Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Свинин, Инвариантные подмногообразия цепочки Дарбу–Кадомцева–Петвиашвили и расширение дискретной иерархии Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 2, 243–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:28:17

© 2004 г.

А. К. Свинин*

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ
ЦЕПОЧКИ ДАРБУ–КАДОМЦЕВА–
ПЕТВИАШВИЛИ И РАСШИРЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ
ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Исследованы инвариантные подмногообразия так называемой цепочки Дарбу–Кадомцева–Петвиашвили. Показано, что ограничение динамики на некоторый класс инвариантных подмногообразий приводит к расширению дискретной иерархии Кадомцева–Петвиашвили, а пересечения инвариантных подмногообразий приводят к лаксовому описанию широкого класса дифференциально-разностных систем. Рассматриваются автомодельные редукции. Показано, что автомодельные подстановки приводят к чисто дискретным уравнениям с зависимостью от конечного набора параметров и к уравнениям, определяющим деформации по этим параметрам. Приведены примеры. В частности, показано, что иерархии цепочки Вольтерра соответствует хорошо известное первое дискретное уравнение Пенлеве. Выписаны уравнения, естественно обобщающие первое дискретное уравнение Пенлеве в том смысле, что все они в непрерывном пределе переходят в первое уравнение Пенлеве.

Ключевые слова: дискретная иерархия Кадомцева–Петвиашвили, инвариантные подмногообразия, отображение Дарбу.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было введено понятие иерархии Дарбу–Кадомцева–Петвиашвили (ДКП), реализующее фундаментальную концепцию накрытия Дарбу, приспособленную для иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Как оказалось, это понятие является удобным инструментом для исследования инвариантных подмногообразий иерархии КП, а также для других целей. Фактически иерархия ДКП представляет собой две копии (решения) иерархии КП, связанные между собой обратимым отображением Дарбу. Итерации отображения Дарбу в обоих направлениях порождают цепочку ДКП.

В работе [2] мы построили двухпараметрический класс S_l^n инвариантных подмногообразий фазового пространства цепочки ДКП. В частном случае $n = 1$ эти подмногообразия были найдены в работе [1], где было показано, что на S_0^1 цепочка ДКП редуцируется к дискретной иерархии КП [3].

---

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия. E-mail: svinin@icc.ru

Настоящая работа посвящена исследованию инвариантных подмногообразий фазового пространства цепочки ДКП. В разделе 3 мы показываем, что ограничение цепочки ДКП на S_0^n приводит к хорошо определенным уравнениям Лакса, которые несложно записать в явном виде, на коэффициенты (дискретных) операторов Лакса. Совокупность всех потоков цепочки ДКП, ограниченных на класс подмногообразий $\{S_0^n: n \geq 1\}$, естественно образует расширение дискретной иерархии КП. Ограничение цепочки ДКП на пересечения вида $S_{n,r,l} = S_0^n \cap S_{l-1}^{l-n-r}$, в свою очередь, приводит к парам Лакса для дифференциально-разностных систем с конечным числом искомым функций. Эти цепочки по построению определяют преобразования Дарбу (ограниченных) операторов Лакса иерархии КП.

Чтобы продемонстрировать эффективность этого подхода к построению интегрируемых цепочек, в разделе 4 мы выписали ряд примеров, встречающихся в литературе, а также построили класс однокомпонентных цепочек, естественно включающий в себя цепочки Богоявленского. Показано, что исследование инвариантных подмногообразий цепочки ДКП позволяет строить преобразования Миуры между рассматриваемыми цепочками.

В разделе 5 исследованы решения цепочечных иерархий, инвариантных относительно групп растяжений. Показано, что соответствующие подстановки приводят к чисто дискретным уравнениям, зависящим от некоторого набора параметров, и к уравнениям, описывающим деформацию по этим параметрам. Типичным примером является первое дискретное уравнение Пенлеве, соответствующее иерархии цепочки Вольтерра. В частности, мы воспроизвели следующий результат: первое уравнение Пенлеве описывает преобразование Шлезингера четвертого уравнения Пенлеве. Исследован класс дискретных систем, отвечающих цепочкам Богоявленского. Все эти системы проходят тест на конфайнмент сингулярностей с условием на параметры, определяющие эти системы. Показано, что это условие является более общим по сравнению с интегрируемым случаем. Показано, что все эти системы в непрерывном пределе переходят в первое уравнение Пенлеве.

2. ИЕРАРХИЯ ДКП

2.1. Иерархия КП. Прежде всего напомним формализм иерархии КП в версии работ [4]. Рассмотрим пространство рядов Лорана (токов) вида

$$H^{(0)} = 1, \quad H^{(p)} = z^p + \sum_{l \geq 1} H_l^p z^{-l}.$$

Точка фазового пространства определяется полубесконечной матрицей $(H_l^p)_{l \geq 1, p \geq 1}$. С каждой такой точкой ассоциируется линейная оболочка $\mathcal{H}_+ = \langle 1, H^{(1)}, H^{(2)}, \dots \rangle$ в пространстве рядов Лорана

$$H = \left\{ \sum_{-\infty \ll k < \infty} l_k z^{-k} \right\} = \mathcal{H}_+ \oplus H_-.$$

Очевидно, что $H_- = \langle z^{-1}, z^{-2}, \dots \rangle$. Соотношение инвариантности

$$(\partial_p + H^{(p)})\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_+ \quad \forall p \geq 1 \quad (1)$$

переписывается в явном виде и однозначно определяет иерархию динамических систем:

$$\partial_p H^{(k)} = H^{(k+p)} - H^{(k)} H^{(p)} + \sum_{s=1}^p H_s^k H^{(p-s)} + \sum_{s=1}^k H_s^p H^{(k-s)}. \quad (2)$$

Эти уравнения называют центральной системой (ЦС). Очевидно, что выполняется свойство точности $\partial_p H^{(k)} = \partial_k H^{(p)}$. Используя это свойство, несложно показать коммутативность потоков ЦС.

Чтобы перейти к иерархии КП, один из эволюционных параметров, а именно t_1 , выбирается в качестве пространственной переменной x . Полагая в (2) $p = 1$, получим

$$(\partial + h)H^{(k)} = H^{(k+1)} + H_1^k + h_2 H^{(k-1)} + \dots + h_{k+1}, \quad (3)$$

где $h = z + h_2 z^{-1} + h_3 z^{-2} + \dots \equiv H^{(1)}$. Используя соотношение (3), нетрудно показать, что токи $H^{(k)}$ записываются в виде линейных комбинаций по дифференциальным многочленам (итерациям) Фаа ди Бруно, определяемых с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$h^{(k+1)} = (\partial + h)h^{(k)}, \quad k \geq 1, \quad h^{(1)} = h,$$

а следовательно, $\mathcal{H}_+ = \langle 1, h^{(1)}, h^{(2)}, \dots \rangle$. Формулу перехода от базиса $\{h^{(k)}\}$ к базису $\{H^{(p)}\}$ запишем в виде

$$H^{(p)} = h^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-2} r_k^p [h] h^{(k)}.$$

На этом этапе выполняется переход от фазового пространства полубесконечных матриц к фазовому пространству иерархии КП, точки в котором определяются бесконечным набором (гладких) функций $\{h_k(x), k \geq 2\}$. Используя свойство точности, можно записать

$$\partial_p h = \partial H^{(p)}. \quad (4)$$

Так как $H^{(p)} = z^p + \mathcal{O}(z^{-1})$, то $H^{(p)} = \pi_+(z^p)$, где π_+ обозначает проекцию произвольного ряда Лорана на $\mathcal{H}_+$.

Соотношение (4) определяет бесконечный набор эволюционных уравнений в форме локальных законов сохранения. Как известно, эти уравнения полностью эквивалентны иерархии КП, при этом $h(z)$ интерпретируется как производящая функция гамильтоновых плотностей. Переход от рядов Лорана к алгебре псевдодифференциальных операторов определяется правилом $\phi(h^{(k)}) = \partial^k$ (ср. [5]) и распространяется затем по линейности на все пространство H . Так как в операторе Лакса иерархии КП встречаются отрицательные степени ∂ , то необходимо также определить отрицательные итерации Фаа ди Бруно с помощью соотношений

$$(\partial + h)h^{(-1)} = 1, \quad (\partial + h)h^{(-2)} = h^{(-1)}$$

и т. д. Записывая z как линейную комбинацию по итерациям Фаа ди Бруно, можно определить оператор Лакса иерархии КП $\mathcal{Q} = \partial + u_2 \partial^{-1} + u_3 \partial^{-2} + \dots$ как $\mathcal{Q} = \phi(z)$. Отсюда, например, несложно получить следующие соотношения:

$$u_2 = -h_2, \quad u_3 = -h_3, \quad u_4 = -h_4 - h_2^2, \quad u_5 = -h_5 - 3h_2 h_3 + h_2 h_{2x}$$

и т. д. Можно показать, что соотношение (4) эквивалентно уравнению Лакса $\partial_p \mathcal{Q} = [\mathcal{Q}_+^p, \mathcal{Q}]$.

