(1 + \lambda\rho)^{i+1}} = \frac{1}{(1 + \lambda_b\rho)^{i+1}} \sum_{s=0}^\infty p_{si}(z, \lambda_b) \mu^s, \quad (4.4)$$

где

$$p_{si} = \sum_{r+t=s} C_i^r C_{i+t}^i \lambda_b^{i-r} \left(-\frac{\rho}{1+\lambda_b \rho} \right)^t, \quad C_m^k = \begin{cases} \frac{m!}{k!(m-k)!}, & m \geq k, \\ 0, & m < k. \end{cases} \quad (4.5)$$

Представление (4.4) законно в случае выполнения оценки

$$|\mu| \rho \leq 1 + \lambda_b \rho, \quad (4.6)$$

т.е. для всех достаточно малых по модулю значений μ . С учетом (4.4) интегральное уравнение (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} Ah = h - \int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda_b) h(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} &= \nu + \sum_{i=2}^{\infty} (-h)^i / i - \frac{\delta \mu}{2\pi \gamma} \int B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') h(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} + \\ &+ \frac{\gamma}{\pi^2} \sum_{i=2}^{\infty} (-2)^{i-1} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_{si} \mu^s}{z^{2i} (1 + \lambda_b \rho)^{i+1}} \int B_{2i} h(\mathbf{n}_1) \dots h(\mathbf{n}_i) d^2 \mathbf{n}_1 \dots d^2 \mathbf{n}_i d^2 \mathbf{k} dz + \\ &+ \frac{\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{s=1}^{\infty} p_{s1} \mu^s}{z^2 (1 + \lambda_b \rho)^2} \int B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z) h(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} d^2 \mathbf{k} dz, \\ p_{s1} &= \frac{(s - \lambda_b \rho)(-\rho)^{s-1}}{(1 + \lambda_b \rho)^s}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

а ядро $B(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda_b)$ совпадает с ядром (3.2) при $\lambda = \lambda_b$, так что полином P_2 является его собственной функцией, принадлежащей собственному значению, равному единице. Константа ν в уравнении (4.7) отличается знаком от константы ν в уравнении (4.3) и вместе с функцией h неизвестна. Мы будем искать так называемое малое решение уравнения (4.7) в виде ряда по степеням μ (метод Ляпунова–Шмидта в теории ветвления решений интегральных уравнений [10]):

$$h = \mu h_1(\mathbf{n}) + \mu^2 h_2(\mathbf{n}) + \dots \quad (4.8)$$

В силу условия нормировки (4.1) будем иметь

$$\int h_i(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} = 0. \quad (4.9)$$

Константу ν также будем искать в виде ряда по степеням μ :

$$\nu = \nu_1 \mu + \nu_2 \mu^2 + \dots \quad (4.10)$$

Коэффициенты $\nu_1, h_1, \nu_2, h_2 \dots$ будем последовательно определять, подставляя разложения (4.8), (4.10) в уравнение (4.7) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ . Выше мы уже отмечали, что ядро B не меняется при одновременном повороте векторов $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$, следовательно, оно зависит лишь от угла между ними. Отсюда получаем, что

$$\int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda_b) d^2 \mathbf{n}'$$

не зависит от $\mathbf{n}$, и симметричность ядра B по аргументам $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$. В силу условия нормировки (4.9) получим, меняя порядок интегрирования в двукратном интеграле,

$$\int Ah_i d^2 \mathbf{n}' = 0. \quad (4.11)$$

Подставляя разложения (4.8) и (4.10) в обе части уравнения (4.7) и сравнивая коэффициенты при первой степени μ , имеем

$$Ah_1 = h_1(\mathbf{n}') - \int B(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \lambda_b) h_1(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} = \nu_1. \quad (4.12)$$

