Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Власов, Особенности эволюции релятивистских частиц в классической теории скалярного поля, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 3, 464–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:08:07

А. А. Власов*

ОСОБЕННОСТИ ЭВОЛЮЦИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Показано, что взаимодействие частиц в модели скалярного поля с линейной связью с источником обладает следующими особенностями: во-первых, частицы взаимно притягиваются на больших межчастичных расстояниях и отталкиваются на малых расстояниях; во-вторых, в процессе эволюции системы частиц ее составные части приобретают максимально возможную скорость – скорость света; в-третьих, при лобовом столкновении двух одинаковых частиц возможно возникновение эффекта “накачки”, когда после нескольких колебаний между стенками сжимающейся эффективной потенциальной ямы частицы вылетают из области финитных движений в область инфинитных; в-четвертых, на траектории взаимодействующих частиц появляется “плато” – область движения с относительно постоянной и большой скоростью.

1. Рассмотрим простейшую модель скалярного поля, линейно взаимодействующего с источником.

Лагранжиан модели есть

$$L = \frac{1}{8\pi} \partial_i \phi \partial^i \phi + g n \phi - m n, \quad (1)$$

здесь n – плотность числа частиц вещества, имеющих как массу m , так и скалярный заряд g (используется система единиц $c = 1$; латинские индексы пробегают значения от 0 до 3). Эта плотность удовлетворяет закону непрерывности (закону сохранения полного числа частиц)

$$\partial_p (n u^p) = 0, \quad (2)$$

где $u^i = dx^i/ds$ – четырехскорость (ds – интервал в пространстве Минковского с метрикой $g_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$).

Первое слагаемое в (1) описывает свободное скалярное поле, второе – линейное взаимодействие поля и источника, третье отвечает “свободному” (т.е. при $\phi = 0$) веществу.

Отметим, что модель скалярного поля (1) является составной частью феноменологической лоренц-ковариантной скалярно-четыре-векторной теории гравитации [1]. С

*Московский государственный университет

другой стороны, лагранжиан (1) является классическим лагранжианом моделей мезодинамики при нулевой массе свободных мезонов и g — скалярным зарядом мезонов (см., например, [2, 3]). Из последних работ возможность достижения частицами скорости света в модели типа (1) качественно рассматривалась в [4]. В классической электродинамике лобовое столкновение заряженных релятивистских частиц численно рассматривалось в работах [5].

Из (1) следует такое полевое уравнение для ϕ :

$$\partial_p \partial^p \phi = 4\pi g n. \quad (3)$$

Вариация лагранжиана (1) по метрике Минковского дает симметрический тензор энергии-импульса модели

$$T^{mn} = n(m - g\phi) u^m u^n + \frac{1}{4\pi} \left[\partial^m \phi \partial^n \phi - \frac{1}{2} g^{mn} \partial_p \phi \partial^p \phi \right]. \quad (4)$$

Тензор T^{mn} удовлетворяет в силу теоремы Нетер законам сохранения

$$\partial_j T^{ij} = 0. \quad (5)$$

Из вида тензора (4) следует, что в рассматриваемой модели роль “параметра” взаимодействия источника со скалярным полем эффективно играет величина $(m - g\phi)/m$. Соответственно при ее положительных значениях (слабое взаимодействие) частицы вещества притягиваются друг к другу, а при отрицательных (сильное взаимодействие) отталкиваются.

Уравнения (5) с использованием (2)–(4) можно записать в виде релятивистского уравнения движения частиц

$$nw \frac{du_i}{ds} = n(\partial_i w - u^j u_i \partial_j w), \quad (6)$$

здесь $w = m - g\phi$ и $d/ds = u^p \partial_p$.

2. Рассмотрим простейшую задачу в рамках нашей модели: лобовое столкновение частицы, имеющей скалярный заряд g и массу m , с силовым центром заряда q . Ось движения выберем как x , силовой центр пусть находится в точке $x = 0$. Потенциал силового центра в силу (3) имеет “кулоновский” вид

$$\phi = \frac{q}{x}. \quad (7)$$

Тогда уравнение движения (6) частицы есть

$$\frac{m - g\phi}{1 - v^2} \dot{v} = (\partial_x + v \partial_t) g\phi. \quad (8)$$

Вводя далее для простоты параметр a , $a = gq/m$, уравнение (8) с использованием (7) можно представить так:

$$\frac{1 - a/x}{1 - v^2} \dot{v} = -\frac{a}{x^2}, \quad (9)$$

где $v = \dot{x}$.

