Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Власов, Сверхтекучий квантовый вихрь в искривленном пространстве,
ТМФ, 1996, том 109, номер 3, 474–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 09:51:18

Ю. В. Власов*

СВЕРХТЕКУЧИЙ КВАНТОВЫЙ ВИХРЬ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Влияние эффектов общей теории относительности на свойства сверхтекучей жидкости имеет приложение к реальным астрофизическим объектам – нейтронным звездам. В работе вычислены силы натяжения и полной энергии квантового вихря в сферически-симметричной метрике (Шварцшильда).

В свете современных теоретических и наблюдательных данных внутренняя область нейтронной звезды состоит из сверхтекучего нейтронного конденсата (с малой примесью протонов и электронов) или при более высокой плотности представляет собой $\pi^\pm$ - или π^0 -конденсатное ядро [1–3]. В данной статье нас будет интересовать сверхтекучесть с нулевым орбитальным моментом L пионных пар или нейтронных пар в $^1S_0$ -состоянии, что аналогично He II. Поэтому другие модели строения нейтронных звезд, например, в которых излучается кварковая материя, не включаются в наше рассмотрение. Известно, что в сверхтекучей жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде, при угловой скорости вращения Ω (в пределах от Ω_{c1} до Ω_{c2}) имеются квантовые вихревые нити, параллельные оси вращения [4, 5]. Аналогичное явление наблюдается и в случае сферического сосуда (нейтронная звезда обладает тонкой кристаллической корой) [5, 6]. Подстановка реальных значений дает $\Omega_{c1} \sim 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ и $\Omega_{c2} \sim 10^{21} \text{ с}^{-1}$, типичная характерная скорость вращения нейтронной звезды $\Omega = 1 \div 10^3 \text{ с}^{-1}$; поэтому сверхтекучий конденсат нейтронов (или π^0) в недрах звезды действительно обладает решеткой квантовых вихрей [7, 8], причем ось вихрей почти на всем своем протяжении параллельна оси вращения звезды, лишь у самой границы с корой (на масштабе, измеряемом в сантиметрах, тогда как радиус нейтронной звезды $R_0 \approx 10 \text{ км}$) отклоняясь и по нормали пересекая поверхность [9].

Сильное гравитационное поле и релятивистское уравнение состояния вещества нейтронной звезды приводят к необходимости изучать сверхтекучесть в рамках общей теории относительности (ОТО). Было проведено вычисление характеристик звезды для скалярного параметра порядка $\psi \sim \exp(i\theta)$ в метрике Шварцшильда [10, 11]. Исследовался фазовый переход для скалярного поля в искривленном пространстве [12].

Исследованы и некоторые особенности медленного вращения с $\Omega < \Omega_{c1}$ сверхтекучей жидкости [13]. Что касается квантовых вихрей, то они подробно рассмотрены лишь в рамках специальной теории относительности [14, 15], а в рамках ОТО получены общие результаты, которые мы применим ниже для конкретной задачи. А именно, найдем,

---

*Московский физико-технический институт

как меняется сила натяжения (т.е. энергия на единицу длины) вдоль квантового вихря, проходящего на различных расстояниях от оси вращения звезды. Вместо метрики Керра будем использовать сферически-симметричную метрику Шварцшильда, которая при не очень высоких скоростях вращения звезды является достаточно точным приближением [16]. Угловой скоростью вращения определяется не метрика, а число квантовых вихрей. Так же мы получим полную энергию одной квантовой вихревой нити.

Во вращающейся сверхтекучей жидкости циркуляция скорости сверхтекучей компоненты вдоль замкнутого контура Γ вокруг квантового вихря равна [4, 5]

$$\kappa = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\hbar n/m, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

В ОТО вместо (1) имеем [17] ($mc^2 = m$, $c = 1$)

$$\kappa = - \oint_{\Gamma} [1 + \mu/m] u_{\alpha} dx^{\alpha} = 2\pi\hbar n/m, \quad (2)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$ и контур $\Gamma \in \Sigma_0$, $\Sigma_0 = \{x^i : x^0 = \text{const}\}$ – 3-гиперповерхность; μ – химический потенциал. Очевидно, (2) имеет смысл, лишь когда циркуляция κ сохраняется. Для этого достаточным условием является баротропность жидкости $P = P(\rho)$ [18], тогда имеем

