Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Бугрий, Решение 2D-модели Изинга на треугольной решетке методом вспомогательного q -деформированного грассманова поля, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 3, 441–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:31:51

Е. А. Бугрий*

РЕШЕНИЕ 2D-МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО q -ДЕФОРМИРОВАННОГО ГРАССМАНОВА ПОЛЯ

Получено представление статистической суммы неоднородной 2D-модели Изинга на треугольной решетке (параметры связи являются произвольными функциями координат) в виде функционального интеграла. В методе преобразования статистической суммы в интеграл используется вспомогательное шестикомпонентное грассманово поле, причем грассмановы поля, соответствующие одной из компонент, коммутируют с остальными. Тем самым одна пара компонент реализует представление q -деформированной группы $SL_q(2, R)$ с $q = -1$, а две другие пары – обычные грассмановы спиноры ($q = 1$). Найдены явное выражение через модифицированный пфаффиан для гауссова интеграла по таким полям и его связь с обычным грассмановым функциональным интегралом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная модель Изинга со взаимодействием ближайших соседей на треугольной решетке имеет ряд свойств, отличающих ее от модели на квадратной решетке. Во-первых, она имеет три, а не два параметра связи и фазовая диаграмма представляет собой поверхность, а не кривую. Во-вторых, существует такое соотношение между параметрами взаимодействия, в частности полностью антиферромагнитный случай, когда система не претерпевает фазового превращения вплоть до нулевой температуры. Здесь вследствие фрустраций основное состояние оказывается бесконечно вырожденным, имеется остаточная энтропия. Весьма нетривиальны при этом эффекты конечных размеров и соответственно квантовое содержание модели [1].

Вычисление статистической суммы треугольной модели Изинга представляет собой довольно сложную задачу [2], особенно в случае конечных размеров решетки при конкретных граничных условиях [1]. Между тем существует весьма эффективный способ решения модели Изинга, так называемый метод вспомогательного грассманова поля [3–5], который позволяет представить статистическую сумму в виде грассманова функ-

* Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины

ционального интеграла с гауссовым распределением

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]} = \text{const} \int \mathcal{D}\psi e^{\frac{1}{2}(\psi \hat{D} \psi)},$$

где $\hat{D}$ – решеточный аналог оператора Дирака. Причем такого типа представление имеет место не только для однородного случая в термодинамическом пределе, но и при конечных размерах решетки при произвольных, зависящих от координат параметрах взаимодействия. Это позволяет изучать различные модулированные решетки, дает хорошее основание для анализа решеточных систем со случайными связями. Представление в виде функционального интеграла (в гауссовом случае он выражается через пфаффиан антисимметричной матрицы, определяющей антикоммутирующую квадратичную форму) проясняет взаимосвязь между решеточной моделью и соответствующей ей квантовой теорией поля или конформной квантовой теорией поля в критической точке. Такое представление удобно для вычисления корреляционных функций и расчета эффектов конечных размеров.

2. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА

Если быть точным, то используемое при решении задачи вспомогательное поле, о котором упоминалось выше, является не просто грассмановым, а скорее q -деформированным грассмановым полем [6]. Дело в том, что в математических преобразованиях в рассматриваемом подходе используется множество грассмановых чисел, состоящее из двух коммутирующих между собой подмножеств, которые обозначим соответственно через переменные с точками и без точек

$$[\psi_i], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad [\dot{\varphi}_j], \quad j = 1, 2, \dots, \dot{N}, \quad (1)$$

$$\{\psi_i, \psi_k\} = \{\dot{\varphi}_i, \dot{\varphi}_k\} = [\psi_i, \dot{\varphi}_k] = 0. \quad (2)$$

Операция интегрирования для каждого из них определена обычным для грассмановых переменных образом

$$\int d\psi_i = \int d\dot{\varphi}_i = 0, \quad \int d\psi_i \psi_i = \int d\dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_i = 1. \quad (3)$$

Множественный гауссов интеграл выражается через пфаффиан

$$\int \mathcal{D}\psi e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi)} = \text{Pf}(A), \quad \int \mathcal{D}\dot{\varphi} e^{\frac{1}{2}(\dot{\varphi} C \dot{\varphi})} = \text{Pf}(C), \quad (4)$$

где меры $\mathcal{D}\psi$ и $\mathcal{D}\dot{\varphi}$ равны

$$\mathcal{D}\psi = \prod_{i=1}^N d\psi_i, \quad \mathcal{D}\dot{\varphi} = \prod_{i=1}^{\dot{N}} d\dot{\varphi}_i, \quad (5)$$

A и C – антисимметричные матрицы с размерностями N и $\dot{N}$, соответственно. Мы будем рассматривать случай четных размерностей (для нечетных размерностей антисимметричная матрица имеет по крайней мере одно нулевое собственное значение, и сама конструкция пфаффиана не определена). Замечательно, что и в смешанном случае, когда в квадратичной форме присутствуют грассмановы поля как с точкой, так и без нее, функциональный интеграл может быть явно вычислен (см. приложение), а именно:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\dot{\varphi} e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} C \dot{\varphi}) + (\psi B \dot{\varphi})} &= \text{Pf}(A) \text{Pf}(C - B^T A^{-1} B) = \\ &= \text{Pf}(C) \text{Pf}(A - B C^{-1} B^T). \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая это выражение с обычным грассмановым функциональным интегралом, когда ψ_i антикоммутирует с φ_j (чтобы различать эти два случая, мы и ввели обозначение “точка”),

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\varphi e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi) + \frac{1}{2}(\varphi C \varphi) + (\psi B \varphi)} &= \text{Pf}(A) \text{Pf}(C + B^T A^{-1} B) = \\ &= \text{Pf}(C) \text{Pf}(A + B C^{-1} B^T), \end{aligned} \quad (7)$$

видим, что соответствующие функциональные интегралы связаны между собой простым соотношением

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\dot{\varphi} e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} C \dot{\varphi}) + (\psi B \dot{\varphi})} &= (-1)^{\dot{N}/2} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\varphi e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi) - \frac{1}{2}(\varphi C \varphi) + (\psi B \varphi)} = \\ &= (-1)^{N/2} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}(\psi A \psi) + \frac{1}{2}(\varphi C \varphi) + (\psi B \varphi)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что при выводе (8) (цепочка равенств (6), (7)) предполагалось, что N и $\dot{N}$ четные. Для нечетных N и $\dot{N}$ равенства (8) остаются в силе, изменяются только знаковые факторы перед интегралами:

$$(-1)^{\dot{N}/2} \rightarrow (-1)^{(\dot{N}-1)/2}, \quad (-1)^{N/2} \rightarrow (-1)^{(N-1)/2}.$$

Можно, таким образом, сформулировать простое правило “снятия точек”: смешанный функциональный интеграл переходит в обычный грассманов функциональный интеграл, если при этом изменить знаки на противоположные у тех членов квадратичной формы, в которых грассмановы поля с точкой стоят слева, т.е.

$$\begin{aligned} \psi_i \psi_j &\rightarrow \psi_i \psi_j, & \psi_i \dot{\varphi}_j &\rightarrow \psi_i \varphi_j, \\ \dot{\varphi}_i \psi_j &\rightarrow -\varphi_i \psi_j, & \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j &\rightarrow -\varphi_i \varphi_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Вследствие коммутационных соотношений (2) функции от грассмановых полей с точками коммутируют с функциями от грассмановых полей без точек:

$$F[\psi_i] G[\dot{\varphi}_i] = G[\dot{\varphi}_i] F[\psi_i], \quad (10)$$

в то время как для функций от грассмановых полей одного сорта коммутационные соотношения имеют вид [5]

$$F[\psi_i]G[\psi_i] = \frac{1}{2}(G[\psi_i]F[\psi_i] + G[-\psi_i]F[\psi_i] + G[\psi_i]F[-\psi_i] - G[-\psi_i]F[-\psi_i]), \quad (11)$$

здесь через $F[\psi]$, $G[\varphi]$ обозначены функции $F(\psi_1, \dots, \psi_N)$, $G(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$.