Уравнение (9) имеет первый интеграл

$$1 - v^2 = K(1 - a/x)^2, \quad (10)$$

параметр K определяется из начальных условий, $K > 0$.

Соотношение (10) можно записать с использованием эффективного потенциала взаимодействия U :

$$v = \pm \sqrt{K} \sqrt{E - U},$$

здесь $E = (1 - K)/K$ – начальная энергия,

$$U = -1 + (1 - a/x)^2. \quad (11)$$

Эффективный потенциал (11) имеет вид ямы с отрицательным минимумом (“дном”) $U = -1$ при $x = a$, правой “стенкой”, при $x \rightarrow \infty$ полого стремящейся к нулю, и левой “стенкой”, при $x \rightarrow 0$ круто уходящей в плюс-бесконечность. Это напоминает потенциал молекулярного взаимодействия.

Таким образом, классификация движений частицы стандартна: при $E > 0$ движение будет инфинитным, при $E < 0$ – финитным. Так как $K > 0$, то $E > -1$, т.е. частица движется обязательно над дном потенциальной ямы (другими словами, эффективный потенциал (11) и все связанные с ним особенности движения являются существенно динамическими: в покое две частицы взаимодействуют посредством стандартного потенциала типа кулоновского (7)). При этом во всех случаях существует хотя бы одна точка поворота, т.е. частица, первоначально притягиваясь к центру, при $x < a$ попадает в область сил отталкивания и отскакивает от потенциальной стенки. Кроме того, как следует из (10), (11), над “дном” потенциальной ямы, при $x = a$, частица разгоняется до максимальной скорости – скорости света (эффекты радиационного трения из уравнения (9) исключены).

Можно сказать, что отмеченные характерные черты движения частицы (наличие точки поворота и возможность достижения максимальных скоростей) связаны в целом с наличием в уравнении движения множителя $(m - g\phi)$ (“эффективной массы” по терминологии работы [4]), т.е. они имеют общий характер и поэтому будут проявляться и в других задачах, как мы это увидим ниже.

3. Рассмотрим следующую задачу о лобовом столкновении двух одинаковых скалярных частиц, имеющих заряд q , массу m и одинаковые начальные условия. Пусть ось движения будет x , точка $x = 0$ – это точка симметрии движения частиц. Тогда координата правой частицы будет равна $x(t)$, а левой частицы равна $-x(t)$. Уравнение движения правой частицы определяется соотношением (8), где потенциал ϕ является запаздывающим решением уравнения (3) для движущегося источника – левой частицы (тем самым самодействие частицы вследствие излучения ею скалярных волн – “собственное радиационное трение” – в уравнение (8) не включается). Потенциал этот имеет вид

$$\phi(t, x) = \frac{q}{x + x'} \sqrt{\frac{1 - v'}{1 + v'}}, \quad (12)$$

где $x = x(t)$, $x' = x(t')$, $v' = dx'/dt'$, а t' — запаздывающее время, задаваемое уравнением

$$t' = t - x(t) - x(t'). \quad (13)$$

Подставляя (12) в (8), получаем уравнение движения правой частицы в поле левой частицы

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{x+x'} \sqrt{\frac{1-v'}{1+v'}}\right) \frac{\dot{v}}{1-v^2} = \\ = \frac{a}{x+x'} \sqrt{\frac{1-v'}{1+v'}} \left[-\frac{1+vv'}{(x+x')(1+v')} + \frac{w'(1-v)}{(1-v')(1+v')^2} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $v = v(t)$, $a = q^2/m$, $w' = dv'/dt'$.

В силу замечания п.2 об общих особенностях движения частиц в рассматриваемой модели скалярного поля траектория, задаваемая уравнением (14), будет иметь хотя бы одну точку поворота (частицы испытывают как взаимное притяжение, так и отталкивание), и на траектории существуют точки, в которых скорость частиц максимальна по модулю и равна скорости света.

Однако в силу эффекта запаздывания решения уравнения (14) имеют свою специфику по сравнению с п.2.

Во-первых, в качестве начальных данных уже недостаточно взять начальные положения и скорости частиц, а, например, достаточно задать начальную (пробную) траекторию частиц на отрезке $t_2 > t > t_1$, где точки t_2, t_1 связаны уравнением (13) (соотношением светового или причинного конуса): $t_1 = t_2 - x(t_2) - x(t_1)$. Тогда уравнение (14) будет определять эволюцию частиц при $t \geq t_2$.