Интегрируя (4.12) по $\mathbf{n}'$, с учетом (4.11) найдем $\nu_1 = 0$, так что $h_1 = \tau_1 P_2$, где константа τ_1 будет определена при построении следующего приближения. Сравнивая коэффициенты при μ^2 , получим

$$\begin{aligned} Ah_2 = \nu_2 + h_1^2/2 - \frac{\delta}{2\pi\gamma} \int B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') h_1(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} - \\ - \frac{2\gamma}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_{02}(z, \lambda_b)}{z^2(1 + \lambda_b \rho)^3} \int B_{22} h_1(\mathbf{n}_1) h_1(\mathbf{n}_2) d^2 \mathbf{n}_1 d^2 \mathbf{n}_2 d^2 \mathbf{k} dz + \\ + \frac{\gamma}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_{11}(z, \lambda_b)}{z^2(1 + \lambda_b \rho)^2} \int B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z) h_1(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} d^2 \mathbf{k} dz. \end{aligned} \quad (4.13)$$

С учетом (3.3), (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \int B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') h_1(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} = -\frac{\pi\tau_1}{32} P_2(\mathbf{n}'), \\ p_{02} = \lambda_b^2, \quad p_{11} = \frac{1 - \lambda_b \rho}{1 + \lambda_b \rho}. \end{aligned}$$

Далее с помощью (3.1) найдем

$$\int B_{22} h_1(\mathbf{n}_1) h_1(\mathbf{n}_2) d^2 \mathbf{n}_1 d^2 \mathbf{n}_2 d^2 \mathbf{k} = \tau_1^2 m_1^2(z) \int \sin^2(\mathbf{k} \mathbf{n}' z/2) P_2^2(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}.$$

Воспользуемся формулами Клебша–Гордана [13]

$$\begin{aligned} P_{l_1} P_{l_2} = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \frac{(2l+1)(l+l_1-l_2)!(l_1+l_2-l)!(l-l_1+l_2)!(g!)^2}{(1+l_1+l_2+l)![(g-l_1)!(g-l_2)!(g-l)!]^2} P_l, \\ g = (l_1 + l_2 + l)/2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

(суммирование ведется по l , имеющим ту же четность, что и $l_1 + l_2$). Из (4.14) получаем

$$P_2^2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2 + \frac{18}{35} P_4. \quad (4.15)$$

С учетом (3.1) найдем

$$\int B_{22} h_1(\mathbf{n}_1) h_1(\mathbf{n}_2) d^2 \mathbf{n}_1 d^2 \mathbf{n}_2 d^2 \mathbf{k} = 4\pi \tau_1^2 m_1^2 \left(\frac{m_0}{5} + \frac{2m_1}{7} P_2(\mathbf{n}') + \frac{18m_2}{35} P_4(\mathbf{n}') \right).$$

Наконец имеем

$$\int B_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{k}, z) h_1(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} d^2 \mathbf{k} = 4\pi \tau_1 m_1^2 P_2(\mathbf{n}').$$

С целью сокращения дальнейших записей обозначим

$$F_{sk}^{ij} = \frac{m_1^i m_2^j}{z^s (1 + \lambda_b \rho)^k}.$$

Теперь уравнение (4.13) примет вид

$$\begin{aligned} Ah_2 = & \nu_2 + \tau_1^2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{7} P_2(\mathbf{n}') + \frac{9}{35} P_4(\mathbf{n}') \right) + \frac{\delta \tau_1}{64\gamma} P_2(\mathbf{n}') - \\ & - \frac{8\gamma \lambda_b^2 \tau_1^2}{\pi} \int_0^\infty F_{43}^{20} \left(\frac{m_0}{5} + \frac{2m_1}{7} P_2(\mathbf{n}') + \frac{18m_2}{35} P_4(\mathbf{n}') \right) dz + \\ & + \frac{4\gamma \tau_1}{\pi} \int_0^\infty (1 - \lambda_b \rho) F_{23}^{20} dz P_2(\mathbf{n}'). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Правая часть в (4.16) – линейная комбинация $P_0 = 1$, P_2 и P_4 . В силу (4.11) коэффициент при P_0 в правой части (4.16) должен равняться нулю. Это условие определяет ν_2 (как функцию τ_1), которая нам не понадобится. Кроме того, необходимым и достаточным условием существования решения h_2 неоднородного линейного уравнения (4.16) с симметричным ядром является ортогональность правой части (4.16) к решению P_2 однородного уравнения $Ah = 0$. Таким образом, в правой части (4.16) должен быть равен нулю и коэффициент при P_2 . Из этого условия получаем уравнение для определения коэффициента τ_1 , из которого находим