Имеются следующие соотношения, связывающие формальную волновую функцию Бейкера–Ахиезера

$$\psi = \left(1 + \sum_{k \geq 1} w_k z^{-k}\right) \exp\left(\sum_{p \geq 1} t_p z^p\right)$$

с итерациями Фаа ди Бруно и токами:

$$h^{(k)} = \frac{\partial^k \psi}{\psi}, \quad H^{(p)} = \frac{\partial_p \psi}{\psi}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Представление иерархии КП в форме локальных законов сохранения (4) эквивалентно теореме Вильсона [6]. Некоммутативный вариант этой теоремы можно найти в книге [7]. ЦС в виде (2) восходит к результатам Чередника (ср. [7], раздел 8.2).

2.2. Иерархия ДКП. В работе [1] была определена иерархия ДКП

$$\begin{aligned} \partial_p h &= \partial H^{(p)}, \\ \partial_p a &= a(\tilde{H}^{(p)} - H^{(p)}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ряд Лорана

$$a = z + \sum_{k \geq 0} a_{k+1} z^{-k}$$

отличается от h наличием нулевой степени z . “Новые” токи $\tilde{H}^{(p)}$ вычисляются в точке $\tilde{h} = h + a_x/a$.

Уравнения (6) реализуют концепцию накрытия Дарбу применительно к динамическим системам иерархии КП. Действительно, несложно показать, что, имея некоторое решение (h, a) системы (6), мы получаем новое решение с помощью отображения Дарбу $\sigma(h, a) = h + a_x/a$. В работе [1] было показано, что эта конструкция позволяет достаточно просто описывать многие понятия, используемые в теории иерархии КП, такие, как рациональные редукции Кричевера [8], преобразования Дарбу и Миуры [9], дискретный аналог иерархии КП [3].

На систему (6) можно взглянуть иначе. Задав произвольную пару решений иерархии КП $(h, \tilde{h})$ или, что эквивалентно, $(\psi, \tilde{\psi})$, мы однозначно определим a . Несложно заметить, что подстановка $a = z\tilde{\psi}/\psi$ в (6) с учетом (5) обращает эти уравнения в тождество. В частности, паре (h, h) соответствует тривиальное решение $a = z$. С этой

точки зрения система (6) не кажется слишком содержательной. Действительно содержательной она становится после наложения некоторых ограничений, совместных с этой системой. Как известно [1], условие $z^l a \in \mathcal{H}_+$ для $l \geq -1$ определяет инвариантное подмногообразие $\mathcal{S}_l$ для (6). Подчеркнем, что при этом иерархия КП никак не ограничивается, а лишь конкретизируется отображение Дарбу $h \rightarrow \tilde{h}$. Например, на $\mathcal{S}_{-1}$ имеем $a = z$ и соответственно $\tilde{h} = h$. На $\mathcal{S}_0$, в свою очередь, имеем $a = h + a_1$ и

$$\tilde{h} = \frac{a_x + a^2 - a_1 a}{a} = \frac{a^{(2)} - a_1 a^{(1)}}{a}.$$

В терминах волновых функций на $\mathcal{S}_0$ имеем $z\tilde{\psi} = (\partial + a_1)\psi \equiv H\psi$ — элементарное преобразование Дарбу. Это преобразование управляется функцией a_1 . Разумеется, она не может быть произвольной, а должна удовлетворять некоторым соотношениям, а именно [1]:

$$\partial_p a_1 + \partial \left((-a_1)^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-2} r_k^p [h] (-a_1)^{(k)} \right) = 0. \quad (7)$$

Здесь $(-a_1)^{(k)}$ — соответствующие итерации Фаа ди Бруно, например

$$(-a_1)^{(0)} = 1, \quad (-a_1)^{(1)} = -a_1, \quad (-a_1)^{(2)} = -a_1 x + a_1^2$$

и т.д. Уравнение (7) точно линейризуется с помощью подстановки $a_1 = -\Phi_x/\Phi$. В результате получается $\partial_p \Phi = \mathcal{Q}_+^p(\Phi)$. Особенно просто при этом преобразуется тау-функция: $\tilde{\tau} = \Phi\tau$ [10].

Ограниченные иерархии КП (рациональные редукции Кричевера) возникают при рассмотрении пересечений $\mathcal{S}_l \cap \mathcal{S}_{l+r}$. При этом r -я степень оператора Лакса оказывается выраженной в виде отношения двух чисто дифференциальных операторов, т.е.

$$\mathcal{Q}^r = P_{l+1}^{-1} Q_{l+r+1} \quad (8)$$

(ср. [11]). В частности, случай $l = -1$ соответствует редукциям к иерархиям Гельфанда–Дикого [12].

3. РАСШИРЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ИЕРАРХИИ КП

3.1. Цепочка ДКП и ее инвариантные подмногообразия. Применяя бесконечное число раз итерации к некоторому фиксированному решению иерархии КП, получим бесконечный набор рядов Лорана $\{h(i), a(i) : i \in \mathbb{Z}\}$, удовлетворяющий системе

$$\begin{aligned} \partial_p h(i) &= \partial H^{(p)}(i), \\ \partial_p a(i) &= a(i)(H^{(p)}(i+1) - H^{(p)}(i)). \end{aligned} \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Естественно, что каждой копии иерархии КП отвечает копия ЦС с некоторым значением i , т.е. $\mathcal{H}_+(i) = \langle 1, H^{(1)}(i), H^{(2)}(i), \dots \rangle$.

Так же, как в [2], будем называть эту систему цепочкой ДКП. В работе [2] был найден счетный класс подмногообразий, инвариантных по отношению к потокам (9).

ТЕОРЕМА. Подмногообразие $\mathcal{S}_l^n$, определяемое условием

$$z^{l-n+1}a^{[n]}(i) \in \mathcal{H}_+(i) \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

с $n \in \mathbb{Z}^* \equiv \mathbb{Z}/\{0\}$, касательно по отношению к потокам цепочки ДКП.

Здесь $a^{[k]}(i)$ – “дискретные” итерации Фaa ди Бруно, определяемые рекуррентным соотношением $a^{[k+1]}(i) = a(i)a^{[k]}(i+1)$ с $a^{[0]}(i) \equiv 1$. Для $k > 0$

$$a^{[k]}(i) = a(i)a(i+1) \dots a(i+k-1)$$

и для $k < 0$

$$a^{[k]}(i) = a^{-1}(i-1)a^{-1}(i-2) \dots a^{-1}(i-|k|).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В силу второго уравнения в (9) справедливо

$$\partial_p a^{[k]}(i) = a^{[k]}(i)(H^{(p)}(i+k) - H^{(p)}(i)). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k > 0$

$$\begin{aligned} \partial_p a^{[k]}(i) &= \partial_p [a(i)a(i+1) \dots a(i+k-1)] = \\ &= \sum_{s=1}^k a(i) \dots a(i+s-1) \{H^{(p)}(i+s) - \\ &\quad - H^{(p)}(i+s-1)\} a(i+s) \dots a(i+k-1) = \\ &= a^{[k]}(i)(H^{(p)}(i+k) - H^{(p)}(i)). \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления проводятся для отрицательных k .

СЛЕДСТВИЕ. Для произвольного целого $k \neq 0$ обозначим $h = h(i)$, $\tilde{h} = h(i+k)$ и $a = z^{1-k}a^{[k]}(i)$. Тогда в силу (9) тройка $(h, \tilde{h}, a)$ является решением иерархии ДКП.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Имеет место цепочка включений

$$\mathcal{S}_l^n \subset \mathcal{S}_{2l+1}^{2n} \subset \dots \subset \mathcal{S}_{kl+k-1}^{kn} \subset \dots \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что на $\mathcal{S}_l^n$

$$z^{l-n+1}a^{[n]}(i)\mathcal{H}_+(i+n) \subset \mathcal{H}_+(i). \quad (13)$$

Как нетрудно убедиться, формула (13) следует из равенства

$$z^{l-n+1}a^{[n]}(i)h^{(k)}(i+n) = (\partial + h(i))^k z^{l-n+1}a^{[n]}(i) \quad \forall k \geq 0 \quad (14)$$

и соотношения инвариантности (1). В свою очередь, соотношение (14) нетрудно доказать методом индукции. Для $k = 0$ формула (14) очевидна. Предположим, что это соотношение верно для некоторого k ; тогда в силу (11)

$$\begin{aligned} (\partial + h(i))^{k+1} z^{l-n+1} a^{[n]}(i) &= z^{l-n+1} a^{[n]}(i) (h(i+n) - h(i)) h^{(k)}(i+n) + \\ &+ z^{l-n+1} a^{[n]}(i) \partial h^{(k)}(i+n) + z^{l-n+1} a^{[n]}(i) h(i) h^{(k)}(i+n) = \\ &= z^{l-n+1} a^{[n]}(i) h^{(k+1)}(i+n). \end{aligned}$$