Во-вторых, можно предположить, что так как частица взаимодействует не с покоящимся источником, а с движущимся, причем с запаздыванием, то ее траектория эффективно определяется потенциалом типа “ямы” (11), стенки которой не покоятся, а движутся, причем с разными скоростями. Поэтому при определенных соотношениях между начальными условиями частица, первоначально находясь в области инфинитных движений, может после серии ударов о сжимающиеся стенки ямы приобрести энергию и вылететь в область инфинитных движений. Соответствующий прирост кинетической энергии частиц (“накачка”) может достигаться в силу общего уравнения баланса энергии (5), из которого и были выведены уравнения движения, за счет первоначально накопленной энергии скалярного поля взаимодействующих частиц (стоит еще раз напомнить, что в уравнении (14) радиационное самодействие частицы не учитывается).

Можно сказать и так: из (14) следует, что сила, действующая на частицы, существенно зависит от их скоростей. Поэтому взаимодействия частиц при их сближении и разлете отличаются. При этом не исключается возможность “отрицательной диссипации”, т.е. увеличения кинетической энергии частиц за счет первоначально накопленной энергии скалярного взаимодействия.

Можно это выразить и по-другому: т.к. частицы взаимодействуют с запаздыванием, то при сближении каждой из них “кажется”, что соседняя находится на большем расстоянии, чем на самом деле. Это ослабляет силу взаимного отталкивания на малых

расстояниях, так что в итоге частицы оказываются в области действия более сильного потенциала отталкивания по сравнению со статическим случаем. Таким образом, эффективно частицы переходят на более высокий энергетический уровень.

Итак, при лобовом столкновении начальные состояния частиц не совпадают с конечными состояниями. Можно только говорить о совпадении начальных и конечных состояний полной системы “частицы+поле” (что и отражает закон сохранения энергии полной системы), причем часть начальной энергии поля переходит при таком взаимодействии в кинетическую энергию частиц (данная асимметрия во времени связана с использованием несимметричного, запаздывающего взаимодействия). Это позволяет назвать взаимодействие частиц и поля в определенном смысле неупругим.

Изложенные общие рассуждения подтверждаются и конкретным анализом уравнения (14) в единицах $a = 1$.

Особенности уравнения (14) проявляются при $v = \pm 1$, $v' = -1$ и $L = (x + x') \times \sqrt{\frac{1+v'}{1-v'}} = 0, 1$.

Скорость частицы $v(t)$ колеблется между максимальными значениями -1 и $+1$ (т.е. у ускорения и у скорости частицы существует несколько пиков), при этом величина L , связанная с относительным расстоянием между частицей и источником поля, также колеблется около $+1$, причем при $L \rightarrow 1$ выполняется $v(t) \rightarrow \pm 1$: если $v(t) = -1 + c_1(t - t_1)^2$, то

$$L = 1 + \left[-\frac{1 - v'}{(x + x')(1 + v')} + \frac{2w'}{(1 - v')(1 + v')^2} \right]_{t_1} (t - t_1),$$

если $v(t) = 1 - c_2(t - t_2)^2$, то

$$L = 1 + \left[\frac{1}{(x + x')} \right]_{t_2} (t - t_2).$$

Величина L может обращаться и в нуль: если $v' = -1 + c_3(t' - t_3)^2$ и $v = 1 - c_4(t - t_4)^2$, где $(t - t_4) = (c_3/c_4)^{1/3}(t' - t_3)$, то

$$L = c_5 |t - t_4|$$

(как видно, для $L = 0$ обязательно наличие на траектории точки с $v' = -1$).

Из приведенного выражения для L для случая $v \rightarrow -1$ видно, что чем ближе v' к -1 , тем быстрее стремится к единице величина L , т.е. тем уже отрицательный пик по скорости v . Везде $c_1, \dots, 5$ — постоянные коэффициенты.

Продифференцировав выражение для запаздывающего времени (13), получаем

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - v}{1 + v'}.$$

Отсюда, в частности, следует, что при $v' \neq -1$ и для конечного интервала dt' при $v \rightarrow 1$ обязано выполняться $dt \rightarrow \infty$. Таким образом, график скорости частицы при $v \approx 1$ имеет вид “плато” — движения с почти постоянной и большой скоростью в течение относительно длительного промежутка времени.

Рис. 1

Обращение величины L в 1 при $v^2 = 1$ означает, что в используемых единицах эффективная масса $m = 1 - 1/L$ принимает нулевое значение. Это снимает противоречие с требованиями классической специальной теории относительности (аналогичный вывод был сделан в [4]).