Введение смешанного набора грассмановых переменных (с точками и без них) является не только вполне допустимым с формальной точки зрения и представляет собой удобный аппарат для решения конкретной задачи, но и имеет нетривиальное математическое содержание. Как известно, обычные спиноры η^α ($\alpha = 1, 2$) и грассмановы спиноры ψ^α , реализующие представление $SL(2, R)$, можно определить как подпространства, выделяемые ортонормальными проекторами – симметризатором $\mathcal{S}$ и антисимметризатором $\mathcal{A}$, соответственно,

$$\mathcal{A}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \eta^\gamma \eta^\delta = 0, \quad \mathcal{S}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta = 0. \quad (12)$$

Второе из этих уравнений, в частности, определяет антикоммутативность и нильпотентность компонент грассмановых спиноров. Обобщение определений (12) на квантовую группу $SL_q(2, R)$, где q – параметр деформации, производится с помощью R -матрицы, удовлетворяющей уравнению Янга–Бакстера

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(q)} &= 1 + qR, \quad \mathcal{S}_{(q)} = 1 - qR, \\ R &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Определенные с помощью уравнений, аналогичных (12), q -грассмановы спиноры

$$\mathcal{S}_{(q)\alpha\beta}^{\gamma\delta} \psi^\alpha \psi^\beta = 0$$

переходят при $q = 1$ в обычные грассмановы спиноры (верхняя и нижняя компоненты антикоммутируют), а при значении $q = -1$ имеем

$$\psi^1 \psi^2 = \psi^2 \psi^1,$$

т. е. верхняя и нижняя компоненты становятся коммутирующими. При введении ($q = -1$)-грассманова поля ψ_r^α , где индекс r задает координаты на решетке, коммутационные соотношения, определяемые R -матрицей (13), приобретают следующий вид:

$$\{\psi_r^1, \psi_{r'}^1\} = \{\psi_r^2, \psi_{r'}^2\} = [\psi_r^1, \psi_{r'}^2] = 0, \quad (14)$$

т. е. верхние компоненты ψ_r^1 образуют рассмотренное нами подмножество грассмановых полей без точек, а нижние компоненты ($q = -1$)-грассманова спинора – подмножество грассмановых полей с точками. Область математической физики, касающаяся q -деформированных групп и алгебр и связанных с ними матричных моделей, в настоящее

время активно развивается. Обнаруживаются интересные взаимосвязи между точно решаемыми моделями и классификацией соответствующих пространств Фока по представлениям q -деформированных групп [7]. Для целей, поставленных в данной работе, достаточно ограничиться объектами, соответствующими частному значению $q = -1$.

3. МОДЕЛЬ

Статистическая сумма 2D-модели Изинга на треугольной решетке (рис. 1) имеет вид

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]}, \quad (15)$$

где $\beta = 1/kT$ – обратная температура, $H[\sigma]$ – гамильтониан системы

$$-\beta H[\sigma] = \sum_{\langle rr' \rangle} K_{rr'} \sigma_r \sigma_{r'}, \quad \sigma_r = \pm 1. \quad (16)$$

Суммирование в (16) ведется по всем связям, соединяющим ближайших соседей. Каждой связи $\langle rr' \rangle$ соответствует параметр взаимодействия $K_{rr'} = \beta J_{rr'}$. Количество спинов в одном ряду равно n , количество рядов в решетке равно m , полное число узлов $N = mn$.

Рис. 1. Треугольная решетка.

Суть рассматриваемого метода суммирования статистической суммы (15) очень простая и заключается в том, чтобы с помощью тождеств типа

$$e^{K\sigma\sigma'} = \cosh K \int d\psi' d\psi e^{t\sigma\sigma'\psi\psi'} e^{\psi} e^{\psi'} = \sigma\sigma' \cosh K \int d\psi' d\psi e^{t\psi\psi'} e^{\sigma\psi} e^{\sigma'\psi'},$$

$$t = \tanh K, \quad (17)$$

факторизовать перекрестные члены в статистических весах $e^{K_{rr'}\sigma_r\sigma_{r'}}$. После этого появляется возможность переупорядочить произведение статистических весов

$$\exp\left(\sum_{\langle rr'\rangle} K_{rr'}\sigma_r\sigma_{r'}\right) = \prod_{\langle rr'\rangle} \exp\{K_{rr'}\sigma_r\sigma_{r'}\} \quad (18)$$

таким образом, чтобы отдельные множители содержали изинговские переменные σ_r только с одинаковыми координатами. Благодаря этому суммирование по спиновым конфигурациям в (15) выполняется элементарно, т.к. сводится к произведению сумм по состояниям одного спина $\sigma_r = \pm 1$ в каждом узле решетки

$$\sum_{[\sigma]} F[\sigma] \rightarrow \prod_r \left(\sum_{\sigma_r = \pm 1} f(\sigma_r) \right). \quad (19)$$

В результате статистическая сумма (15) выразится через грассманов функциональный интеграл (в рассматриваемом случае с гауссовым распределением). Правда, возникает одно препятствие на пути реализации данной схемы: это некоммутативность экспонент e^ψ , $e^{\psi'}$ в (17), которые по замыслу нужно будет перемещать в соответствующие одноузельные сомножители. Чтобы обойти это препятствие, и потребуется использование грассмановых полей с точкой, рассмотренных в предыдущем разделе.

Рис. 2. Направления единичных векторов на треугольной решетке.

Приведем теперь к подходящему для вычислений виду выражение (15) для статистической суммы

$$Z = \sum_{[\sigma]} \prod_r w_r, \quad (20)$$

где

$$w_r = w(\sigma_r, \sigma_{r'}, \sigma_{r''}) = e^{K_{r'r''}\sigma_{r'}\sigma_{r''} + K_{r'r}\sigma_{r'}\sigma_r + K_{r''r}\sigma_{r''}\sigma_r}. \quad (21)$$

Статистический вес w_r нумеруется координатами спина, расположенного в правом верхнем углу элементарного треугольника решетки, как показано на рис. 2. На этом рисунке изображены направления единичных векторов $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, соединяющих соседние узлы,

$$r - r' = \hat{a}, \quad r - r'' = \hat{b}, \quad r'' - r' = \hat{c} = \hat{a} - \hat{b}. \quad (22)$$

Поскольку мы предполагаем использовать для w_r тождество, аналогичное (17), в котором присутствуют некоммутирующие множители, необходимо выбрать какой-нибудь определенный порядок сомножителей в произведении (20), например по строкам:

$$\prod_r w_r \equiv \prod_y \left(\prod_x w_{x,y} \right). \quad (23)$$

Спины σ_r с одинаковыми координатами входят в три сомножителя w_r , $w_{r+\hat{a}}$ и $w_{r-\hat{b}}$, два из которых стоят в (23) рядом, а $w_{r-\hat{b}}$ — в предыдущей строке:

$$\prod_r w_r = \dots (\dots w_{r-\hat{b}} \dots) \times (\dots w_r w_{r+\hat{a}} \dots) \dots \quad (24)$$

Учитывая это, представим w_r через грассманов интеграл, расставляя должным образом компоненты с точками, а именно:

$$w_r = \cosh K_{r'r''} \cosh K_{r'r} \cosh K_{r''r} \int d\psi_r e^{\mathcal{L}_r(\sigma\psi)} u_r(\psi), \quad (25)$$

где

$$d\psi_r = d\psi_r^1 d\psi_r^2 d\psi_{r'}^3 d\psi_{r'}^4 d\psi_{r''}^6 d\psi_{r''}^5, \quad (26)$$

$$\mathcal{L}_r(\sigma\psi) = t_{r'r''} \sigma_{r'} \sigma_{r''} \psi_{r'}^3 \psi_{r''}^6 + t_{r'r'} \sigma_{r'} \sigma_r \psi_{r'}^4 \psi_r^1 + t_{r''r} \sigma_{r''} \sigma_r \psi_{r''}^5 \psi_r^2, \quad (27)$$

$$u_r(\psi) = u_{r'}^{(2)} u_r^{(1)} u_{r''}^{(3)}, \quad (28)$$

$$u_r^{(1)} = e^{\psi_r^1} e^{\psi_r^2}, \quad u_{r'}^{(2)} = e^{\psi_{r'}^3} e^{\psi_{r'}^4}, \quad u_{r''}^{(3)} = e^{\psi_{r''}^6} e^{\psi_{r''}^5}.$$