$$\tau_1 = 7 \frac{\frac{\delta}{64\gamma} + \frac{\gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - \lambda_b \rho) F^2 dz}{z^2 (1 + \lambda_b \rho)^3}}{\frac{2\gamma \lambda_b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F^3 dz}{z^4 (1 + \lambda_b \rho)^3} - 1}. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.16) теперь принимает вид

$$Ah_2 = \frac{9\tau_1^2}{35} \left(1 - \frac{16\gamma \lambda_b^2}{\pi} \int_0^\infty F_{43}^{21} dz \right) P_4. \quad (4.18)$$

Функцию h_2 , очевидно, следует искать в виде линейной комбинации $h_2 = \tau_2 P_2 + c_1 P_4$ с неизвестными коэффициентами τ_2 и c_1 . С помощью (3.4) при $\lambda = \lambda_b$ найдем

$$Ah_2 = c_1 \left(1 - \frac{\lambda_b \delta}{2^9 \gamma} - \frac{4\lambda_b \gamma}{\pi} \int_0^\infty F_{22}^{02} dz \right) P_4,$$

и из (4.18) следует, что

$$c_1 = \frac{9\tau_1^2 \left(1 - \frac{16\gamma\lambda_b^2}{\pi} \int_0^\infty F_{43}^{21} dz\right)}{35 \left(1 - \frac{\lambda_b\delta}{2^9\gamma} - \frac{4\lambda_b\gamma}{\pi} \int_0^\infty F_{22}^{02} dz\right)}.$$

Коэффициент τ_2 определяется при построении третьего приближения из условия его существования точно так же, как ранее мы нашли коэффициент τ_1 . Перейдем с целью определения τ_2 к построению третьего приближения h_3 . Уравнение для h_3 получим, сравнивая после подстановки разложений (4.8), (4.10) в уравнение (4.7) коэффициенты при μ^3 в его левой и правой частях. Найдем

$$\begin{aligned} Ah_3 = & \nu_3 + h_1 h_2 - h_1^3/3 - \frac{\delta}{2\pi\gamma} \int B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') h_2(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n} + \\ & + \frac{\gamma}{\pi^2} \left[\int_0^\infty F_{22}^{00} \int B_2(p_{21} h_1(\mathbf{n}) + p_{11} h_2(\mathbf{n})) d^2 \mathbf{n} d^2 \mathbf{k} dz + \right. \\ & + 4 \int_0^\infty p_{03} F_{64}^{00} \int B_{23} h_1(\mathbf{n}_1) h_1(\mathbf{n}_2) h_1(\mathbf{n}_3) d^2 \mathbf{n}_1 d^2 \mathbf{n}_2 d^2 \mathbf{n}_3 d^2 \mathbf{k} dz - \\ & - \int_0^\infty F_{43}^{00} \int B_{22} (4p_{02} h_1(\mathbf{n}_1) h_2(\mathbf{n}_2) + \\ & \left. + 2p_{12} h_1(\mathbf{n}_1) h_1(\mathbf{n}_2)) d^2 \mathbf{n}_1 d^2 \mathbf{n}_2 d^2 \mathbf{k} dz \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

С помощью формул Клебша–Гордана (4.14) снова можно убедиться, что правая часть в (4.19) является линейной комбинацией полиномов Лежандра P_0, P_2, P_4, P_6 . Для этого снова следует использовать соотношение (3.1) при $s = 1, 2, 3$, соотношение (4.15) и равенства

$$\begin{aligned} P_2 P_4 &= \frac{2}{7} P_2 + \frac{20}{77} P_4 + \frac{5}{11} P_6, \\ P_2^3 &= \left(\frac{2}{5} + 3P_2 + \frac{108}{55} P_4 + \frac{18}{11} P_6 \right) / 7, \end{aligned}$$