Теперь, чтобы показать включения (12), нужно использовать (13) и легко проверяемую формулу

$$z^{l-n+1} a^{[n]}(i) z^{p(l-n+1)} a^{[pn]}(i+n) = z^{(p+1)(l-n+1)} a^{[(p+1)n]}(i). \quad (15)$$

Из условия $z^{l-n+1} a^{[n]}(i) \in \mathcal{H}_+(i)$ и формул (13) и (15) следует $z^{2(l-n+1)} a^{[2n]}(i) \in \mathcal{H}_+(i)$ и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если решение цепочки ДКП принадлежит $\mathcal{S}_l^n$ и не существует инвариантного подмногообразия, определенного условием (10), содержащегося в $\mathcal{S}_l^n$ и содержащего данное решение, то будем говорить, что для этого решения подмногообразие $\mathcal{S}_l^n$ является началом цепочки включений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соображения, использованные при доказательстве утверждения 2, можно найти в [2], однако это утверждение там не было явно сформулировано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [2] предполагалось, что $n \geq 1$, что, вообще говоря, не является необходимым. С точки зрения построения интегрируемых цепочек рассмотрение отрицательных n не дает ничего нового, так как с помощью обратимого преобразования g_{-1} (см. ниже (37)), соответствующего обращению дискретного параметра $i \rightarrow -i$, значение n всегда можно сделать положительным. С другой стороны, при рассмотрении пересечений инвариантных подмногообразий приходится использовать $\mathcal{S}_l^n$ с отрицательными значениями n .

Инвариантность подмногообразий $\mathcal{S}_l^1$ была показана в работе [1]. В случае $\mathcal{S}_0^1$ цепочка ДКП редуцируется к дискретной иерархии КП. В п. 3.2 мы исследуем общий случай, когда $n \geq 1$.

3.2. Расширение дискретной иерархии КП. Соотношение, определяющее подмногообразие $\mathcal{S}_0^n$, выглядит очень просто:

$$h(i) = z^{1-n} a^{[n]}(i) - \sum_{s=1}^n a_1(i+s-1),$$

т. е. $h_k(i)$ однозначно записываются как многочлены от $a_k(i)$. Это означает, что уравнения движения на подмногообразиях $\mathcal{S}_0^n$ можно в принципе переписать исключительно в координатах $a_k(i)$. Точнее говоря, уравнения, полученные ниже (см. (18)), определяют проекцию потоков цепочки ДКП с инвариантных подмногообразий на аффинную гиперплоскость, точки которой параметризуются координатами $a_k(i)$ (a -плоскость).

В дальнейшем будет полезно определить набор функций $\{q_k^{(n,r)}(i)\}$ от координат a -плоскости с помощью соотношения

$$z^r = a^{[r]}(i) + \sum_{k \geq 1} q_k^{(n,r)}(i) z^{k(n-1)} a^{[r-kn]}(i). \quad (16)$$

Так как $z^{k(n-1)} a^{[r-kn]}(i)$ – ряд Лорана степени $r - k$ с единицей при старшей степени, то формула (16) однозначно определяет $q_k^{(n,r)}(i)$ как многочлены от $a_k(i)$. Заметим, что это соотношение, вообще говоря, не имеет отношения к какому-либо инвариантному подмногообразию, а служит лишь для определения отображения $\{a_k(i)\} \rightarrow \{q_k^{(n,r)}(i)\}$ для некоторых фиксированных n и r .

Для каждого n определим множество дискретных токов $\{K_{(n)}^{[pn]}(i) : p \geq 1\}$ с помощью следующего соотношения:

$$K_{(n)}^{[pn]}(i) = a^{[pn]}(i) + \sum_{k=1}^p q_k^{(n,pn)}(i) z^{k(n-1)} a^{[(p-k)n]}(i).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [2]. На $\mathcal{S}_0^n$ выполняется равенство

$$z^{(1-n)p} K_{(n)}^{[pn]}(i) = H^{(p)}(i). \quad (17)$$

Это соотношение позволяет переписать второе уравнение в (9) в координатах $a_k(i)$:

$$z^{p(n-1)} \partial_p a(i) = a(i) (K_{(n)}^{[pn]}(i+1) - K_{(n)}^{[pn]}(i)), \quad (18)$$

при этом в силу инвариантности $\mathcal{S}_0^n$ первое уравнение в (9) обращается в тождество и становится в некотором смысле излишним. Заметим, что уравнения (18), описывающие проекции потоков на различных инвариантных подмногообразиях также различны, что вполне естественно. Эволюционным параметрам, соответствующим движению на $\mathcal{S}_0^n$, будем присваивать метку: $t_p = t_p^{(n)}$.

Как уже отмечалось, в случае $n = 1$ уравнения (18) эквивалентны дискретной иерархии КП, поэтому вполне естественно назвать всю совокупность потоков, описываемых системой (18), расширенной дискретной иерархией КП. Однако следует отметить, что потоки, соответствующие разным меткам, вообще говоря, не обязаны коммутировать.

Следующая наша задача состоит в том, чтобы переписать систему (18) в виде уравнения на дискретный оператор Лакса, записать в явном виде дифференциально-разностные уравнения на координаты $q_k^{(n,r)}(i)$ и перечислить возможные редукции системы (18) для различных n . В результате это даст возможность описывать широкий класс дифференциально-разностных систем, обладающих нетривиальной парой Лакса, включая такие классические примеры, как цепочки Вольтерра и Тоды.

3.3. Представление Лакса для расширенной дискретной иерархии КП.

Пусть $\{\psi_i: i \in \mathbb{Z}\}$ – набор волновых функций иерархии КП, соответствующих цепочке ДКП (9). Определим волновую вектор-функцию Ψ с координатами $\Psi_i = z^i \psi_i$. Тогда

$$\Psi_i = z^i \left(1 + \sum_{k \geq 1} w_k(i) z^{-k} \right) \exp \left(\sum_{p \geq 1} t_p z^p \right).$$

Очевидно, что связь между дискретными итерациями Фаа ди Бруно и Ψ определяется следующими формулами:

$$a(i) = \frac{\Psi_{i+1}}{\Psi_i}, \quad a^{[r]}(i) = \frac{\Psi_{i+r}}{\Psi_i}. \quad (19)$$

С учетом соотношений (17) и (19) на подмногообразии $\mathcal{S}_0^n$ получаем

$$\begin{aligned} z^{p(n-1)} H^{(p)}(i) &= z^{p(n-1)} \frac{\partial_p^{(n)} \psi_i}{\psi_i} = z^{p(n-1)} \frac{\partial_p^{(n)} \Psi_i}{\Psi_i} = K_{(n)}^{[pn]}(i) = \\ &= \frac{\Psi_{i+pn}}{\Psi_i} + \sum_{k=1}^p q_k^{(n,pn)}(i) z^{k(n-1)} \frac{\Psi_{i+(p-k)n}}{\Psi_i}, \end{aligned}$$

или

$$z^{p(n-1)} \partial_p^{(n)} \Psi = (Q_{(n)}^{pn})_+ \Psi, \quad (20)$$

где

$$(Q_{(n)}^{pn})_+ \equiv \Lambda^{pn} + \sum_{k=1}^p q_k^{(n,pn)}(i) z^{k(n-1)} \Lambda^{(p-k)n},$$

Λ – оператор сдвига, действующий по правилу $(\Lambda f)(i) = f(i+1)$.

Уравнение (20) определяет эволюцию вектор-функции. Для построения уравнения Лакса остается найти уравнение, определяющее задачу на собственные значения. Из (16) получаем

$$z^r = \frac{\Psi_{i+r}}{\Psi_i} + \sum_{k \geq 1} q_k^{(n,r)}(i) z^{k(n-1)} \frac{\Psi_{i+r-kn}}{\Psi_i},$$

или

$$Q_{(n)}^r \Psi = z^r \Psi, \quad (21)$$

где

$$Q_{(n)}^r \equiv \Lambda^r + \sum_{k \geq 1} q_k^{(n,r)}(i) z^{k(n-1)} \Lambda^{r-kn}.$$

Заметим еще раз, что соотношение (21), являющееся иной записью (16), не имеет никакого отношения к какому-либо инвариантному подмногообразию $\mathcal{S}_l^n$ (в отличие от (20)).

Условием совместности линейных вспомогательных систем (20) и (21) будет уравнение

$$z^{p(n-1)} \partial_p^{(n)} Q_{(n)}^r = [(Q_{(n)}^{pn})_+, Q_{(n)}^r]. \quad (22)$$

Его несложно записать в явной форме

$$\begin{aligned} \partial_p^{(n)} q_k^{(n,r)}(i) &= Q_{k,p}^{(n,r)}(i) = q_{k+p}^{(n,r)}(i + pn) - q_{k+p}^{(n,r)}(i) + \\ &+ \sum_{s=1}^p q_s^{(n,pn)}(i) q_{k-s+p}^{(n,r)}(i + (p-s)n) - \\ &- \sum_{s=1}^p q_s^{(n,pn)}(i + r - (k-s+p)n) q_{k-s+p}^{(n,r)}(i). \end{aligned} \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Уравнение (22) при $r = 1$ рассматривается в [7], [13] и называется там щелевой иерархией КП. При этом параметр $n = \Gamma$ называется параметром щели. Более точно, рассматриваются оператор $L = \Lambda + \Lambda^{1-\Gamma} \circ q_0 + \Lambda^{1-2\Gamma} \circ q_1 + \dots$ и уравнение $\partial_p L = [L_+^\Gamma, L]$. Для этого уравнения в [7] решается задача интегрируемой дискретизации потоков.