Координаты соседних узлов r , r' и r'' показаны на рис. 2. В справедливости (25) легко убедиться прямым вычислением. Для всей решетки обобщением (25) является

$$\prod_r w_r = \kappa \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\sum_r \mathcal{L}_r(\sigma\psi) \right) \prod_y \left(\prod_x u_r(\psi) \right), \quad (29)$$

где мера

$$\mathcal{D}\psi = \prod_r \left(d\psi_r^1 d\psi_r^2 d\psi_{r'}^3 d\psi_{r'}^4 d\psi_{r''}^6 d\psi_{r''}^5 \right). \quad (30)$$

Постоянная κ есть произведение гиперболических косинусов по всем связям $\langle rr' \rangle$ на решетке

$$\kappa = \prod_{\langle rr' \rangle} \cosh K_{rr'}. \quad (31)$$

Заметим, что (29) не является произведением интегралов (25). Однако, вследствие того что все слагаемые в сумме $\sum_r \mathcal{L}_r$ коммутируют между собой и сомножителями (26) меры (30), интегрирование в (29) выполняется последовательно в том порядке, в каком

задано произведение $\prod_r u_r$, приводя на каждом шаге к интегралам (25). Произведение $\prod_r u_r$ переупорядочивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \prod_r u_r &= \prod_y \left(\prod_x u_{r-\hat{a}}^{(2)} u_r^{(1)} \dot{u}_{r-\hat{b}}^{(3)} \right) \Rightarrow \prod_y \left(\left(\prod_x u_r^{(1)} u_r^{(2)} \right) \left(\prod_x \dot{u}_{r-\hat{b}}^{(3)} \right) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \prod_y \left(\left(\prod_x \dot{u}_r^{(3)} \right) \left(\prod_x u_r^{(1)} u_r^{(2)} \right) \right) \Rightarrow \prod_y \left(\prod_x u_r^{(1)} u_r^{(2)} \dot{u}_r^{(3)} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Как нетрудно видеть, на всех этапах переупорядочения (32) не был нарушен порядок некоммутирующих сомножителей. Для одноузельного произведения в (32), которое обозначим через $\tilde{u}_r(\psi)$:

$$\tilde{u}_r(\psi) = u_r^{(1)} u_r^{(2)} \dot{u}_r^{(3)} = e^{\psi_r^1} e^{\psi_r^2} e^{\psi_r^3} e^{\psi_r^4} e^{\psi_r^5} e^{\psi_r^6}, \quad (33)$$

имеет место равенство

$$\tilde{u}_r(\psi) = e^{\mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)} (1 + \psi_r^1 + \psi_r^2 + \psi_r^3 + \psi_r^4 + \psi_r^5 + \psi_r^6),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi) &= \psi_r^1 \psi_r^2 + \psi_r^1 \psi_r^3 + \psi_r^1 \psi_r^4 + \psi_r^2 \psi_r^3 + \psi_r^2 \psi_r^4 + \psi_r^3 \psi_r^4 + \\ &+ (\psi_r^1 + \psi_r^2 + \psi_r^3 + \psi_r^4)(\psi_r^5 + \psi_r^6) - \psi_r^5 \psi_r^6. \end{aligned} \quad (34)$$

С учетом (34) имеем для (29)

$$\prod_r w_r = \kappa \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\sum_r \mathcal{L}_r(\sigma\psi) \right) \prod_r \left(e^{\mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^6 \psi_r^\alpha \right) \right)$$

и после замены переменных $\sigma_r \psi_r^\alpha \rightarrow \psi_r^\alpha$ получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi &\rightarrow \mathcal{D}\psi, \quad \mathcal{L}_r(\sigma\psi) \rightarrow \mathcal{L}_r(\psi), \quad \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi) \rightarrow \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi), \\ 1 + \sum_{\alpha=1}^6 \psi_r^\alpha &\rightarrow 1 + \sigma_r \sum_{\alpha=1}^6 \psi_r^\alpha, \\ Z &= \sum_{\{\sigma\}} \prod_r w(\sigma_r, \sigma_{r'}, \sigma_{r''}) = \kappa \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\sum_r \mathcal{L}_r(\psi) \right) \times \\ &\times \prod_r \left(e^{\mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)} \sum_{\sigma_r=\pm 1} \left(1 + \sigma_r \sum_{\alpha=1}^6 \psi_r^\alpha \right) \right). \end{aligned}$$

Суммирование по изинговским спинам уничтожает не коммутирующие с остальными сомножителями члены $\sigma_r \sum \psi_r^\alpha$, и в результате получается следующее представление для статистической суммы (20):

$$Z = 2^N \kappa \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\sum_r (\mathcal{L}_r(\psi) + \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)) \right), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_r(\psi) &= t_{r,r+\hat{e}}\psi_r^3\dot{\psi}_{r+\hat{e}}^6 + t_{r,r+\hat{a}}\psi_r^4\dot{\psi}_{r+\hat{a}}^1 + t_{r,r-\hat{b}}\psi_r^2\dot{\psi}_{r-\hat{b}}^5, \\ \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi) &= \psi_r^1\psi_r^2 + \psi_r^1\psi_r^3 + \psi_r^1\psi_r^4 + \psi_r^2\psi_r^3 + \psi_r^2\psi_r^4 + \psi_r^3\psi_r^4 + \\ &\quad + (\psi_r^1 + \psi_r^2 + \psi_r^3 + \psi_r^4)(\dot{\psi}_r^5 + \dot{\psi}_r^6) - \dot{\psi}_r^5\dot{\psi}_r^6.\end{aligned}\quad (36)$$

Воспользовавшись правилом “снятия точек” (8), сформулированным в предыдущем разделе, приведем (35) к более привычному виду, т.е. к обычному грассманову функциональному интегралу

$$\begin{aligned}Z &= 2^N \kappa \int \mathcal{D}\psi e^{A(\psi)} = \kappa \int \mathcal{D}\psi e^{\frac{1}{2}(\psi \hat{D} \psi)} = \text{Pf}(\hat{D}), \\ \mathcal{D}\psi &= \prod_r \prod_{\alpha=1}^6 d\psi_r^\alpha\end{aligned}\quad (37)$$

с квадратичным действием

$$A(\psi) = \frac{1}{2}(\psi \hat{D} \psi) = \sum_r (\mathcal{L}_r(\psi) + \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)), \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_r(\psi) &= -t_{r,r+\hat{a}}\psi_r^1\psi_{r+\hat{a}}^4 + t_{r,r-\hat{b}}\psi_r^2\psi_{r-\hat{b}}^5 + t_{r,r+\hat{e}}\psi_r^3\psi_{r+\hat{e}}^6, \\ \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi) &= \sum_{\alpha < \beta} \psi_r^\alpha \psi_r^\beta.\end{aligned}\quad (39)$$

Знак $(-1)^{\frac{N}{2}}$ в соотношениях (8) компенсируется изменением порядка сомножителей в мере (37) по сравнению с (30). Отметим, что выражение (39) отличается по форме от (36) только знаком перед членом $\psi_r^5\psi_r^6$.

При произвольных $K_{rr'}$ нельзя аналитически вычислить пфаффиан или определитель матрицы $\hat{D}$. Однако, если $K_{rr'}$ имеют какую-либо регулярную зависимость от координат, то матрица $\hat{D}$ приводится к квазидиагональному виду с помощью соответствующего фурье-преобразования, и логарифм статистической суммы приобретает вид

$$\ln Z = N \ln 2 + \sum_{\langle rr' \rangle} \ln \cosh K_{rr'} + \frac{1}{2} \sum_{p,q} \ln \det(D(p,q)), \quad (40)$$

p, q – проекции квазиимпульса. К конкретному и явному выражению $D(p, q)$ мы обратимся в следующих разделах (в частном случае, когда $K_{rr'} = \text{const}$ матрица $D(p, q)$ имеет размерность 6×6).