$$\mu = m \left[\exp \int_0^P dP/(\rho + P) - 1 \right]. \quad (3)$$

Для реальной звездной модели зависимость давления P от плотности энергии ρ находится самосогласованным образом из численного решения уравнений Эйнштейна [19]. Существуют некоторые точные аналитические решения [20]. Однако мы будем использовать самое простое для вычислений предположение, считая $\rho = \text{const}$ [16]. Тогда для метрики Шварцшильда уравнение гидростатического равновесия (Оппенгеймера–Волкова) дает

$$P = \rho[h(R) - h(1)]/[3h(1) - h(R)], \quad (4)$$

где $h(R) = (1 - R_g R^2)^{1/2}$, а внешний радиус звезды R_0 принят равным единице, $R_g \leq 3/4$. Заметим, что масса коры ничтожна по сравнению с массой всей звезды [21], поэтому наличие коры не повлияет на метрику. Однако (4) не обладает баротропностью и поэтому является лишь приближением к действительности [22], тем не менее вполне подходит для рассматриваемой нами задачи, ибо циркуляция κ сохраняется (иначе было бы бессмысленно говорить о квантовых вихрях). В самом деле, сохранение циркуляции означает равенство нулю интеграла [18, 23]

$$\frac{d\kappa}{ds} = \oint \Omega_{ik} u^k dx^i.$$

Если существует однозначная функция $f(P) = \exp \int_0^P dP/(\rho + P)$, то [23]

$$\Omega_{ik} u^k = f \frac{Du^i}{ds} + u^i \frac{df}{ds} - f^{,i} = 0. \quad (5)$$

Правая часть (5) равна нулю, ибо это уравнение движения [23]. Однако при $\rho = \text{const}$ для функции $f(P)$ получаем

$$f = f(P) = 1 + P/\rho = 2h(1)/[3h(1) - h(R)] = f(P(R)).$$

Подстановка (4) в (3) дает

$$\kappa = - \oint f(R) u_\alpha dx^\alpha = 2\pi\hbar n/m. \quad (6)$$

Внешний радиус квантового вихря $b \sim 10^{-3}$ см [7], что во много раз меньше типичного радиуса нейтронной звезды $R_0 = 10$ км. Контур Γ представим в виде окружности радиуса r , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вихря q , центр которой $A \in q$. Для вычисления интеграла (6) перейдем в локальную инерциальную систему отсчета (ЛИСО) в точке A :

$$\begin{aligned} x &= (R - R_A)/h(R_A), \\ y &= (\varphi - \varphi_A)R_A \sin \theta_A, \\ z &= (\theta - \theta_A)R_A. \end{aligned}$$

От (x, y, z) можно перейти (как в плоском пространстве) к цилиндрическим координатам (r, ψ, ζ) с осью $\zeta \equiv q$, в которых 3-скорость u_α имеет одну составляющую $u_\psi(r)$. Тогда имеем

$$\kappa = f(R_A)(-u_\psi)2\pi r = 2\pi\hbar n/m,$$

откуда получаем

$$u_\psi(r) = -\frac{\hbar n}{mr} \frac{1}{f(R_A)}. \quad (7)$$

При $|u_\psi| \ll 1$ выражение (7) отличается от обычного выражения (1) лишь множителем $1/f(R_A)$. Для нейтронных вихрей размер ядра составляет $a \sim 10^{-10}$ см [7]. Поэтому $|u_\psi|$ не превосходит 10^{-3} . Для квантовых вихрей в π^0 -конденсате $a \sim 10^{-12}$ [3, 8] и $|u_\psi| \lesssim 10^{-1}$.

В настоящей статье мы рассмотрим случай, когда $|u_\psi| \cong |v_\psi| \ll 1$. Вблизи внешней границы сверхтекучего конденсата, как уже отмечалось, ось квантового вихря перпендикулярна границе, т.е. ось вихря $\mathbf{q} \parallel \mathbf{R}$ или контур Γ лежит на двумерной поверхности $R = \text{const}$. Однако для пространственной метрики Шварцшильда [16]

$$dl^2 = g_{00} dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

геометрия на поверхности $R = \text{const}$ является евклидовой. Поэтому интегрирование вдоль контура в (6) при помощи теоремы Стокса сводим к интегрированию по поверхности, натянутой на этот контур [24], и получаем результат, совпадающий с хорошо известным [5],

$$\kappa = \frac{1}{2} \Omega \pi b_0^2. \quad (8)$$

Такое совпадение – результат того, что f зависит только от R и $f(1) = 1$. Из (8), очевидно, следует, что для сферически-симметричной метрики число вихрей не зависит