В дальнейшем мы представим примеры дифференциально-разностных систем, получающихся в результате различных редукций из (23). При этом важно иметь в виду, что функции $q_k^{(n,r)}(i)$ по отношению друг к другу не являются независимыми. Соотношение (21) означает, что умножение на z^r эквивалентно действию оператора $Q_{(n)}^r$. Тогда

$$z^{r_1+r_2} \Psi = Q_{(n)}^{r_1+r_2} \Psi = z^{r_1} Q_{(n)}^{r_2} \Psi = Q_{(n)}^{r_2} Q_{(n)}^{r_1} \Psi = z^{r_2} Q_{(n)}^{r_1} \Psi = Q_{(n)}^{r_1} Q_{(n)}^{r_2} \Psi.$$

Отсюда следует

$$Q_{(n)}^{r_1+r_2} = Q_{(n)}^{r_1} Q_{(n)}^{r_2} = Q_{(n)}^{r_2} Q_{(n)}^{r_1},$$

или в явной записи

$$\begin{aligned} q_k^{(n,r_1+r_2)}(i) &= q_k^{(n,r_1)}(i) + \sum_{s=1}^{k-1} q_s^{(n,r_1)}(i) q_{k-s}^{(n,r_2)}(i + r_1 - sn) + q_k^{(n,r_2)}(i + r_1) = \\ &= q_k^{(n,r_2)}(i) + \sum_{s=1}^{k-1} q_s^{(n,r_2)}(i) q_{k-s}^{(n,r_1)}(i + r_2 - sn) + q_k^{(n,r_1)}(i + r_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Непосредственно из формулы (23) видно, что уравнения, соответствующие фиксированным n и r , допускают редукцию с помощью условия

$$q_k^{(n,r)}(i) \equiv 0, \quad k > l, \quad l \geq 1. \quad (25)$$

Как показано в работе [2], с геометрической точки зрения эти редукции соответствуют пересечениям инвариантных подпространств $\mathcal{S}_{n,r,l} \equiv \mathcal{S}_0^n \cap \mathcal{S}_{l-1}^{l n-r}$.

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЦЕПОЧКИ

Цель этого раздела – выписать некоторые примеры дифференциально-разностных систем, которые могут быть выведены из формул (23) и (24). По построению они обладают представлением в виде уравнения Лакса (22) с редуцированным оператором $Q_{(n)}^r$ и имеют непосредственное отношение к иерархии КП в том смысле, что они определенным образом связывают последовательности (ограниченных) операторов Лакса иерархии КП.

4.1. Примеры. Прежде всего следует отметить недавнюю работу [14], в которой были представлены многочисленные примеры цепочек, допускающих представление Лакса. Однако можно показать, что большую часть этих примеров можно получить из уравнения (22).

На $\mathcal{S}_{n,r,l}$ имеем

$$Q_{(n)}^r = \Lambda^r + \sum_{k=1}^l z^{k(n-1)} q_k^{(n,r)} \Lambda^{r-kn}.$$

Обозначим $\lambda = z^{1-n}$ и $H(\lambda) = \lambda^l Q_{(n)}^r$. Тогда

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \lambda^l \Lambda^r + \sum_{k=1}^l \lambda^{l-k} q_k^{(n,r)} \Lambda^{r-kn} = \sum_{k=1}^l \lambda^k H_k, \\ \frac{\lambda^p}{\lambda^{Nl}} H^N(\lambda) &= \lambda^p \Lambda^{pn} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{p-k} q_k^{(n,r)} \Lambda^{(p-k)n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь несложно заметить, что уравнение Лакса (22) при условии, что $pn = Nr$, где N – любое целое число, переписывается в следующем виде:

$$\partial_p^{(n)} H(\lambda) = [(\lambda^{p-Nl} H^N(\lambda))_{\infty}, H(\lambda)] = -[(\lambda^{p-Nl} H^N(\lambda))_0, H(\lambda)]. \quad (27)$$

Здесь индексы ∞ и 0 обозначают проекции рядов Лорана (с матричными коэффициентами) на неотрицательную и отрицательную части, соответственно. Уравнение (27) послужило основой для построения интегрируемых цепочек, преобразований Дарбу и солитонных решений в работе [14]. К сожалению, в этой работе не указан способ построения операторов H_k , хотя большинство примеров полностью соответствует формуле (26).

Фактически возможность записать систему (23) в виде замкнутой системы эволюционных уравнений заключается в том, что благодаря условию $pn = Nr$ координаты $q_k^{(n,pn)}$ полиномиально выражаются (в силу (24)) через $\rho_k \equiv q_k^{(n,r)}$.

Приведем примеры цепочек, известных из литературы.

ПРИМЕР 1 [15], [16]. $n \geq 2$, $p = 1$, $r = 1$, $l = 1$ ¹⁾:

$$\rho'_i = \rho_i \left(\sum_{s=1}^{n-1} \rho_{i+s} - \sum_{s=1}^{n-1} \rho_{i-s} \right), \quad \rho_1(i) \equiv \rho_i. \quad (28)$$

¹⁾Здесь и ниже штрихом обозначена производная $\partial/\partial t_p^{(n)}$ с соответствующими значениями p и n .

ПРИМЕР 2 [16]. $n = p + 1$, $p \geq 1$, $r = p$, $l = 1$:

$$\rho'_i = \rho_i \left(\prod_{s=1}^{n-1} \rho_{i+s} - \prod_{s=1}^{n-1} \rho_{i-s} \right).$$

ПРИМЕР 3 [13]. $n = 1$, $p = 1$, $r = 1$, $l \geq 2$:

$$\begin{aligned} \rho'_1(i) &= \rho_2(i+1) - \rho_2(i), \\ \rho'_k(i) &= \rho_{k+1}(i+1) - \rho_{k+1}(i) + \rho_k(i) (\rho_1(i) - \rho_1(i-k+1)), \quad k = 2, \dots, l-1, \\ \rho'_l(i) &= \rho_l(i) (\rho_1(i) - \rho_1(i-l+1)). \end{aligned} \quad (29)$$

ПРИМЕР 4 [17]. $n = 1$, $p = r$, $r \geq 1$, $l = p + 1$:

$$\begin{aligned} \rho'_1(i) &= \rho_{p+1}(i+p) - \rho_{p+1}(i), \\ \rho'_k(i) &= \rho_{k-1}(i) \rho_{p+1}(i+p-k+1) - \rho_{k-1}(i-1) \rho_{p+1}(i), \quad k = 2, \dots, p+1. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5. $n \geq 1$, $p = 1$, $r = -1$, $l = 2$:

$$\begin{aligned} \rho'_1(i) &= \rho_2(i+n) - \rho_2(i) + \rho_1(i) \left(\sum_{s=1}^n \rho_1(i-s) - \sum_{s=1}^n \rho_1(i+s) \right), \\ \rho'_2(i) &= \rho_2(i) \left(\sum_{s=1}^n \rho_1(i-s-n) - \sum_{s=1}^n \rho_1(i+s) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Система (28) известна как цепочка Богоявленского (ср. [15]). В частном случае $n = 2$ это цепочка Вольтерра. Цепочку Богоявленского можно рассматривать как однокомпонентную (минимальную) редукцию n -шелевой иерархии КП. Система (29) известна в литературе как обобщенная цепочка Тоды или цепочка Купершмидта. При $n = 1$ имеем цепочку Тоды. Система (30) при $n = 1$ рассматривалась в [18]. Все эти примеры, а также многие другие можно найти в работе [14].

ПРИМЕР 6. $n = 2$, $p = 1$, $r = 3$, $l = 2$ [19]:

$$\begin{aligned} (\rho_1(i-1) + \rho_1(i) + \rho_1(i+1))' &= (\rho_1(i-1) + \rho_1(i) + \rho_1(i+1)) \times \\ &\quad \times (\rho_1(i-1) - \rho_1(i+1)) + \rho_2(i+1) - \rho_2(i-1), \\ \rho'_2(i) &= \rho_2(i) (\rho_1(i+1) - \rho_1(i-1)), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\rho_1(i) \equiv q_1^{(2,1)}(i)$, $\rho_2(i) \equiv q_2^{(2,3)}(i)$.