А сейчас сделаем несколько замечаний к проделанным выкладкам. Подчеркнем, во-первых, что задача Изинга с помощью данного метода решается буквально “в три строчки”: анзац (29), преобразования (32), (35) и результат (37). Однако полученное представление справедливо, строго говоря, только в термодинамическом пределе

$m, n \rightarrow \infty$, поскольку мы пренебрегли усложнениями, связанными с граничными условиями. Так, например, в случае периодических по вертикальному направлению граничных условий в переупорядоченном произведении (32) содержится множитель

$$\prod_x e^{\psi_{x,1}^6} e^{\psi_{x,1}^5},$$

который должен быть пронесен через всю решетку в первую строку, где расположены соответствующие ему множители. Такая перестановка может быть корректно проведена, хотя и требует некоторых ухищрений. В следующем разделе мы детально рассмотрим случай периодических граничных условий.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим случай периодических (по обоим направлениям) граничных условий, т.е. треугольную решетку с размерами $n \times m$, натянутую на тор. Определение “периодические” для треугольной решетки нуждается в уточнении. Так, например, решетки, изображенные на рис. 3, обладают разной периодичностью: для рис. 3а $\sigma_r = \sigma_{r+n\hat{a}} = \sigma_{r+m\hat{b}}$, а для рис. 3б $\sigma_r = \sigma_{r+n\hat{a}} = \sigma_{r+(m/2)(\hat{c}-\hat{b})}$. Различны и окончательные результаты для статистических сумм в этих двух случаях при конечных размерах m и n . Заметим также, что периодичность по вертикальному направлению для рис. 3б возможна только при m четных. Вариант рис. 3а более простой для решения, его мы и изучим.

Рис. 3. Два варианта периодических граничных условий для треугольной решетки.

Упростим задачу, рассматривая однородную решетку, оставив различными параметры взаимодействия вдоль трех главных направлений решетки:

$$K_{r,r+\hat{a}} = K_1, \quad K_{r,r+\hat{b}} = K_2, \quad K_{r,r+\hat{c}} = K_3, \quad t_i = \tanh K_i. \quad (41)$$

Последующий вывод тем не менее справедлив и для неоднородного случая. Статистический вес (21) в таких обозначениях принимает вид

$$w_r = w(\sigma_r, \sigma_{r-\hat{a}}, \sigma_{r+\hat{b}}) = e^{K_1 \sigma_{r-\hat{a}} \sigma_r + K_2 \sigma_r \sigma_{r+\hat{b}} + K_3 \sigma_{r-\hat{a}} \sigma_{r+\hat{b}}}. \quad (42)$$

Координаты узлов элементарного треугольника согласно рис. 3а таковы:

$$\begin{aligned} r = (x, y), \quad r - \hat{a} = (x - 1, y), \quad r + \hat{b} = (x, y + 1), \\ x = 1, \dots, n, \quad y = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Порядок в произведении статистических весов определим, как и раньше, по строкам:

$$\prod_r w_r = \prod_{y=1}^m \left(\prod_{x=1}^n w(\sigma_{x,y}, \sigma_{x-\hat{1},y}, \sigma_{x,y+\hat{1}}) \right).$$

Множители $w_{1,y}$ из первого столбца содержат спины $\sigma_{n,y}$, относящиеся к последнему столбцу, а множители из последней строки $w_{x,m}$ содержат спины $\sigma_{x,1}$, относящиеся к первой строке. Чтобы произвести нужное переупорядочение соответствующих грассмановых множителей, не переставляя между собой некоммутирующие члены, статистические веса $w_{1,y}$ выразим через грассмановы иначе, чем (25)–(28). А именно, для $r = (1, y)$, $y = 1, 2, \dots, m$, имеем

$$w_r = \cosh K_1 \cosh K_2 \cosh K_3 \int d\psi_r e^{\mathcal{L}_r(\sigma\psi)} u_r(\psi), \quad (43)$$

$$d\psi_{1,y} = d\psi_r^1 d\psi_r^2 d\dot{\psi}_{r-\hat{a}}^3 d\dot{\psi}_{r-\hat{a}}^4 d\dot{\psi}_{r+\hat{b}}^5 d\dot{\psi}_{r+\hat{b}}^6, \quad (44)$$

$$\mathcal{L}_r(\sigma\psi) = t_1 \sigma_{r-\hat{a}} \sigma_r \dot{\psi}_{r-\hat{a}}^4 \dot{\psi}_r^1 + t_2 \sigma_r \sigma_{r+\hat{b}} \dot{\psi}_r^2 \dot{\psi}_{r+\hat{b}}^5 + t_3 \sigma_{r-\hat{a}} \sigma_{r+\hat{b}} \dot{\psi}_{r-\hat{a}}^3 \dot{\psi}_{r+\hat{b}}^6, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_r(\psi) &= u_{r-\hat{a}}^2 u_r^1 u_{r+\hat{b}}^3, \quad u_{r-\hat{a}}^2 = e^{\dot{\psi}_{r-\hat{a}}^4} e^{\dot{\psi}_{r-\hat{a}}^3}, \\ u_r^1 &= e^{\dot{\psi}_r^1} e^{\dot{\psi}_r^2}, \quad u_{r+\hat{b}}^3 = e^{\dot{\psi}_{r+\hat{b}}^6} e^{\dot{\psi}_{r+\hat{b}}^5}. \end{aligned} \quad (46)$$

Как видим, по сравнению с (25)–(28) изменения минимальны: компоненты $\dot{\psi}_{n,y}^3, \dot{\psi}_{n,y}^4$ на правой границе решетки приобрели точку, а также изменился порядок сомножителей в мере (44) по сравнению с (26):

$$d\dot{\psi}^5 d\dot{\psi}^6 \rightarrow d\dot{\psi}^6 d\dot{\psi}^5.$$

Так же как и в предыдущем разделе, для всей решетки справедливо представление

$$\prod_r w_r = \kappa \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\sum_r \mathcal{L}_r(\sigma\psi) \right) \prod_r u_r(\psi). \quad (47)$$

Проведем теперь переупорядочение произведения $\prod_r u_r$, сохраняя порядок некоммутирующих сомножителей и обращая внимание на граничные члены. Для большей нагляд-

ности распишем произведение $\prod_r u_r$ явно:

$$\begin{aligned}
\prod_r u_r &= (u_{n,1}^2 u_{1,1}^1 u_{1,2}^3) (u_{1,1}^2 u_{2,1}^1 u_{2,2}^3) \dots (u_{n-1,1}^2 u_{n,1}^1 u_{n,2}^3) \times \\
&\quad \times (u_{n,2}^2 u_{1,2}^1 u_{1,3}^3) (u_{1,2}^2 u_{2,2}^1 u_{2,3}^3) \dots (u_{n-1,2}^2 u_{n,2}^1 u_{n,3}^3) \times \\
&\quad \dots \dots \dots \times (u_{n,m}^2 u_{1,m}^1 u_{1,1}^3) (u_{1,m}^2 u_{2,m}^1 u_{2,1}^3) \dots (u_{n-1,m}^2 u_{n,m}^1 u_{n,1}^3) = \\
&= (u_{1,1}^1 u_{1,1}^2 \otimes) (u_{2,1}^1 u_{2,1}^2 \otimes) \dots (u_{n,1}^1 \otimes u_{n,1}^2) \times \\
&\quad \times (u_{1,2}^1 u_{1,2}^2 u_{1,2}^3) (u_{2,2}^1 u_{2,2}^2 u_{2,2}^3) \dots (u_{n,2}^1 u_{n,2}^2 u_{n,2}^3) \times \\
&\quad \dots \dots \dots \times (u_{1,m}^1 u_{1,m}^2 u_{1,m}^3) (u_{2,m}^1 u_{2,m}^2 u_{2,m}^3) \dots \\
&\quad \dots (u_{n,m}^1 u_{n,m}^2 u_{n,m}^3) \left(\prod_{x=1}^n u_{x,1}^3 \right). \tag{48}
\end{aligned}$$