вытекающие из формул (4.14). Снова нетрудно убедиться, что в правой части (4.19) должны равняться нулю коэффициент при P_0 , что определяет ν_3 как функцию τ_1, τ_2 (она нам не понадобится), и коэффициент при P_2 , что и дает уравнение для определения τ_2 , из которого окончательно получаем

$$\begin{aligned} \tau_2 = \tau_1 \frac{\pi\tau_1^2 - 2\pi c_1 + \gamma \int_0^\infty (32c_1 p_{02} F_{43}^{21} + 16\tau_1 p_{12} F_{43}^{30} - 28p_{21} F_{22}^{20} - 48\tau_1^2 p_{03} F_{64}^{40}) dz}{2\pi\tau_1 + \frac{7\delta\pi}{64\gamma} + \gamma \int_0^\infty (28p_{11} F_{22}^{20} - 32\tau_1 p_{02} F_{43}^{30}) dz}, \\ p_{03} = \lambda_b^3, \quad p_{12} = \lambda_b \frac{2 - \lambda_b}{1 + \lambda_b \rho}, \quad p_{21} = \frac{\rho(\lambda_b \rho - 2)}{(1 + \lambda_b \rho)^2}, \end{aligned}$$

p_{02}, p_{11} указаны выше. На этом построение второго приближения h_2 заканчивается. Третье приближение ищется в виде

$$h_3 = \tau_3 P_2 + d_1 P_4 + d_2 P_6,$$

поскольку правая часть в (4.19) является линейной комбинацией P_4 и P_6 (коэффициенты при P_0 и P_2 в правой части (4.19) теперь равны нулю в силу выбора ν_3 и τ_2). Коэффициенты d_1, d_2 определяются из (4.19), а τ_3 — при построении четвертого приближения и т.д. Таким образом, нами развит алгоритм построения в окрестности невырожденной точки бифуркации (эта окрестность определяется неравенствами (4.2), (4.6), которые заведомо выполнены при достаточно малых $|\mu|$) анизотропной плотности распределения ориентаций магнитных стержней $f(\mathbf{n}) = 1 + h(\mathbf{n})$ (решения уравнения (2.1)), для которой выполнены условие нормировки (2.2) и условия “а” и “б” ($f(\mathbf{n})$ представляется в виде ряда по полиномам Лежандра с четным индексом, для которых выполнены условия “а” и “б”). Для того чтобы выполнялось условие “в”, необходимо и достаточно, по крайней мере для достаточно малых $|\mu|$, чтобы знаки μ и τ_1 были одинаковы. Таким образом, построенное решение следует рассматривать лишь в полукрестности точки бифуркации λ_b , выбор которой (выбор направления бифуркации) определяется знаком τ_1 . При $\tau_1 < 0$ направление бифуркации левое ($\mu < 0$), при $\tau_1 > 0$ — правое ($\mu > 0$). С помощью соотношения (4.17), определяющего τ_1 , можно найти знак τ_1 , по крайней мере, в тех случаях, когда мы имеем асимптотику λ_b . В п. 3 эта асимптотика указана в следующих случаях (соотношения (3.7), (3.11), (3.12), (3.13)):

- 1) $64\gamma\delta^{-1} \ll 1$, тогда $\lambda_b \sim 64\gamma\delta^{-1} \ll 1$;
- 2) $\gamma \gg \gamma_Q \sim 2^{14}(27\delta)^{-1}$, тогда $\lambda_b \sim \pi(\gamma\delta)^{-1} \ll 1$;
- 3) $\gamma = \gamma_P \sim 2^9\delta^{-1}$, $\lambda_b = \lambda_P \sim 2^{14}\delta^{-2}$;
- 4) $\gamma = \gamma_R$, $\lambda_b = \lambda_R$;
- 5) $\gamma = \gamma_Q$, $\lambda_b = \lambda_Q \sim 2^{20}(81\delta^2)^{-1}$.