от R_g . Если интересоваться, как меняется вдоль оси вихря расстояние b , при котором $|u_\psi(b)| = \text{const}$, то из (7) видно, что b меняется не более чем в два раза (ибо $R_g \leq 3/4$). Нерелятивистское выражение для силы натяжения (энергии на единицу длины) вихревой нити [5] есть

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \int \frac{\rho v^2}{2} dS = \rho \frac{\varkappa^2}{4\pi} \ln b/a. \quad (9)$$

В рамках ОТО выражение (9) вычисляется в ЛИСО таким же образом, как u :

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \int g_{00} T_{(k)}^{00} dS. \quad (10)$$

Здесь элемент площади $dS = 2\pi r dr$. Составляющая тензора энергии-импульса $T^{00} = (\rho + P)u^0 u^0 - g^{00}P$ при $v^2 \ll 1$ (v – сверхтекущая скорость в вихре) имеет вид [25]

$$T^{00} \cong \rho_0 + P(1 - g^{00}) + \rho_0 v^2/2 + P v^2,$$

где $\rho_0 = \rho(v = 0)$ – плотность массы покоя, т.е. $T_{(k)}^{00} = \frac{\rho_0 v^2}{2} + P v^2$ следует подставить в (10):

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \int g_{00} (\rho_0 v^2/2 + P v^2) 2\pi r dr. \quad (11)$$

Эта формула является обобщением (8) на искривленное пространство и релятивистское уравнение состояния при $v^2 \ll 1$. При малых v имеем $u_\psi \cong -v$, поэтому берем v из (7). Для P воспользуемся формулой (4): без потери точности для (10) в (4) полагаем $\rho = \rho_0$. Тогда получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \int_a^{b(R)} (1 - R_g R^2) \rho_0 \left(\frac{\varkappa}{2\pi r} \right)^2 \frac{1}{2} \left[1 + 2 \frac{h(R) - h(1)}{3h(1) - h(R)} \right] \frac{2\pi r}{f^2} dr.$$

В локальной системе координат от r зависит только v , потому окончательно имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{g_{00}(R)}{g_{00}(1)} \frac{3g_{00}(1) - g_{00}(R) + 2h(R)h(1)}{4} \rho_0 \frac{\varkappa^2}{4\pi} \ln b_0/a. \quad (12)$$

Так как отношение $b/a \gtrsim 10^8$, эффекты ОТО (в данной задаче) в выражение под логарифмом в (12) не внесут почти никаких изменений.

Поэтому отличие от известной формулы (8) заключается в первых множителях в правой части (12). В нерелятивистском пределе для уравнения состояния отношение P/ρ стремится к нулю и лишь оставшийся множитель $g_{00}(R) = h^2(R)$ свидетельствует об искривленности пространства. Интересно проследить изменение $d\varepsilon/dz$ вдоль оси квантового вихря, вызванное эффектом кривизны пространства. Вихрь проходит на расстоянии Δ от оси звезды, т.е. $R^2 = \Delta^2 + z^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (d\varepsilon/dz)(z) &= Q(z, \Delta) \rho_0 \frac{\varkappa^2}{4\pi} \ln b_0/a, \\ Q(z, \Delta) &= \left(\sqrt{1 - R_g} + \sqrt{1 - R_g(\Delta^2 + z^2)} \right) / \left(3\sqrt{1 - R_g} - \sqrt{1 - R_g(\Delta^2 + z^2)} \right) \times \\ &\quad \times (1 - R_g(\Delta^2 + z^2)). \end{aligned}$$

Рис. 1. Графики зависимости энергии на единицу длины квантового вихря, вызванной кривизной пространства, для вихря, проходящего на расстояниях $\Delta = 0,5$ (верхние три кривые) и $\Delta = 0,9$ (нижние три кривые). Индексы А, В и С у кривых относятся к R_g , равному 0,25; 0,5 и 0,75, соответственно.

Соответствующие графики изображены на рис. 1 и 2.

Для расчета энергии квантового вихря надо в (12) перейти из локальной в глобальную систему и произвести интегрирование вдоль оси вихря:

$$\varepsilon = 2 \int_{\Delta}^1 \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right) dz = 2 \int_{\Delta}^1 \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right) \sqrt{1/h^2(R) + \Delta^2/(R^2 - \Delta^2)} dR$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 \int_{\Delta}^1 dR [h(1) + h(R)] / [4h(1)] h(R) \sqrt{\frac{1 - R_g \Delta^2}{R^2 - \Delta^2}} R \rho_0 \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln b/a = \\ &= w(\Delta, R_g) 2 \sqrt{1 - \Delta^2} \rho_0 \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln b_0/a. \end{aligned} \quad (13)$$

Отличие от соответствующей формулы в плоском пространстве заключается в множителе $w(\Delta, R_g) \neq 1$.