ПРИМЕР 7. $n = 1$, $p = 1$, $r \geq 2$, $l = r$:

$$\begin{aligned} (\rho_1(i) + \dots + \rho_1(i + r - 1))' &= (\rho_1(i) + \dots + \rho_1(i + r - 1)) \times \\ &\times (\rho_1(i) - \rho_1(i + r - 1)) + \rho_2(i + 1) - \rho_2(i), \\ \rho'_k(i) &= \rho_k(i)(\rho_1(i) - \rho_1(i + r - k)) + \rho_{k+1}(i + 1) - \rho_{k+1}(i), \quad k = 2, \dots, r - 2, \\ \rho'_{r-1}(i) &= \rho_{r-1}(i)(\rho_1(i) - \rho_1(i + 1)) + \mu_{i+1} - \mu_i, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\rho_1(i) \equiv q_1^{(1,1)}(i)$, $\rho_k(i) \equiv q_k^{(1,r)}(i)$; $\mu_i = q_r^{(1,r)}(i)$ — постоянные в силу уравнений движения. Уравнения (32) описывают преобразование Дарбу дифференциального оператора r -го порядка [20]. Действительно, согласно результатам [21] можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i^l &= H_{i+(l-1)n} \dots H_{i+n} H_i + q_1^{(n,ln)}(i) H_{i+(l-2)n} \dots H_{i+n} H_i + \dots \\ &\dots + q_l^{(n,ln)}(i) + q_{l+1}^{(n,ln)}(i) H_{i-n}^{-1} + q_{l+2}^{(n,ln)}(i) H_{i-2n}^{-1} H_{i-n}^{-1} + \dots, \end{aligned}$$

где $H_i \equiv \partial^{(n)} - q_1^{(n,n)}(i)$ — оператор, определяющий элементарное преобразование Дарбу $z\psi_{i+n} = H_i\psi_i$. На $\mathcal{S}_{1,r,r}$ имеем

$$\mathcal{Q}_i^r = H_{i+r-1} \dots H_{i+1} H_i + \rho_1^{(r)}(i) H_{i+r-2} \dots H_{i+1} H_i + \rho_2(i) H_{i+r-3} \dots H_{i+1} H_i + \dots + \mu_i,$$

где $\rho_1^{(r)}(i) \equiv \rho_1(i) + \dots + \rho_1(i + r - 1)$. Как известно, условие $\mathcal{Q}_i^r = (\mathcal{Q}_i^r)_+$ определяет редукцию КП к иерархии Гельфанда–Дикого. В п. 4.2 мы более подробно обсудим связь интегрируемых цепочек с преобразованиями Дарбу ограниченных иерархий КП.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Системы (31) и (32), в отличие от приведенных выше примеров, не допускают запись в виде (27), так как в этих случаях числа pn/r являются дробными.

В заключение построим класс однокомпонентных цепочек, который естественно содержит в себе цепочки Богоявленского. Для наглядности рассмотрим цепочку, описывающую эволюцию на $\mathcal{S}_{4,2,1}$. Для $\rho = q_1^{(4,2)}$ имеем $\partial^{(4)}\rho_i = \rho_i(\rho_{i+2} - \rho_{i-2})$. Это цепочка Вольтерра, но дискретная переменная здесь изменяется на две единицы. Из (24) имеем $\rho_i = \sigma_i + \sigma_{i+1}$, где $\sigma \equiv q_1^{(4,1)}$. Кроме того, на $\mathcal{S}_{4,2,1}$

$$q_2^{(4,2)}(i) = 0 = q_2^{(4,1)}(i + 1) + q_2^{(4,1)}(i) + q_1^{(4,1)}(i - 3)q_1^{(4,1)}(i),$$

или

$$q_2^{(4,1)}(i + 1) + q_2^{(4,1)}(i) = -\sigma_{i-3}\sigma_i.$$

Тогда

$$q_2^{(4,1)}(i + 4) - q_2^{(4,1)}(i) = \sigma_{i-3}\sigma_i - \sigma_{i-2}\sigma_{i+1} + \sigma_{i-1}\sigma_{i+2} - \sigma_i\sigma_{i+3}. \quad (33)$$

Из (23) следует

$$\partial^{(4)}\sigma_i = \partial^{(4)}q_1^{(4,1)}(i) = q_2^{(4,1)}(i + 4) - q_2^{(4,1)}(i) + q_1^{(4,1)}(i)(q_1^{(4,4)}(i) - q_1^{(4,4)}(i - 3)).$$

Учитывая $q_1^{(4,4)}(i) = \sigma_i + \sigma_{i+1} + \sigma_{i+2} + \sigma_{i+3}$ и соотношение (33), окончательно получаем

$$\sigma'_i = \sigma_i(\sigma_{i+2} + \sigma_{i+1} - \sigma_{i-1} - \sigma_{i-2}) + \sigma_{i+2}\sigma_{i-1} - \sigma_{i-2}\sigma_{i+1}.$$

Теперь обобщим рассмотренный пример. На $\mathcal{S}_{mr,r,1}$, где $m \geq 2$ и $r \geq 1$, имеем

$$\partial^{(mr)} \rho_i = \rho_i \left(\sum_{s=1}^{m-1} \rho_{i+sr} - \sum_{s=1}^{m-1} \rho_{i-sr} \right),$$

где $\rho = q_1^{(mr,r)}$. Фактически это цепочки Богоявленского, где дискретная переменная изменяется на r единиц. Пусть $\sigma = q_1^{(mr,1)}$, тогда $\rho_i = \sigma_i + \dots + \sigma_{i+r-1}$. Опуская технические детали, сразу выпишем уравнения на σ :

$$\begin{aligned} \sigma'_i = & \sigma_i \left(\sum_{s=1}^{(m-1)r} \sigma_{i+s} - \sum_{s=1}^{(m-1)r} \sigma_{i-s} \right) + \\ & + \sum_{s=1}^{m-1} \sigma_{i+sr} \left(\sum_{s_1=1}^{r-1} \sigma_{i-s_1+(s-m+1)} \right) - \sum_{s=1}^{m-1} \sigma_{i-sr} \left(\sum_{s_1=1}^{r-1} \sigma_{i+s_1-(s-m+1)} \right). \end{aligned}$$

4.2. Связь ограниченных иерархий КП с интегрируемыми цепочками.

Как известно, интегрируемые цепочки служат для определения дискретных симметрий (преобразований Дарбу) для соответствующих интегрируемых (дифференциальных) иерархий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть решение цепочки ДКП принадлежит $\mathcal{S}_{n,r,l}$. Обозначим $m = ln - r$,

$$\psi = \psi_i, \quad \tilde{\psi} = \psi_{i+nm}, \quad a = z \frac{\tilde{\psi}}{\psi} = z \frac{\psi_{i+nm}}{\psi_i} = z^{1-nm} a^{[nm]}(i).$$

1. Если $m \geq 0$, то $(h, \tilde{h}, a)$ является решением иерархии ДКП, удовлетворяющим условиям

$$z^\ell a \in \mathcal{H}_+, \quad z^{\ell+r} a \in \mathcal{H}_+, \quad (34)$$

где $\ell = m - 1 \geq -1$.

2. Если $m < 0$, то $(h, \tilde{h}, a)$ является решением иерархии ДКП, удовлетворяющим условиям

$$z^{-\ell} a^{-1} \in \tilde{\mathcal{H}}_+, \quad z^{\ell+r} a \in \mathcal{H}_+. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую часть утверждения. Вторая часть доказывается аналогично. В силу утверждения 1 и его следствия тройка $(h, \tilde{h}, a)$ является решением иерархии ДКП. По условию

$$z^{1-n} a^{[n]}(i) \in \mathcal{H}_+(i), \quad z^{l(1-n)+r} a^{[ln-r]} \in \mathcal{H}_+(i). \quad (36)$$

Используя соображения, применяемые при доказательстве утверждения 2, как следствие (36) получаем

$$z^{(1-n)m} a^{[nm]}(i) \in \mathcal{H}_+(i), \quad z^{(l-m)n} a^{[mn]} \in \mathcal{H}_+(i).$$

Эти соотношения, в свою очередь, можно переписать в виде (34).

Как уже упоминалось выше, соотношения (34) определяют рациональные редукции Кричевера иерархии КП, включая (при $\ell = -1$) иерархии Гельфанда–Дикого. При этом r -я степень оператора Лакса выражается в виде отношения дифференциальных операторов (8). Используя стандартные рассуждения, несложно вывести, что из соотношений (35) следует, что

$$\mathcal{Q}^r = P_{|\ell+1|} Q_{\ell+r+1}.$$

Следует отметить некоторые работы, в которых упоминается связь интегрируемых цепочек с ограниченными иерархиями КП. В статье [22] в явном виде строятся дискретные симметрии для (мультибозонных в терминах этой работы) иерархий с оператором Лакса вида

$$\mathcal{Q} = \partial + \sum_{k=1}^n R_k (\partial - S_k)^{-1} \dots (\partial - S_2)^{-1} (\partial - S_1)^{-1}$$

как сдвиги на обобщенных цепочках Тоды (29). В работе [23] построен модифицированный вариант рациональных редукций Кричевера с помощью конструкции, существенно использующей некоторый класс однокомпонентных цепочек $(\mathcal{S}_{n,r,1}, r = 1, \dots, n-1)$, а также в явном виде определяются дискретные симметрии. Результаты этих работ согласуются друг с другом, а также с утверждением 4. В дальнейшем мы предполагаем более подробно исследовать вопросы цепочечных представлений интегрируемых иерархий типа КП.