В случаях 1 и 2 немедленно следует $\tau_1 < 0$. В случае 3 воспользуемся возможностью переписать (4.17) в виде

$$\tau_1 = 7 \frac{\delta(64\gamma)^{-1} + \gamma\lambda_b^{-1}g'_2(\lambda_b) - \gamma\lambda_b^{-2}g_2(\lambda_b)}{\frac{2\gamma\lambda_b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F^3 dz}{z^4(1+\lambda_b\rho)^3} - 1}, \quad (4.20)$$

а затем воспользуемся асимптотикой (3.6) и оценкой

$$\int_0^\infty \frac{F^3 dz}{z^4(1+\lambda_b\rho)^3} = o(\lambda_b^{-5/2}).$$

Без труда найдем, что в случае 3 знаменатель в (4.20) отрицателен, а числитель пропорционален $2^{16}\delta^2 > 0$. Таким образом, в случаях 1, 2 и 3 $\tau_1 < 0$, т.е. построенное нами решение определено для $\mu < 0$. В случаях 4 и 5 нетрудно получить, что $\tau_1 = 0$, разложение h начинается со слагаемого порядка μ^2 . Можно показать, что плотность $f(\mathbf{n})$, ответвляющаяся от изотропной в точке λ_R , удовлетворяет условию “в” в полной окрестности этой точки. Наоборот, плотность, ответвляющаяся в точке λ_Q , не удовлетворяет условию “в” ни слева, ни справа от λ_Q .

Для $\gamma = \gamma_R + \Delta\gamma$, где $\Delta\gamma > 0$ и мало, получим три точки бифуркации, две из них — абсциссы $\lambda_1 < \lambda_R$ и $\lambda_2 > \lambda_R$ точек пересечения восходящей ветви параболы $g_1(\lambda, \gamma_R + \Delta\gamma, \delta)$ с кривой g_2 . Третья точка бифуркации — абсцисса точки пересечения нисходящей ветви параболы с кривой g_2 . Нетрудно показать, что

$$\lambda_{1,2} = \lambda_R \mp \left(-\frac{2\lambda_R\Delta\gamma}{\gamma_R^2 g_2''(\lambda_R)} \right)^{1/2} \left(1 + O(\delta + (\Delta\gamma)^{1/2}) \right). \quad (4.21)$$

Знак числителя у τ_1 совпадает со знаком выражения

$$s(\lambda_b, \gamma) = g'_2(\lambda_b) - \left(1 - \frac{\delta\lambda_b}{32\gamma}\right) \gamma^{-1}.$$

С помощью (4.21) найдем

$$s(\lambda_{1,2}, \gamma_R + \Delta\gamma) = \pm(-2\lambda_R\Delta\gamma g''_2(\lambda_R))^{1/2} \gamma_R^{-1} + O(\Delta\gamma + \delta(\Delta\gamma)^{1/2}).$$

Следовательно, если $\Delta\gamma$ и δ достаточно малы, то $s(\lambda_1, \gamma_R + \Delta\gamma) > 0$, $s(\lambda_2, \gamma_R + \Delta\gamma) < 0$. Знак знаменателя τ_1 при достаточно малых $\Delta\gamma$, δ совпадает со знаком выражения

$$\frac{2\gamma_0\lambda_0^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F^3 dz}{z^4(1 + \lambda_0\rho)^3} - 1 \quad (4.22)$$

(λ_0 находится из уравнения (3.10), γ_0 определяется соотношением (3.9)). Вычисления дают, что выражение (4.22) отрицательно. В результате получаем, что направление бифуркации в точке λ_1 , расположенной левее λ_R , левое, а в точке λ_2 , расположенной правее λ_R , правое. Рассмотрим вопрос о направлении бифуркации в точке λ_3 . Справедлива оценка $\lambda_3(\gamma) > 32\gamma\delta^{-1}$. Будем рассматривать параболу с параметром γ , удовлетворяющим оценкам

$$\gamma \gg \delta, \quad \gamma^{1/2} \ll 2^6\delta^{-1/2}. \quad (4.23)$$

С помощью асимптотики (3.6) для g_2 в случае γ , удовлетворяющего условиям (4.23), нетрудно найти

$$\lambda_3(\gamma) = 2^6\gamma\delta^{-1}(1 - 2^{-6}(\gamma\delta)^{1/2} + O(2^{-12}\gamma\delta + \delta\gamma^{-1})). \quad (4.24)$$