В компактных обозначениях

$$\begin{aligned}
\prod_r u_r(\psi) &= \prod_{y=1}^m \left(\prod_{x=1}^n u_{r-\hat{a}}^2 u_r^1 u_{r+\hat{b}}^3 \right) = \left(\prod_{x=1}^n u_{x,1}^1 u_{x,1}^2 \right) \times \\
&\quad \times \left(\prod_{y=2}^m \left(\prod_{x=1}^{n-1} u_r^1 u_r^2 u_r^3 \right) \left(u_{n,y}^1 u_{n,y}^3 u_{n,y}^2 \right) \right) \left(\prod_{x=1}^n u_{x,1}^3 \right). \tag{49}
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что порядок сомножителей на правой границе, а именно $u^1 u^3 u^2$, отличается от остальной решетки, где имеет место $u^1 u^2 u^3$. Крайний правый сомножитель в (48) и (49), который мы обозначим через

$$G[\psi] = \prod_{x=1}^n u_{x,1}^3, \tag{50}$$

не коммутирует с множителем слева

$$F[\psi] = \left(\prod_{x=1}^n u_{x,1}^1 u_{x,1}^2 \right) \left(\prod_{y=2}^m \left(\prod_{x=1}^n u_r^1 u_r^2 u_r^3 \right) \left(u_{n,y}^1 u_{n,y}^3 u_{n,y}^2 \right) \right). \tag{51}$$

Однако $G[\psi]$ должен быть переставлен с $F[\psi]$, чтобы члены $u_{x,1}^3$ заняли нужные (обозначенные значком $\otimes$) позиции в одноузельных множителях из первой строки в (48). Это можно сделать с помощью правила коммутации (10) для функций от грассмановых переменных:

$$F[\psi]G[\psi] = \frac{1}{2} \left(G[\psi]F[\psi] + G[-\psi]F[\psi] + G[\psi]F[-\psi] - G[-\psi]F[-\psi] \right). \tag{52}$$

В результате $\prod_r w_r$ в (47) представляется вследствие (52) в виде суммы четырех слагаемых

$$\prod_r w_r = \frac{1}{2} \kappa (Q^{++} + Q^{-+} + Q^{+-} - Q^{--}), \quad (53)$$

где интегралы $Q^{\pm\pm}$ имеют вид

$$Q^{\pm\pm} = \int \mathcal{D}\psi \exp\left(\sum_r \mathcal{L}_r(\sigma\psi)\right) G[\pm\psi] F[\pm\psi]. \quad (54)$$

С каждым из слагаемых в (53) произведем такие же манипуляции, как и в предыдущем разделе: замена переменных $\sigma\psi \rightarrow \psi$, суммирование по $\sigma_r = \pm 1$, “снятие точек”. Для первого слагаемого в (53) имеем

$$\begin{aligned} G[\psi] F[\psi] &= \prod_{y=1}^m \left(\prod_{x=1}^{n-1} u_r^1 u_r^2 u_r^3 \right) (u_{n,y}^1 u_{n,y}^3 u_{n,y}^2) = \\ &= \prod_{y=1}^m \left(\prod_{x=1}^{n-1} e^{\mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)} \left(1 + \sum_{\alpha} \psi_r^{\alpha} \right) \right) \left(e^{\mathcal{L}_{n,y}^{(0)}(\psi)} \left(1 + \sum_{\alpha} \psi_r^{\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Учитывая, что суммирование по спинам уничтожит линейные по ψ члены в правой части (55), их можно опустить. Тогда получим

$$G[\psi] F[\psi] = e^{\mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)}, \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r^{(0)}(\psi) &= \psi_r^1 \psi_r^2 + \psi_r^1 \psi_r^3 + \psi_r^1 \psi_r^4 + \psi_r^2 \psi_r^3 + \psi_r^2 \psi_r^4 + \psi_r^3 \psi_r^4 + \\ &+ (\psi_r^1 + \psi_r^2 + \psi_r^3 + \psi_r^4)(\psi_r^5 + \psi_r^6) - \psi_r^5 \psi_r^6 \end{aligned} \quad (57)$$

и соответственно на границе $r = (n, y)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,y}^{(0)}(\psi) &= \psi_{n,y}^1 \psi_{n,y}^2 + (\psi_{n,y}^1 + \psi_{n,y}^2)(\psi_{n,y}^3 + \psi_{n,y}^4 + \psi_{n,y}^5 + \psi_{n,y}^6) - \psi_{n,y}^3 \psi_{n,y}^4 - \\ &- \psi_{n,y}^3 \psi_{n,y}^5 - \psi_{n,y}^3 \psi_{n,y}^6 - \psi_{n,y}^4 \psi_{n,y}^5 - \psi_{n,y}^4 \psi_{n,y}^6 - \psi_{n,y}^5 \psi_{n,y}^6. \end{aligned} \quad (58)$$

“Снятие точек” приведет (57) и (58) к одинаковой форме

$$\mathcal{L}_r^{(0)}(\psi) = \sum_{\alpha < \beta}^6 \psi_r^{\alpha} \psi_r^{\beta}. \quad (59)$$

Посмотрим, что происходит при “снятии точек” со взаимодействующей частью действия (45), которую, вводя операторы сдвига ∇_x, ∇_y вдоль осей X и Y:

$$\nabla_x \psi_r^{\alpha} = \psi_{r+\hat{a}}^{\alpha}, \quad \nabla_y \psi_r^{\alpha} = \psi_{r+\hat{b}}^{\alpha}, \quad (60)$$

перепишем следующим образом:

$$\mathcal{L}_r(\psi) = t_1 \psi_r^4 \nabla_x \psi_r^1 + t_2 \psi_r^2 \nabla_y \dot{\psi}_r^5 + t_3 \psi_r^3 \nabla_x \nabla_y \dot{\psi}_r^6, \quad (61)$$

$$\mathcal{L}_{n,y}(\psi) = t_1 \dot{\psi}_{n,y}^4 \nabla_x \psi_{n,y}^1 + t_2 \psi_{n,y}^2 \nabla_y \dot{\psi}_{n,y}^5 + t_3 \dot{\psi}_{n,y}^3 \nabla_x \nabla_y \dot{\psi}_{n,y}^6. \quad (62)$$

Выражение (61) не изменится, а в (62) изменятся знаки у первого и последнего членов в правой части, которые содержат грасммановы поля с точкой, расположенные слева:

$$t_1 \dot{\psi}_{n,y}^4 \nabla_x \psi_{n,y}^1 \rightarrow -t_1 \psi_{n,y}^4 \nabla_x \psi_{n,y}^1, \quad t_3 \dot{\psi}_{n,y}^3 \nabla_x \nabla_y \dot{\psi}_{n,y}^6 \rightarrow -t_3 \psi_{n,y}^3 \nabla_x \nabla_y \psi_{n,y}^6. \quad (63)$$

Это означает не что иное, как переход от периодического оператора сдвига ∇_x^p к анти-периодическому ∇_x^a :

$$\begin{aligned} (\nabla_x^p)^n &= 1, & (\nabla_x^a)^n &= -1, \\ \nabla_x^p \psi_{n,y}^\alpha &= \psi_{1,y}^\alpha, & \nabla_x^a \psi_{n,y}^\alpha &= -\psi_{n,y}^\alpha. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким образом, после “снятия точек” получим для первого слагаемого в (53)

$$\mathcal{L}_r^{(a,p)}(\psi) = t_1 \psi_r^4 \nabla_x^a \psi_r^1 + t_2 \psi_r^2 \nabla_y^p \psi_r^5 + t_3 \psi_r^3 \nabla_x^a \nabla_y^p \psi_r^6. \quad (65)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части (52). Оно отличается от первого только знаками перед компонентами $\dot{\psi}_{x,1}^5$ и $\dot{\psi}_{x,1}^6$. Поэтому замена переменных интегрирования $\dot{\psi}_{x,1}^{5,6} \rightarrow -\dot{\psi}_{x,1}^{5,6}$ преобразует $G[-\dot{\psi}]F[\dot{\psi}] \rightarrow G[\dot{\psi}]F[\dot{\psi}]$, но вместе с тем изменяет знаки во втором и третьем слагаемых (61), (62) при $r = (x, m)$, т.е. на горизонтальной границе

$$t_2 \psi_{x,m}^2 \psi_{x,1}^5 \rightarrow -t_2 \psi_{x,m}^2 \psi_{x,1}^5, \quad t_3 \psi_{x,m}^3 \psi_{x+1,1}^6 \rightarrow -t_3 \psi_{x,m}^3 \psi_{x+1,1}^6.$$