Также отметим, что связь между интегрируемыми дискретными системами и ограниченными иерархиями КП используется при исследовании матричных моделей (см., например, [24]).

4.3. Цепочечные преобразования Миуры. Пусть дано некоторое решение цепочки ДКП. Для каждого $k \in \mathbb{Z}^*$ определим следующее преобразование:

$$g_k: \begin{cases} a(i) \rightarrow z^{1-k} a^{[k]}(ki), \\ h(i) \rightarrow h(ki). \end{cases} \quad (37)$$

ЛЕММА. *Справедливо соотношение*

$$\bar{a}^{[r]}(i) = z^{r(1-k)} a^{[rk]}(ki) \quad \forall r, k \in \mathbb{Z}^*, \quad (38)$$

где $\bar{a}(i) \equiv g_k(a(i))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $r > 0$, то

$$\begin{aligned} \bar{a}^{[r]}(i) &\equiv \bar{a}(i) \bar{a}(i+1) \dots \bar{a}(i+r-1) = \\ &= z^{r(1-k)} a^{[k]}(ki) a^{[k]}(ki+k) \dots a^{[k]}(ki+(r-1)k) = \\ &= z^{r(1-k)} a^{[rk]}(ki). \end{aligned}$$

Если $r < 0$, то

$$\begin{aligned}\bar{a}^{[r]}(i) &\equiv \bar{a}^{-1}(i-1)\bar{a}^{-1}(i-2)\dots\bar{a}^{-1}(i-|r|) = \\ &= z^{|r|(k-1)}a^{[-k]}(ki)a^{[-k]}(ki-k)\dots a^{[k]}(ki-(|r|-1)k) = z^{r(1-k)}a^{[rk]}(ki).\end{aligned}$$

В последнем случае использовано легко проверяемое тождество

$$\bar{a}^{-1}(i-1) = z^{k-1}a^{[-k]}(ki).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Множество преобразований с естественной операцией суперпозиции изоморфно мультипликативной полугруппе $\mathbb{Z}^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (38) имеем

$$\begin{aligned}g_r \circ g_k(a(i)) &= z^{1-r}\bar{a}^{[r]}(ri) = z^{1-r}z^{r(1-k)}a^{[rk]}(rki) = \\ &= z^{1-rk}a^{[rk]}(rki) = g_{rk}(a(i)).\end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Преобразование (37) является преобразованием симметрии цепочки ДКП.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 1 имеем

$$\begin{aligned}\partial_p \bar{a}(i) &= z^{1-k}\partial_p a^{[k]}(ki) = z^{1-k}a^{[k]}(ki)(H^{(p)}(ki+k) - H^{(p)}(ki)) = \\ &= \bar{a}(i)(\overline{H}^{(p)}(i+1) - \overline{H}^{(p)}(i)).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\partial_p \bar{h}(i) = \partial_p h(ki) = \partial H^{(p)}(ki) = \partial \overline{H}^{(p)}(i).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Пусть $\{h(i), a(i)\} \in \mathcal{S}_l^{kn}$, тогда $\{g_k(h(i)), g_k(a(i))\} \in \mathcal{S}_l^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z^{l-kn+1}a^{[kn]}(i) \in \mathcal{H}_+(i)$, то в силу (38)

$$z^{l-n+1}\bar{a}(i) = z^{l-n+1}z^{n(1-k)}a^{[kn]}(ki) = z^{l-kn+1}a^{[kn]}(ki) \in \mathcal{H}_+(ki) = \overline{\mathcal{H}}_+(i).$$

Таким образом, можно записать $g_k(\mathcal{S}_l^{kn}) \subset \mathcal{S}_l^n$.

Естественно, что преобразование (37) порождает соответствующее преобразование функций $q_k^{(n,r)}(i)$. Чтобы выяснить, как они преобразуются, естественно воспользоваться формулой (16). В силу (38) имеем

$$\begin{aligned}z^r &= \bar{a}^{[r]}(i) + \sum_{s \geq 1} \bar{q}_s^{(n,r)}(i)z^{s(n-1)}\bar{a}^{[r-sn]}(i) = \\ &= z^{r(1-k)}a^{[rk]}(ki) + \sum_{s \geq 1} \bar{q}_s^{(n,r)}(i)z^{s(n-1)}z^{(r-sn)(1-k)}a^{[(r-sn)k]}(ki).\end{aligned}$$

Умножая обе части этого соотношения на $z^{r(k-1)}$, получаем

$$z^{rk} = a^{[rk]}(ki) + \sum_{s \geq 1} \bar{q}_s^{(n,r)}(i) z^{s(kn-1)} a^{[kr-skn]}(ki).$$

Отсюда следует отождествление

$$\bar{q}_s^{(n,r)}(i) = q_s^{(kn,kr)}(ki). \quad (39)$$

Если мы хотим получить формулы преобразования в виде $\{q_s^{(kn,r)}(i)\} \rightarrow \{\bar{q}_s^{(n,r)}(i)\}$, то необходимо воспользоваться формулой (24). В качестве примера возьмем $n = 1$, $r = 1$, $k = 2$. Пусть $\bar{q}_s(i) \equiv \bar{q}_s^{(1,1)}(i)$ и $q_s(i) \equiv q_s^{(2,1)}(i)$, тогда

$$\begin{aligned} \bar{q}_1(i) &= q_1(2i) + q_1(2i+1), & \bar{q}_2(i) &= q_2(2i) + q_1(2i-1)q_1(2i) + q_1(2i+1), \\ \bar{q}_3(i) &= q_3(2i) + q_1(2i)q_2(2i-1) + q_1(2i-3)q_2(2i) + q_3(2i+1) \end{aligned}$$

и т.д. Эти соотношения отображают решения шелевой иерархии КП при $n = 2$ в решения дискретной иерархии КП. В частности, если $q_s(i) \equiv 0$, $s \geq 2$, то получаем хорошо известное преобразование Миуры между цепочками Вольтерра и Тоды:

$$\bar{q}_1(i) = q_1(2i) + q_1(2i+1), \quad \bar{q}_2(i) = q_1(2i-1)q_1(2i). \quad (40)$$

Заметим, что g_k только при $k = -1$ и $k = 1$ является обратимым преобразованием. Для $k \neq \pm 1$ соотношение (37) (или (39)) естественно назвать цепочечным преобразованием Миуры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть число $kl n - r$ не кратно k , решение цепочки ДКП принадлежит $\mathcal{S}_0^{kn} \cap \mathcal{S}_{l-1}^{kl n - r}$ и подмногообразия $\mathcal{S}_0^{kn}$ и $\mathcal{S}_{l-1}^{kl n - r}$ являются началом цепочек включений для этого решения. Тогда $g_k(\mathcal{S}_0^{kn} \cap \mathcal{S}_{l-1}^{kl n - r}) \subset \mathcal{S}_0^n \cap \mathcal{S}_{kl-1}^{kl n - r}$, причем $\mathcal{S}_0^n$ и $\mathcal{S}_{kl-1}^{kl n - r}$ являются началом цепочки включений для преобразованного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию имеем две цепочки пространств

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^{kn} &\subset \mathcal{S}_1^{2kn} \subset \dots, \\ \mathcal{S}_{l-1}^{kl n - r} &\subset \mathcal{S}_{2l-1}^{2(lkn-r)} \subset \dots \subset \mathcal{S}_{kl-1}^{k(lkn-r)} \subset \dots, \end{aligned}$$

которым принадлежит решение. Согласно утверждению 7 преобразованное решение принадлежит следующим подмногообразиям, образующим две цепочки включений:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^n &\subset \mathcal{S}_1^{2n} \subset \dots, \\ \mathcal{S}_{kl-1}^{kl n - r} &\subset \mathcal{S}_{2kl-1}^{2(kl n - r)} \subset \dots. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

В силу утверждения 8 можно записать $g_k(\mathcal{S}_{kn,r,l}) \subset \mathcal{S}_{n,r,kl}$. Совместно с формулой (39) утверждение 8 является достаточным основанием для построения преобразований

Миуры между интегрируемыми цепочками с конечным числом искомым функций. Простейший пример – преобразование, связывающее решения цепочки Вольтерра с решениями цепочки Тоды (40). Из утверждения 8, в частности, следует, что цепочки Богда-ленского (28) связаны преобразованием Миуры с обобщенными цепочками Тоды (29). В этом случае $g_n(\mathcal{S}_{n,1,1}) \subset \mathcal{S}_{1,1,n}$, $n \geq 2$.

Примеры цепочечных преобразований Миуры, связывающих однокомпонентные цепочки с многокомпонентными, выписаны в работах [21], [23]. В следующем разделе мы покажем, что поиск решений, инвариантных относительно групп растяжений, приводит к классу чисто дискретных уравнений, в котором типичным представителем является известное первое дискретное уравнение Пенлеве. Мы представим некоторые примеры таких систем и преобразований Миуры между ними.

5. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

5.1. Инвариантные решения. Очевидно, что линейные вспомогательные уравнения (20), (21) и их соотношения совместности (23) и (24) инвариантны относительно группы растяжений

$$q_k^{(n,r)}(i) \rightarrow \epsilon^k q_k^{(n,r)}(i), \quad t_l \rightarrow \epsilon^{-l} t_l, \quad z \rightarrow \epsilon z, \quad \Psi_i \rightarrow \epsilon^i \Psi_i.$$

Далее будем рассматривать зависимость лишь от конечного числа эволюционных параметров²⁾ $t_1, \dots, t_p$. В этом случае инвариантами группы растяжений будут

$$T_l = \frac{t_l}{(pt_p)^{l/p}}, \quad l = 1, \dots, p-1, \quad \xi = (pt_p)^{1/p} z, \quad \psi_i = z^i \Psi_i.$$

Отсюда следуют подстановки для соответствующих автомодельных решений

$$\begin{aligned} q_k^{(n,r)}(i) &= \frac{1}{(pt_p)^{k/p}} x_k^{(n,r)}(i), \\ \Psi_i &= z^i \psi_i(\xi; T_1, \dots, T_{p-1}). \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь $x_k^{(n,r)}(i)$ являются искомыми функциями от $T_1, \dots, T_{p-1}$. Непосредственная подстановка (41) в (23) дает

$$\partial_{T_l} x_k^{(n,r)}(i) = X_{k,l}^{(n,r)}(i), \quad l = 1, \dots, p-1, \tag{42}$$

и

$$\begin{aligned} kx_k^{(n,r)}(i) + T_1 X_{k,1}^{(n,r)}(i) + 2T_2 X_{k,2}^{(n,r)}(i) + \dots + (p-1)T_{p-1} X_{k,p-1}^{(n,r)}(i) + X_{k,p}^{(n,r)}(i) &= 0, \\ l &= 1, \dots, p-1. \end{aligned} \tag{43}$$

---

²⁾ Для краткости обозначение метки у эволюционных параметров опускаем.

Здесь $X_{k,l}^{(n,r)}(i)$ – правые части уравнений (23) $Q_{k,l}^{(n,r)}(i)$, в которых $q_k^{(n,r)}(i)$ заменены на $x_k^{(n,r)}(i)$. При этом из (24) следует

$$\begin{aligned} x_k^{(n,r_1+r_2)}(i) &= x_k^{(n,r_1)}(i) + \sum_{s=1}^{k-1} x_s^{(n,r_1)}(i) x_{k-s}^{(n,r_2)}(i+r_1-sn) + x_k^{(n,r_2)}(i+r_1) = \\ &= x_k^{(n,r_2)}(i) + \sum_{s=1}^{k-1} x_s^{(n,r_2)}(i) x_{k-s}^{(n,r_1)}(i+r_2-sn) + x_k^{(n,r_1)}(i+r_2). \end{aligned} \quad (44)$$

Соответствующие вспомогательные уравнения преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \partial_{T_l} \psi &= (X_{(n)}^{ln})_+ \psi, \quad l = 1, \dots, p-1, \\ \xi \psi_\xi &= \{T_1(X_{(n)}^n)_+ + 2T_2(X_{(n)}^{2n})_+ + \dots + (p-1)T_{p-1}(X_{(n)}^{(p-1)n})_+ + (X_{(n)}^{pn})_+\} \psi, \\ X_{(n)}^r \psi &= \xi \psi, \end{aligned}$$

где

$$X_{(n)}^r \equiv \xi \Lambda^r + \sum_{k \geq 1} \xi^{1-k} x_k^{(n,r)} \Lambda^{r-kn}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

5.2. Примеры. В качестве простейшего примера рассмотрим случай, отвечающий иерархии цепочки Вольтерра, т.е. $n = 2$, $r = 1$, $l = 1$. Выберем $p = 2$. Уравнения (42), (43) в этом случае запишутся в следующем виде:

$$x'_i = x_i(x_{i+1} - x_{i-1}), \quad (45)$$

$$x_i + T_1 x_i \{x_1^{(2,2)}(i) - x_1^{(2,2)}(i-1)\} + x_i \{x_2^{(2,4)}(i) - x_2^{(2,4)}(i-1)\} = 0, \quad (46)$$

где обозначено $x_i = x_1^{(2,1)}(i)$, а штрих означает производную $\partial/\partial T_1$. Используя (44), вычисляем

$$x_1^{(2,2)}(i) = x_i + x_{i+1}, \quad x_2^{(2,4)}(i) = x_i(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) + x_{i+1}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}).$$

С учетом этих соотношений уравнение (46) переписывается в виде

$$T_1 x_i + x_i(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) = \alpha_i, \quad 1 + \alpha_{i+1} - \alpha_{i-1} = 0. \quad (47)$$

Теперь покажем, что в силу (45) α_i – константы. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= x_i + T_1 x_i(x_{i+1} - x_{i-1}) + x_i(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) + \\ &+ x_i(x_{i+1}x_{i+2} - x_{i-1}x_{i-2}) = x_i(1 + \alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (47) в виде

$$x_{i-1} + x_i + x_{i+1} = -T_1 + \frac{\alpha_i}{x_i}, \quad (48)$$

где $\{\alpha_i\}$ – числовая последовательность, для которой выполняется условие $\alpha_{i+2} = \alpha_i - 1$. Решение этого уравнения можно записать в виде $\alpha_i = \alpha - i/2 + \beta(-1)^i$, где α и β – константы. При этих условиях уравнение (48) является первым дискретным уравнением Пенлеве [25].

Заметим, что уравнение (45) с учетом (48) можно переписать в виде

$$x'_i = 2x_i x_{i+1} + x_i^2 + T_1 x_i - \alpha_i.$$

Совместно с (48) эта цепочка эквивалентна паре обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} w'_1 &= 2w_1 w_2 + w_1^2 + T_1 w_1 + a, \\ w'_2 &= -2w_1 w_2 - w_2^2 - T_1 w_2 - b \end{aligned} \quad (49)$$

с преобразованием дискретной симметрии

$$\bar{w}_1 = w_2, \quad \bar{w}_2 = -w_1 - w_2 - T_1 - \frac{b}{w_2}, \quad \bar{a} = b, \quad \bar{b} = a + 1,$$

где $w_1 \equiv x_i$, $w_2 \equiv x_{i+1}$, $a \equiv -\alpha_i$, $b \equiv -\alpha_{i+1}$ для некоторого фиксированного (хотя и произвольного) значения $i = i_0$. В свою очередь, система (49) эквивалентна уравнению второго порядка

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 2T_1 w^2 + \left(\frac{T_1^2}{2} + a - 2b + 1\right)w - \frac{a^2}{2w}, \quad w \equiv w_1,$$

с соответствующим преобразованием симметрии

$$\bar{w} = \frac{w' - w^2 - T_1 w - a}{2w}, \quad \bar{a} = b, \quad \bar{b} = a + 1.$$

Фактически это четвертое уравнение Пенлеве с преобразованием Беклунда [26]. Заменой $T_1 \rightarrow \sqrt{2}T_1$, $w \rightarrow w/\sqrt{2}$ оно приводится к следующему каноническому виду:

$$\begin{aligned} w'' &= \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4T_1 w^2 + 2(T_1^2 + a - 2b + 1)w - \frac{2a^2}{w}, \\ \bar{w} &= \frac{w' - w^2 - 2T_1 w - 2a}{2w}, \quad \bar{a} = b, \quad \bar{b} = a + 1. \end{aligned} \quad (50)$$

В результате мы получили хорошо известный результат: первое дискретное уравнение Пенлеве (48) определяет преобразование Беклунда–Шлезингера для четвертого уравнения Пенлеве (50) [27].

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Уравнения (49) можно рассматривать как результат редукции системы Леви (ср. [28])

$$\begin{aligned}v_{1t_2} &= (-v'_1 + v_1^2 + 2v_1v_2)', \\v_{2t_2} &= (v'_2 + v_2^2 + 2v_1v_2)'\end{aligned}$$

с помощью подстановки

$$v_k = \frac{1}{(2t_2)^{1/2}} w_k(T_1), \quad k = 1, 2.$$

Напомним, что согласно результатам работы [23] система Леви и ее иерархия отвечают цепочке Вольтерра.