Асимптотика (4.24) позволяет показать, что направление бифуркации в точке $\lambda_3(\gamma)$ левое. Действительно, с помощью (4.24), (4.23) и (3.6) можно получить совпадение знака числителя у τ_1 со знаком величины $\gamma^{-1/2} - 2^{-7}\delta^{1/2}$. В силу (4.23) этот знак положителен. Напротив, знаменатель τ_1 при $\lambda_b = \lambda_3(\gamma)$ будет отрицателен, если δ достаточно мало. Для объемной концентрации, отвечающей точке бифуркации λ_3 (4.24), получаем

$$\varphi = 4\delta(1 - 2^{-6}(\gamma\delta)^{1/2} + O(2^{-12}\gamma\delta + \delta\gamma^{-1})).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Кратко остановимся на построении решения уравнения (2.1) в случае вырожденной точки бифуркации λ_b . Пусть, например, имеем для точки λ_b , кроме равенства $N_1(\lambda_b, \gamma, \delta) = 1$, еще ровно одно равенство $N_s(\lambda_b, \gamma, \delta) = 1$ при некотором $s > 1$. Тогда решение уравнения (2.1) снова ищем в виде (4.8), (4.10), но теперь каждое приближение h_i будет содержать слагаемое $\tau_{1i}P_2 + \tau_{2i}P_{2s}$. Коэффициенты τ_{1i} , τ_{2i} находим из условия ортогональности правой части линейного уравнения для h_{i+1} к полиномам P_2 , P_{2s} , в остальном алгоритм повторяет алгоритм, развитый выше для случая невырожденной точки бифуркации.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в случае левого направления бифуркации на кривой, определяющей зависимость h от плотности s , должна существовать точка возврата, что обычно приводит [4] к существованию в окрестности s_b еще одного (не малого) анизотропного решения и фазового перехода первого рода.

Автор искренне признателен К. Г. Корневу, Э. Ю. Лернеру и Б. З. Малкину за обсуждение затронутых здесь вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00270 а) и International Science Foundation (грант RHA – 300).

Список литературы

- [1] *L. Onsager*. Ann. N. Y. Acad. Sci. 1949. V. 51. № 4. P. 627.
- [2] *G. Lashtr*. J. Chem. Phys. 1970. V. 53. P. 4141.
- [3] *M.A. Gotter*. Phys. Rev. 1974. V. A 10. P. 625.
- [4] *R.F. Kayser, H.J. Raveche*. Phys. Rev. 1978. V. A 17. № 6. P. 2067.
- [5] *А.Н. Семенов, А.Р. Хохлов*. УФН. 1988. Т. 156. Вып. 3. С. 427.
- [6] *А.О. Цеберс*. Магнитная гидродинамика. 1983. № 2. С. 39.
- [7] *И.Р. Ютновский, М.Ф. Головкин*. Статистическая теория классических равновесных систем. Киев: Наукова думка, 1980.
- [8] *К.Г. Корнев, Л.Д. Эскин*. Изв. АН СССР, сер. физ. 1991. Т. 55. № 6. С. 1050.
- [9] *В.А. Арчевков, К.Г. Корнев, С.В. Петров, Л.Д. Эскин*. Магнитная гидродинамика. 1991. № 3. С. 43.
- [10] *М.М. Вайнберг, В.А. Треногин*. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [11] *Г.Н. Ватсон*. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
- [12] *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962.
- [13] *Н.Я. Виленкин*. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 7.XII.1995 г.
после доработки 15.VII.1996 г.

L. D. Eskin

INTEGRAL EQUATION IN THE THEORY OF PHASE TRANSITIONS IN THE SYSTEM OF MAGNETIC RODS

The nonlinear integral equation for the orientational distribution function (ODF), describing anisotropic nematic ordering in a system of magnetic rods, is investigated. The classification of bifurcation points is presented and their asymptotics are found for highly elongated rods with the small and large magnetic moments. An algorithm for finding the ODF, near to isotropic, is developed in the neighborhood of bifurcation points. In the limiting cases of small and large magnetic moments of rods the found solutions (ODF) have the left direction of bifurcation. However, in the intermediate region of values of the magnetic moments the solutions having the right direction of bifurcation exist along with solutions having the left direction of bifurcation.