Все характерные черты эволюции двух частиц выявляются при численном счете.

На рис. 1 изображена скорость $v(t)$ правой частицы в относительных единицах x/a и t/a при начальных условиях $x_0 = 5$ и $v = 0$ для $t < 0$. Интегрирование уравнения движения приведено вплоть до появления “плато” при $v \rightarrow 1$ и $L \rightarrow 1$. Появлению “плато” предшествует первое столкновение частицы с движущейся навстречу стенкой эффективного потенциала, сопровождающееся быстрым изменением скорости от -1 до $+1$.

На рис. 2 можно видеть в увеличенном масштабе времени появление второго узкого отрицательного пика у скорости частицы — узкой щели на “плато”, — связанной с быстрым при $v' \approx -1$ убыванием величины L от 1 до 0, причем единица по L достигается при $v = -1$, а нуль, как и следовало ожидать, — при $v = 1$ и $v' = -1$. При этом частица последовательно ударяется о быстро сжимающиеся стенки эффективной потенциальной ямы.

Дальнейшая эволюция частицы такова: с ростом L от нуля скорость частицы изменяется от $+1$ до некоторого минимального, но положительного значения, и затем третий раз достигает величины $v = 1$ при $L = 1$. После этого частица при монотонном росте L и x уходит на плюс-бесконечность с ненулевой асимптотической скоростью.

Таким образом, частица после трех ударов о сжимающиеся стенки ямы выскакивает из нее (из области финитных движений) и попадает в область инфинитных движений.

Минимальное значение координаты частицы за время всего движения есть $x_{\min} \approx$

Рис. 2

0.106 и достигается при $t_{\min} \approx 24.06$, максимальное по модулю ускорение частицы — порядка нескольких сотен тысяч относительных единиц и достигается в области “склонов” упомянутой выше узкой “щели” в “плато” скорости.

К вопросу о том, как влияет радиационное трение на полученные результаты, мы вернемся после рассмотрения задачи о сферически-симметричной оболочке.

4. Рассмотрим задачу о движении сферически-симметричной оболочки в модели (1).

Сферически-симметричная пылевая оболочка задается следующим решением уравнения непрерывности (2):

$$u^0 n = \frac{N \delta(r - R)}{4\pi r^2}, \quad (15)$$

здесь $R = R(t)$ — радиус эволюционирующей оболочки, $\dot{R}(t) = v(t)$ — ее скорость, N — полное число частиц, составляющих оболочку.

Подставляя (15) в (6) и используя известное свойство дельта-функции $\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)(f(a + 0) + f(a - 0))/2$, получаем соотношения, описывающие эволюцию оболочки,

$$nw \frac{du_i}{ds} = n(\partial_i w - u^j u_i \partial_j w)_+, \quad (16)$$

здесь $(F)_+ \equiv (F(R + 0) + F(R - 0)) / 2$.

Пространственная часть (16) при учете сферической симметрии сводится к уравнению

$$(m - g\phi) \frac{\ddot{R}}{1 - v^2} = -(\partial_r + v\partial_0)(m - g\phi)_+. \quad (17)$$

Рис. 3

Поле ϕ в (17) является решением (3) с источником (15) и через запаздывающие потенциалы представляется так:

$$\phi = \frac{g}{2r} \int_0^\infty dr' \int_{t-|r+r'|}^{t-|r-r'|} dt' r' 4\pi n(t', r') = \frac{gN}{2r} \int_B^A dx \frac{\sqrt{1-v(x)^2}}{R(x)}. \quad (18)$$

Пределы интегрирования A, B являются решениями следующих уравнений: $A = t + R(A) - r$ для внешней пространственно-временной области, $A = t - R(A) + r$ для внутренней области, $B = t - R(B) - r$ для всех точек.

Подстановка (18) в (17) дает интегродифференциальное уравнение эволюции оболочки

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{Q}{2R} \int_B^t dx \frac{\sqrt{1-v(x)^2}}{R(x)}\right) \frac{\ddot{R}}{1-v^2} = \\ = -\frac{Q}{2R^2} \int_B^t dx \frac{\sqrt{1-v(x)^2}}{R(x)} + \frac{Q(1-v)}{2R} \left[\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \frac{1}{R} \right]_B, \end{aligned} \quad (19)$$

здесь $B = t - R(t) - R(B)$, $Q = (g^2 N)/m$.

Отметим особенности эволюции оболочки.