Следовательно, $\nabla_y^p \rightarrow \nabla_y^a$, и для второго слагаемого в (53) имеем

$$\mathcal{L}_r^{(a,a)}(\psi) = t_1 \psi_r^4 \nabla_x^a \psi_r^1 + t_2 \psi_r^2 \nabla_y^a \psi_r^5 + t_3 \psi_r^3 \nabla_x^a \nabla_y^a \psi_r^6. \quad (66)$$

Третий член в (52) отличается от второго заменой знаков перед всеми компонентами грасммановых полей с точкой, в том числе и на правой вертикальной границе $\dot{\psi}_{n,y}^3$, $\dot{\psi}_{n,y}^4$. Это, как нетрудно видеть, соответствует замене ∇_x^a на ∇_x^p в (66), а также изменению знаков $t_2 \rightarrow -t_2$, $t_3 \rightarrow -t_3$, т.е.

$$\mathcal{L}_r^{(p,a)}(\psi) = t_1 \psi_r^4 \nabla_x^p \psi_r^1 - t_2 \psi_r^2 \nabla_y^a \psi_r^5 - t_3 \psi_r^3 \nabla_x^p \nabla_y^a \psi_r^6. \quad (67)$$

Четвертый член в (52) отличается от третьего только знаками у компонент $\dot{\psi}_{x,1}^{5,6}$, т.е. $\nabla_y^a \rightarrow \nabla_y^p$ и, таким образом,

$$\mathcal{L}_r^{(p,p)}(\psi) = t_1 \psi_r^4 \nabla_x^p \psi_r^1 - t_2 \psi_r^2 \nabla_y^p \psi_r^5 - t_3 \psi_r^3 \nabla_x^p \nabla_y^p \psi_r^6. \quad (68)$$

Заметим также, что замена знаков у всех спинов в каждой нечетной строке:

$$\sigma_{x,y} \rightarrow -\sigma_{x,y}, \quad y = 1, 3, \dots,$$

приводит к изменению знаков $t_2 \rightarrow -t_2$, $t_3 \rightarrow -t_3$, так что (65) и (66) приводятся к такому же виду, как (67) и (68):

$$\mathcal{L}_r^{(i,j)}(\psi) = t_1 \psi_r^4 \nabla_x^i \psi_r^1 + t_2 \psi_r^2 \nabla_y^j \psi_r^5 + t_3 \psi_r^3 \nabla_x^i \nabla_y^j \psi_r^6, \quad (69)$$

с соответствующими граничными условиями для операторов сдвига ∇_x^i, ∇_y^j , где $i, j = a, p$. В результате для статистической суммы на треугольной решетке с периодическими (вариант, соответствующий рис. 3а) граничными условиями получаем следующее представление:

$$Z = \frac{1}{2} (Z^{aa} + Z^{ap} + Z^{pa} - Z^{pp}), \quad (70)$$

$$Z^{ij} = 2^{mn} \kappa \int \mathcal{D}\psi e^{\frac{1}{2}(\psi \hat{D} \psi)} = 2^{mn} \kappa \text{Pf}(\hat{D}), \quad (71)$$

$$\kappa = (\cosh K_1 \cosh K_2 \cosh K_3)^{m \cdot n}, \quad (72)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 - t_1 \nabla_{-x}^i & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 - t_2 \nabla_y^j & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 - t_3 \nabla_x^i \nabla_y^j \\ -1 + t_1 \nabla_x^i & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 + t_2 \nabla_{-y}^j & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 + t_3 \nabla_{-x}^i \nabla_{-y}^j & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

В частном случае, когда $t_3 = 0$, решетка рис. 3а переходит в обычную квадратную решетку с периодическими граничными условиями. При этом перекрестные по компонентам ψ_r^5, ψ_r^6 члены в интеграле (71) появляются только в виде одноузельных произведений за счет $\mathcal{L}_r^{(0)}(\psi)$ (59). Интегрирование по полям ψ_r^5, ψ_r^6 выполняется тривиально, и остается грассманов функциональный интеграл по четырехкомпонентному полю, совпадающий с классическим представлением [8] для модели Изинга на квадратной решетке. Аналогичная ситуация имеет место и для случая $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$ с тем только отличием, что граничные условия здесь соответствуют косой намотке на тор.

Отметим в заключение этого раздела, что при выводе представления (70) мы фактически не использовали ограничения, накладываемые однородностью решетки, т.е. $t_r^i = \text{const}(r)$, а рассмотрели этот случай только из соображений удобства, чтобы не загромождать и без того громоздкие выражения еще одним индексом. Представление (70) остается в силе и для неоднородного случая, при этом вместо $\mathcal{L}_r^{(i,j)}$ (69) имеем

$$\mathcal{L}_r^{(i,j)}(\psi) = t_r^1 \psi_r^4 \nabla_x^i \psi_r^1 + t_r^2 \psi_r^2 \nabla_y^j \psi_r^5 + t_r^3 \psi_r^3 \nabla_x^i \nabla_y^j \psi_r^6 \quad (74)$$

и вместо (72)

$$\kappa = \prod_r (\cosh K_{r,r+\hat{a}} \cosh K_{r,r+\hat{b}} \cosh K_{r,r+\hat{c}}). \quad (75)$$

5. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА И ОСТАТОЧНАЯ ЭНТРОПИЯ

В заключение приведем в качестве иллюстрации к полученному представлению расчет фазовой диаграммы и остаточной энтропии для треугольной модели Изинга. Трансляционно-инвариантные операторы сдвига диагонализуются фурье-преобразованием

$$\nabla_x^a \rightarrow e^{ip}, \quad \nabla_y^a \rightarrow e^{iq}, \quad (76)$$

и матрица $\hat{D}$ приобретает квазидиагональный вид. На ее диагоналях стоят матрицы

$$D(p, q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 - t_1 e^{-ip} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 - t_2 e^{iq} & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 - t_3 e^{i(q+p)} \\ -1 + t_1 e^{ip} & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 + t_2 e^{-iq} & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 + t_3 e^{-i(p+q)} & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Определитель $\hat{D}$ выражается через произведение

$$\det(\hat{D}) = \prod_{p, q} \det(D(p, q)), \quad (78)$$

где для периодических граничных условий проекции квазиимпульса p, q пробегают целые значения, а для антипериодических граничных условий – полужелые значения в единицах $\frac{2\pi}{n}$ и $\frac{2\pi}{m}$, соответственно. Определитель матрицы (77) вычисляется в явном виде

$$\det(D(p, q)) = \alpha^2 + 4\gamma_1 \left(\sin \frac{p}{2} \right)^2 + 4\gamma_2 \left(\sin \frac{q}{2} \right)^2 + 4\gamma_3 \left(\sin \frac{p+q}{2} \right)^2, \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_1 t_2 - t_2 t_3 - t_1 t_3 + t_1 t_2 t_3, \\ \gamma_1 &= t_1 (1 - t_2^2) (1 - t_3^2), \\ \gamma_2 &= t_2 (1 - t_1^2) (1 - t_3^2), \\ \gamma_3 &= t_3 (1 - t_1^2) (1 - t_2^2). \end{aligned}$$