Рассмотрим теперь более общий случай, соответствующий цепочкам Богоявленского (28). Аналогами уравнений (45), (46) являются уравнения

$$x'_i = x_i \left(\sum_{s=1}^{n-1} x_{i+s} - \sum_{s=1}^{n-1} x_{i-s} \right), \quad (51)$$

$$x_i + T_1 x_i \{x_1^{(n,n)}(i) - x_1^{(n,n)}(i+1-n)\} + x_i \{x_2^{(n,2n)}(i) - x_2^{(n,2n)}(i+1-n)\} = 0. \quad (52)$$

При этом

$$x_1^{(n,n)}(i) = \sum_{s=1}^n x_{i+s-1}, \quad x_2^{(n,2n)}(i) = \sum_{s=1}^n x_{i+s-1} \left(\sum_{s_1=1}^{2n-1} x_{i+s_1+s-n-1} \right).$$

Соотношение (52) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}T_1 x_i + x_i(x_{i+1-n} + \dots + x_{i+n-1}) &= \alpha_i, \\1 + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{i+s} - \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{i-s} &= 0.\end{aligned} \quad (53)$$

Можно показать, что в силу (51)

$$\alpha'_i = x_i \left(1 + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{i+s} - \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{i-s} \right) = 0.$$

Таким образом, в этом случае автомодельная редукция приводит к уравнению

$$x_{i+1-n} + \dots + x_{i+n-1} = -T_1 + \frac{\alpha_i}{x_i}, \quad (54)$$

где постоянные α_i связаны условием (53).

Стандартный анализ конфайнмента сингулярностей показывает, что это свойство отображения (54) выполняется при условии

$$\alpha_{i+n} - \alpha_i = \alpha_{i+2n-1} - \alpha_{i+n-1}, \quad (55)$$

которое не противоречит (53), а является более общим. Покажем это. Из (53) следует

$$-1 = \sum_{s=1}^n \alpha_{i+s+n-1} - \sum_{s=1}^n \alpha_{i+s} = \sum_{s=1}^n \alpha_{i+s+n-2} - \sum_{s=1}^n \alpha_{i+s-1}. \quad (56)$$

Второе равенство в (56) можно переписать в виде

$$\sum_{s=2}^{n-1} \alpha_{i+s+n-1} + \alpha_{i+2n-1} - \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_{i+s} - \alpha_{i+n-1} = \alpha_{i+n} + \sum_{s=3}^n \alpha_{i+s+n-2} - \alpha_i - \sum_{s=2}^{n-1} \alpha_{i+s-1}.$$

Отсюда следует (55).

Как известно, цепочку Богоявленского (28) для любого n можно интерпретировать как интегрируемую дискретизацию уравнения Кортевега–де Фриза. Аналогично автономная версия уравнения (54) для любого n является интегрируемой дискретизацией первого уравнения Пенлеве $w'' = 6w^2 + t$. Покажем это. Пусть $\alpha_i = \alpha$. Вещественная прямая делится на равные отрезки длины ε , и, таким образом, можно записать $t = i\varepsilon$. Соответственно значения функции w берутся при этих значениях переменной t . Тогда можно обозначить $w(t) = w_i$. Пусть

$$x_i = 1 + \varepsilon^2 w_i, \quad \alpha = 1 - 2n - \varepsilon^4 t, \quad T_1 = -(2n - 1). \quad (57)$$

Подставляя (57) в уравнение (54), учитывая разложения вида

$$x_{i+1} = 1 + \varepsilon^2 w_{i+1} = 1 + \varepsilon^2 \left\{ w + \varepsilon w' + \frac{\varepsilon^2}{2} w'' + \dots \right\}$$

и устремляя ε к нулю, получим в непрерывном пределе дифференциальное уравнение

$$\sum_{s=1}^{n-1} (n-s)^2 \cdot w'' = -t - (2n-1)w^2,$$

которое преобразованием растяжения приводится к каноническому виду первого дискретного уравнения Пенлеве.

В заключение представим два примера интегрируемых отображений и преобразований Миуры между ними.

ПРИМЕР 8. Цепочке Тоды соответствует двухкомпонентное отображение

$$\begin{aligned}\beta_i &= T_1 y_1(i) + y_1^2(i) + y_2(i) + y_2(i+1), \\ y_1(i) + y_2(i+1)(y_1(i) + y_1(i+1) + T_1) - y_2(i)(y_1(i) + y_1(i-1) + T_1) &= 0, \\ 2 + \beta_i - \beta_{i-1} &= 0.\end{aligned}\quad (58)$$

Связь с первым дискретным уравнением Пенлеве (48) определяется преобразованием Миуры

$$y_1(i) = x_{2i} + x_{2i+1}, \quad y_2(i) = x_{2i-1}x_{2i}, \quad \beta_i = \alpha_{2i} + \alpha_{2i+1}. \quad (59)$$

Например, подстановка (59) во второе уравнение в (58) дает

$$x_{2i}(1 + \alpha_{2i+1} - \alpha_{2i-1}) + x_{2i+1}(1 + \alpha_{2i+2} - \alpha_{2i}) = 0.$$

ПРИМЕР 9. Трехкомпонентной обобщенной цепочке Тоды (29) соответствует отображение

$$\begin{aligned}\beta_i &= T_1 y_1(i) + y_1^2(i) + y_2(i) + y_2(i+1), \\ y_1(i) + y_2(i+1)(y_1(i) + y_1(i+1) + T_1) - \\ &\quad - y_2(i)(y_1(i) + y_1(i-1) + T_1) + y_3(i+2) - y_3(i) = 0, \\ y_2(i)(2 + \beta_i - \beta_{i-1}) + y_3(i+1)(y_1(i) + y_1(i+1) + T_1) - \\ &\quad - y_3(i)(y_1(i-1) + y_1(i-2) + T_1) = 0, \\ 3 + \beta_i - \beta_{i-2} &= 0.\end{aligned}\quad (60)$$

При $n = 3$ эта система связана преобразованием Миуры

$$\begin{aligned}y_1(i) &= x_{3i} + x_{3i+1} + x_{3i+2}, & y_2(i) &= x_{3i-2}x_{3i} + x_{3i-1}x_{3i} + x_{3i-1}x_{3i+1}, \\ y_3(i) &= x_{3i-4}x_{3i-2}x_{3i}, & \beta_i &= \alpha_{3i} + \alpha_{3i+1} + \alpha_{3i+2}\end{aligned}$$

с уравнением (54).

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ № 03-01-00102 и INTAS № 2000-15.

Список литературы

- [1] *F. Magri, M. Pedroni, J. P. Zubelli.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 305.
- [2] *A. K. Svinin.* Lett. Math. Phys. 2002. V. 61. P. 231.
- [3] *K. Ueno, K. Takasaki.* Proc. Japan Acad. A. 1983. V. 59. P. 169; P. 215.
- [4] *P. Casati, G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* The KP theory revisited I–IV. Preprints SISSA/2–5/96/FM. Trieste: SISSA, 1996; J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 4605; *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 197. P. 303.

- [5] *И. В. Чередник*. Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. С. 45.
- [6] *G. Wilson*. Quart. J. Math. Oxford. 1981. V. 32. P. 491.
- [7] *Б. А. Купершмидт*. КП или мКП: некоммутативная математика лагранжевых, гамильтоновых и интегрируемых систем. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
- [8] *И. М. Кричевер*. Функц. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 1.
- [9] *B. G. Konopelchenko*. Phys. Lett. A. 1982. V. 92. P. 323; *M. Jimbo, T. Miwa*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1983. V. 59. P. 943.
- [10] *L.-L. Chau, J. C. Shaw, H. C. Yen*. Commun. Math. Phys. 1992. V. 149. P. 263.
- [11] *L. A. Dickey*. Lett. Math. Phys. 1995. V. 35. P. 229.
- [12] *И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий*. Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. С. 18.
- [13] *B. A. Kupershmidt*. Discrete Lax Equations and Differential-Difference Calculus. Paris: Astérisque, 1985.
- [14] *J. L. Cieřliński, M. Czachor, N. V. Ustinov*. J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 1763.
- [15] *K. Narita*. J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. P. 1682.
- [16] *О. И. Богоявленский*. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991.
- [17] *M. Błaszak, K. Marciniak*. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 4661.
- [18] *A. A. Belov, K. D. Chaltikian*. Phys. Lett. B. 1993. V. 309. P. 268.
- [19] *X.-B. Hu, H.-W. Tam*. Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 319.
- [20] *В. Э. Адлер, В. Г. Марихин, А. Б. Шабат*. ТМФ. 2001. Т. 129. С. 163.
- [21] *А. К. Свинин*. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 2045.
- [22] *H. Aratyn, L. A. Ferreira, A. H. Zimmermann*. Phys. Lett. B. 1994. V. 327. P. 266.
- [23] *А. К. Свинин*. ТМФ. 2002. Т. 130. С. 15.
- [24] *H. Aratyn, E. Nissimov, S. Pacheva*. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 1265; *L. Bonora, C. S. Xiong*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 405. P. 191.
- [25] *B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1825.
- [26] *Н. А. Лукашевич*. Дифф. уравнения. 1967. Т. 3. С. 771; *В. И. Громак*. Дифф. уравнения. 1978. Т. 14. С. 2131.
- [27] *B. Grammaticos, A. Ramani*. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 5787.
- [28] *В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, М. Бойти, Ф. Пемпинелли*. ЖЭТФ. 2000. Т. 117. С. 634.

Поступила в редакцию 13.I.2004 г.,
после доработки 22.III.2004 г.