При малой скорости и величине поля, $v \rightarrow 0$, $R \approx R_0 + vt \gg q$, т.е. в ньютоновском приближении, уравнение (19) принимает известный вид

$$\ddot{R} \approx -\frac{Q}{2R^2}$$

Рис. 4

и оболочка сжимается в силу эффекта самопритяжения.

Для анализа решений уравнения (19) при сильных полях необходим численный анализ. Он показывает, что отмеченные в п.3 особенности поведения двух сталкивающихся в лоб частиц проявляются и при эволюции оболочки (что качественно понятно, если принять во внимание, что две диаметрально расположенные точки на оболочке должны взаимодействовать почти так же, как и две сталкивающиеся в лоб частицы), а именно:

1) существует хотя бы одна точка поворота, т.е. оболочка не коллапсирует в точку, а движется в потенциальной яме типа (11);

2) проходя над “дном” потенциальной ямы типа (11), скорость оболочки достигает своего максимального значения – скорости света;

3) в зависимости от начальных условий возможно возникновение эффекта “накачки” в сжимающейся потенциальной яме;

4) в зависимости от начальных данных на траектории оболочки может образовываться относительно протяженная область “равномерного” движения – “плато”.

Обратим внимание на то, что в отличие от уравнения движения (14) п.3, не содержащего члены с самодействием частиц, уравнение движения оболочки (19) самосогласовано, т.е. использует полное выражение для скалярного поля над и под оболочкой и содержит тем самым и члены с самодействием. Тогда то, что свойства 1–4 уравнения (14) и для оболочки остались в силе, доказывает, что они (свойства) не являются следствием пренебрежения радиационным трением в уравнении (14), а связаны исключительно с использованием решения полевого уравнения в запаздывающей форме.

На рис. 3 и 4 изображены радиус оболочки $R(t)$ и ее скорость $v(t)$ в относительных

единицах R/Q и t/Q при начальной траектории $R = R_0 = 5$, $v = 0$ при $t < 0$. Интегрирование уравнения движения приведено вплоть до момента времени установления “плато” по скорости.

Как видно из вышеизложенного, отмеченные особенности взаимодействия частиц не являются исключительной чертой выбранной модели скалярного поля, а справедливы (за исключением, быть может, свойства 2) и для любых других моделей, где взаимодействие релятивистских частиц определяется эффективным потенциалом молекулярного вида (например, для взаимодействующих точечных заряженных частиц в классической электродинамике, если у частиц есть еще и соответствующим образом ориентированные электрические дипольные моменты, или для модели скалярного поля (1) при наличии массы у скалярного поля).

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить В.И. Григорьева, А.В. Миронова и П.А. Полякова.

Список литературы

- [1] А.А. Власов. Вестн. МГУ, сер. 3. 1994. Т. 35. № 2. С. 3; A.A. Vlasov. Canadian J. Phys. 1995. V. 73. № 3/4. P. 187.
- [2] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [3] Д.Д. Иваненко, А.А. Соколов. Классическая теория поля. М.: ГИТТЛ, 1949.
- [4] D.N. Vollick. Phys. Rev. 1995. V. D52. № 6. P. 3576.
- [5] J.C. Kasher, S.L. Schwebel. Phys. Rev. 1971. V. D4. № 10. P. 2956; C.M. Andersen, H.C. von Bayer. Phys. Rev. 1972. V. D5. № 10. P. 2470; J. Huschilt et.al.. Phys. Rev. 1973. V. D7. № 10. P. 2844; J.C. Kasher. Phys. Rev. 1975. V. D12. № 6. P. 1729; J. Huschilt, W.E. Bayles. Phys. Rev. 1976. V. D13. № 12. P. 3256, 3262; J.C. Kasher. Phys. Rev. 1976. V. D14. № 4. P. 939; J. Phys. A. 1977. V. 10. № 7. P. 1097.

Поступила в редакцию 3.IV.1996 г.

A. A. Vlasov

PECULIAR FEATURES OF RELATIVISTIC PARTICLE EVOLUTION IN CLASSICAL SCALAR FIELD THEORY

The interaction between point particles in the model of classical scalar field with linear coupling with the source possesses the following interesting features: particles attract at a large distance and repulse at a small distance; the velocities of the particles in evolution reach the speed of light; in the frontal collision of two identical particles can arise the effect of “release”: due to the squeezing of the walls of the effective potential hole of particle interaction the kinetic energy of particles grows so that at last particles jump out from the potential hole.