В термодинамическом пределе $m, n \rightarrow \infty$ различие в слагаемых в правой части (70) становится несущественным, так что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z^{aa}}{N}.$$

Как упоминалось выше, рассматриваемая модель содержит три параметра – константы связи J_1, J_2, J_3 , так что температура фазового перехода $\beta_c(J_1, J_2, J_3)$ является функцией трех переменных. С математической точки зрения естественными безразмерными параметрами в нашей задаче выступают t_1, t_2, t_3 :

$$t_1 = \tanh(\beta J_1), \quad t_2 = \tanh(\beta J_2), \quad t_3 = \tanh(\beta J_3). \quad (80)$$

Поэтому исследуем сначала фазовую поверхность в координатах t_1, t_2, t_3 . Область значений t_i ограничена кубом $-1 \leq t_i \leq 1$. $|t_i| \rightarrow 1$ соответствует области низких температур, $|t_i| \rightarrow 0$ – высоким. Поэтому парамагнитная фаза расположена внутри фазовой поверхности, вписанной в куб, а ферромагнитная – вне этой поверхности и ограничена гранями куба. Статистическая сумма выражается через произведение определителей (78)

$$Z = 2^N (\cosh K)^{3N} \prod_{q,p} \left[\det(D(p, q)) \right]^{\frac{1}{2}},$$

так что она может обратиться в нуль (механизм фазового перехода Ли и Янга), если обращается в нуль при каких-то значениях квазиимпульса (p, q) и параметров (t_1, t_2, t_3) детерминант (79). При положительных t_i минимум этой величины как функции импульса достигается в точке $p = 0, q = 0$. Отметим, что сама эта точка для случая антипериодических операторов ∇_x^a, ∇_y^a возможна только при $m, n \rightarrow \infty$, т.е. в термодинамическом пределе. Соответствующий участок фазовой поверхности, таким образом, определяется уравнением $\alpha = 0$, т.е.

$$1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_1 t_2 - t_2 t_3 - t_1 t_3 + t_1 t_2 t_3 = 0. \quad (81)$$

В изотропном случае $J_1 = J_2 = J_3 = J > 0$ легко находим критическую температуру

$$t_c = \tanh(\beta_c J) = 2 - \sqrt{3}.$$

Сравнивая аналогичный результат для квадратной решетки

$$t_c = \sqrt{2} - 1,$$

видим, что в треугольной решетке фазовый переход происходит при более высокой температуре. Это и понятно, т.к. в треугольной решетке при прочих равных условиях обеспечивается большая скоррелированность флуктуирующих спинов (здесь в координационную сферу входит 6, а не 4, как в квадратной решетке, изинговских спина).

Уравнение (81) задает поверхность, показанную на рис. 4. Эта поверхность представляет собой деформированный тетраэдр – его грани вдавлены внутрь. Точка Кюри (Нееля) β_c определяется пересечением кривой в пространстве (t_1, t_2, t_3) , заданной параметрическими уравнениями (80), с полученной фазовой поверхностью (81). Кривая, заданная уравнениями (80), имеет довольно сложный вид. Более наглядно эта задача решается в координатах $(\beta J_1, \beta J_2, \beta J_3)$, где уравнение линии в фазовом пространстве – это луч, исходящий из начала координат в направлении, определяемом отношением параметров связи J_i . Уравнение фазовой поверхности в таких координатах выглядит следующим образом:

$$K_3 = \pm \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sinh(K_1 \mp K_2)}{\cosh(K_1 \pm K_2)} \right|. \quad (82)$$

Ее численный расчет представлен на рис. 5. Пересечение луча, проведенного из начала координат, с поверхностью (82) дает значение температуры фазового перехода. Из рис. 5

Рис. 4. Фазовая поверхность в координатах t_1, t_2, t_3 для треугольной модели Изинга.

видно, что существуют направления в пространстве параметров J_i , вдоль которых луч не пересекает фазовую поверхность — фазовый переход не происходит, система остается неупорядоченной вплоть до $T = 0$. В частности, это полностью антиферромагнитный изотропный случай:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J < 0.$$

Воспользовавшись выражением для детерминанта (79), нетрудно вычислить энтропию системы

$$S = \beta(E - F),$$

где E — энергия, F — свободная энергия:

$$-\beta F = \ln Z = N \ln 2 + 3N \ln \cosh K + \frac{1}{2} \sum_{qp} \ln \left\{ \alpha^2 + 4\gamma \left[\left(\sin \frac{q}{2} \right)^2 + \left(\sin \frac{p}{2} \right)^2 + \left(\sin \frac{q+p}{2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (83)$$

Рис. 5. Фазовая поверхность в координатах K_1, K_2, K_3 для треугольной модели Изинга.

При отрицательных J удобно переписать (83) следующим образом:

$$\ln Z = \frac{N}{2} \ln(-2 \sinh 2K) + \frac{1}{2} \sum_{qp} \ln \left(\mu(K) + |1 + e^{ip}(1 + e^{iq})|^2 \right),$$

где

$$\mu(K) = -\alpha^2/\gamma - 9 = e^{4K}(1 - t - t^{-1}). \quad (84)$$

Для средней энергии и энтропии имеем

$$\begin{aligned} \beta E &= -K \frac{\partial}{\partial K} \ln Z, \\ S &= \frac{1}{2} \left(1 + K \frac{\partial}{\partial K} \right) \sum_{qp} \ln(\mu(K) + |1 + e^{ip}(1 + e^{iq})|^2) + \\ &\quad + \frac{N}{2} \ln(1 - e^{4K}) + \frac{2NK}{e^{-4K} - 1}. \end{aligned} \quad (85)$$

При $\beta \rightarrow \infty$, $K \rightarrow -\infty$ функция $\mu(K)$ (84) и ее производная обращаются в нуль (то же относится и к двум последним слагаемым в правой части (85)), и в результате для остаточной энтропии получим из (85)

$$S_0 \equiv S_{(T=0)} = \sum_{qp} \ln |1 + e^{ip}(1 + e^{iq})|. \quad (86)$$

Суммирование по p выполняется явно с помощью формулы разложения полинома по его корням

$$z^n + 1 = \prod_p (z - e^{ip}),$$

и вместо (86) получим окончательное выражение [9] для остаточной энтропии

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_q \ln |(1 + e^{iq})^n - 1| \underset{n \rightarrow \infty}{=} n \sum_{|q| \leq 2\pi/3} \ln |1 + e^{iq}| \underset{n \rightarrow \infty}{=} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{N}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} dq \ln(2 \cos q). \end{aligned} \quad (87)$$

Из (87) видно, что эффективно в замороженном состоянии при $T = 0$ пребывает немного больше половины всех спинов, остальные находятся в нулевом среднем поле и свободно флуктуируют:

$$S_0/N \approx 0,465 \ln 2.$$

Автор выражает благодарность В. Н. Шадуре за помощь и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Грассманов производящий функционал с гауссовым распределением имеет вид

$$W[\varphi] = \int \mathcal{D}\psi e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi) + (\psi, \varphi)} = \text{Pf}(A) e^{\frac{1}{2}(\varphi A \varphi)}, \quad (\text{П.1})$$

где ψ_k и φ_k — грассмановы поля,

$$\{\psi_k, \psi_l\} = \{\varphi_k, \varphi_l\} = \{\psi_k, \varphi_l\} = 0. \quad (\text{П.2})$$

Пфаффиан антисимметричной вещественной матрицы связан с ее определителем следующим образом:

$$\text{Pf}(A) = \pm \sqrt{\det(A)}. \quad (\text{П.3})$$

Независимое (не через детерминант) определение пфаффиана следующее:

$$\text{Pf}(A) = \sum_{(p)} (-1)^p \prod_{k=1}^{N/2} A_{l_{2k-1}, l_{2k}}. \quad (\text{П.4})$$

Суммирование в (П.4) производится по всем перестановкам индексов у матричных элементов A_{lm} из правого верхнего угла матрицы (над диагональю, т.е. $l < m$). Знак перед слагаемыми в (П.4) определяется четностью перестановок индексов, необходимых для стандартного упорядочения,

$$A_{12}A_{34} \dots A_{N-1}A_N.$$

Например, для размерности матриц 2×2 имеем

$$\text{Pf}(A) = A_{12},$$

для размерности 4×4 –

$$\text{Pf}(A) = A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23},$$

и т.д. Определение пфаффиана (П.4) в отличие от (П.3) фиксирует знак функционального интеграла, что может быть важно, когда результат расчетов представляет собой сумму нескольких интегралов, как это имеет место в задаче о вычислении статистической суммы модели Изинга на решетке конечных размеров.

Представление (П.1) легко доказывается, например, с помощью замены переменных интегрирования:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi - A^{-1}\varphi, \quad (\text{П.5})$$

которое уничтожает перекрестный член (ψ, φ) в экспоненте подынтегрального выражения.

Если поле $\dot{\varphi}$ внешнего грассманова источника коммутирует с “внутренним” полем ψ :

$$\begin{aligned} \dot{W}[\dot{\varphi}] &= \int \mathcal{D}\psi e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi) + (\psi, \dot{\varphi})}, \\ \{\psi_k, \psi_l\} &= \{\dot{\varphi}_k, \dot{\varphi}_l\} = [\psi_k, \dot{\varphi}_l] = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

то преобразование сдвига, аналогичное (П.5),

$$\psi \rightarrow \psi - A^{-1}\dot{\varphi}$$

недопустимо с точки зрения формальных правил грассманова интегрального исчисления, поскольку нарушает коммутационные соотношения для грассмановых полей:

$$\{\psi'_k, \psi'_l\} = -2 \left(\psi_k \sum_m A_{lm}^{-1} \dot{\varphi}_m + \psi_l \sum_m A_{km}^{-1} \dot{\varphi}_m \right) \neq 0.$$

Тем не менее и для производящего функционала (П.6) нетрудно вывести представление, похожее на (П.1).

Известно [10], что для любой вещественной антисимметричной матрицы существует ортогональное преобразование, приводящее ее к квазидиагональному виду

$$OAO^T = A^{(d)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{N/2} \end{pmatrix}, \quad a_k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.7})$$

где $\pm i\lambda_k$ – собственные значения матрицы A . Замена переменных в интеграле (П.6)

$$\psi \rightarrow \psi' = O\psi \quad (\text{П.8})$$

является допустимой (она не меняет коммутационных соотношений), в результате чего

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\psi A \psi) &\rightarrow \frac{1}{2}(\psi' A^{(d)} \psi') = \lambda_1 \psi'_1 \psi'_2 + \dots + \lambda_{N/2} \psi'_{N-1} \psi'_N, \\ (\psi, \dot{\varphi}) &\rightarrow (\psi', \dot{\varphi}'), \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

где $\dot{\varphi}' = O\dot{\varphi}$,

$$\mathcal{D}\psi = \prod_k d\psi_k = \prod_k \left(\sum_l O_{lk}^T d\psi'_k \right) = \det(O^T) \mathcal{D}\psi'. \quad (\text{П.10})$$

Последнее из цепочки равенств (П.10) – следствие антикоммутативности дифференциалов $d\psi_k$. С учетом (П.8)–(П.10) многократный интеграл (П.6) распадается на произведение интегралов

$$\begin{aligned} \dot{W}[\dot{\varphi}] &= \int d\psi'_2 d\psi'_1 e^{\lambda_1 \psi'_1 \psi'_2 + \psi'_1 \dot{\varphi}'_1 + \psi'_2 \dot{\varphi}'_2} \times \dots \\ &\dots \times \int d\psi'_N d\psi'_{N-1} e^{\lambda_{N/2} \psi'_{N-1} \psi'_N + \psi'_{N-1} \dot{\varphi}'_{N-1} + \psi'_N \dot{\varphi}'_N}, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

каждый из которых вычисляется непосредственно. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \dot{W}[\dot{\varphi}] &= (\lambda_1 + \dot{\varphi}'_1 \dot{\varphi}'_2) \times \dots \times (\lambda_{N/2} + \dot{\varphi}'_{N-1} \dot{\varphi}'_N) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\dot{\varphi}'(A^{(d)})^{-1}\dot{\varphi}')} \prod_{k=1}^{N/2} \lambda_k = \text{Pf}(A) e^{-\frac{1}{2}(\dot{\varphi} A^{-1} \dot{\varphi})}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Отметим, что представление (П.12) отличается от обычного грассманова производящего функционала (П.1) только знаком экспоненты.

С помощью (П.12) нетрудно вычислить смешанный грассманов функциональный интеграл

$$I = \int \mathcal{D}\dot{\varphi} \mathcal{D}\varphi e^{\frac{1}{2}(\psi A \psi) + (\psi B \dot{\varphi}) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} C \dot{\varphi})}. \quad (\text{П.13})$$

Интегрируя сначала по полям ψ :

$$I = \text{Pf}(A) \int \mathcal{D}\dot{\varphi} e^{\frac{1}{2}(\dot{\varphi} C \varphi) - \frac{1}{2}(\dot{\varphi} (B^T A^{-1} B) \varphi)},$$

а затем по $\dot{\varphi}$, находим окончательно

$$I = \text{Pf}(A) \text{Pf}(C - B^T A^{-1} B). \quad (\text{П.14})$$

Изменив последовательность операций, можно получить также

$$I = \text{Pf}(C) \text{Pf}(A - B C^{-1} B^T). \quad (\text{П.15})$$

При выводе (П.14) и (П.15) подразумевалось, что число переменных ψ , равное N , и число переменных $\dot{\varphi}$, равное $\dot{N}$, являются четными. В случае нечетных N и $\dot{N}$ проблема сводится к предыдущей с помощью подстановки в интеграл (П.13) тождественной единицы

$$1 \equiv e^{-\alpha \psi_1 \dot{\varphi}_1} \int d\dot{\varphi}_0 d\psi_0 e^{\psi_0 \dot{\varphi}_0 + \alpha(\psi_0 \psi_1 + \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1)},$$

где произвольная константа $\alpha \neq 0$.

Список литературы

- [1] *H. W. J. Blöte, M. P. Nightingale.* Phys. Rev. B. 1993. V. B47. № 22. P. 15047.
- [2] *C. Domb.* Adv. in Phys. 1960. V. 9. № 34.
- [3] *E. S. Fradkin, D. M. Shteingradt.* Nuovo Cim. 1978. V. A47. № 1. P. 115.
- [4] *А. И. Бугрий.* Простой способ фермионизации двумерной модели Изинга: Препринт ИТФ-83-77Р. Киев: ИТФ, 1983.
- [5] *В. М. Плечко.* ТМФ. 1985. Т. 64. № 1. С. 150.
- [6] *А. И. Бугрий, В. Н. Шадыра.* ТМФ. 1995. Т. 103. № 3. С. 388.
- [7] *M. Jimbo, T. Miwa.* Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models: Preprint RIMS-981. Kyoto: Kyoto Univ., 1994.
- [8] *Ф. А. Березин.* УМН. 1969. Т. 24. Вып. 3. С. 3.
- [9] *G. H. Wannier.* Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 357.
- [10] *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 3.IV.1996 г.

Ye. A. Bugrij

SOLUTION OF 2D ISING MODEL ON TRIANGULAR LATTICE BY AUXILIARY q -DEFORMED GRASSMANN FIELD METHOD

The representation of the partition function of the inhomogeneous 2D Ising model on triangular lattice (coupling parameters are arbitrary functions of coordinates) is derived in terms of the functional Grassmann integral. To transform the partition function into the integral we use an auxiliary six-component Grassmann field. Grassmann variables corresponding to the one of the components commute with others. Thus, one pair of components realizes the representation of the q -deformed group $SL_q(2, R)$ with ($q = -1$). The other two pairs are the usual Grassmann spinors ($q = 1$). An explicit expression for the Gaussian integral over such fields is obtained through the modified Pfaffian. A connection with the usual Grassmann functional integral is also obtained.