Вычисление полной энергии вихревой решетки производится просто:

$$E_V = \int \varepsilon(\Delta) dN(\Delta), \quad (14)$$

где число вихрей в элементе площади равно $dN(\Delta) = \nu(\Delta) dS(\Delta)$, $\nu(\Delta)$ — плотность числа вихрей. Интегрирование в (14) удобно производить по экваториальному сечению звезды. Тогда имеем

$$dS = (R/h(R)) dR d\varphi = 2\pi \Delta d\Delta / h(\Delta).$$

Добавив к энергии вихрей E_V кинетическую энергию вращающейся жидкости, получим энергию всей системы E . Для анализа гидродинамики сверхтекучей жидкости следует минимизировать ее свободную энергию $F = E - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{M}$, а для этого надо знать

Рис. 2. Графики зависимости энергии на единицу длины квантового вихря, вызванной кривизной пространства, для вихря, проходящего на расстоянии $\Delta = 0$. Индексы А, В и С у кривых относятся к R_g , равному 0, 25; 0, 5 и 0, 75, соответственно.

момент количества движения системы $\mathbf{M}$ (который находится из 4-тензора M^{ik}). Его вычисление, равно как и представление (14) в явном виде, отложим до другой статьи.

Итак, найдено выражение для силы натяжения (12) и энергии квантового вихря (13) в сверхтекучей жидкости в метрике Шварцшильда. Сила натяжения из-за кривизны пространства оказывается не постоянной вдоль оси вихря, как в плоской метрике, а убывающей к периферии звезды. Энергия же вихревой нити всегда больше обычного выражения. Эти факты следует учесть в теории пиннинга квантовых вихрей (в коре) и сбоев периодов пульсаров [26, 27]. Представляет интерес исследовать данную задачу при релятивистской сверхтекучей скорости v в вихре. Так же будет полезно рассмотреть волны Ткаченко [5] и динамику свободно вращающейся сверхтекучей жидкости в искривленном пространстве [6].

Автор благодарен Л. И. Меньшикову за полезные дискуссии.

Список литературы

- [1] *J. Sauls*. Superfluidity in the interiors of neutron stars. In: Timing neutron stars. Eds H. Ögelman and E. van den Heuvel. Dordrecht: Kluwer, 1989.
- [2] *R. Epstein, G. Baum, B. Link*. Neutron star superfluid dynamics. In: Isolated pulsars. Ed. K. Van Riper. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1993.
- [3] *T. Takatsuka, R. Tamagaki*. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1993. № 112. P. 27.
- [4] *R. Donnelly*. Ann. Rev. Fluid Mech. 1993. V. 25. P. 325.
- [5] *E. Sonin*. Rev. Mod. Phys. 1987. V. 59. P. 87.
- [6] *G. Bauer, R. Donnelly, W. Vinen*. J. Low. Temp. Phys. 1995. V. 98. P. 47.
- [7] *Д. М. Седракян, К. М. Шагабасян*. УФН. 1991. Т. 161. № 7. С. 3.
- [8] *А. Б. Мигдал, Д. Н. Воскресенский, Э. Е. Саперштейн, М. А. Троцкий*. Пионные степени свободы в ядерном веществе. М.: Наука, 1991.
- [9] *Д. М. Седракян, Г. К. Саввиди*. Астрофизика. 1979. Т. 15. С. 359.
- [10] *N. Straumann*. Lecture notes in physics. 1992. V. 410. P. 267.
- [11] *Ph. Jetzer*. Phys. Rep. 1992. V. 220. № 4. P. 163.

- [12] *D. Toms.* Phys. Rev. D. 1993. V. 47. P. 2483.
- [13] *А. Ю. Андреев, Д. А. Кирижниц, С. Н. Юдин.* Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61. С. 825.
- [14] *U. Ben Yacov.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 2452.
- [15] *F. Debbasch, M. Brechet.* Physica D. 1995. V. 82. P. 255.
- [16] *С. Шапиро, С. Тюкольски.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1985.
- [17] *W. Israel.* Lecture notes in mathematics. 1989. V. 1385. P. 152.
- [18] *H. Taub.* Arch. Rat. Mech. Anal. 1959. V. 3. P. 312.
- [19] *D. Pant.* Astrophys. Space Sci. 1994. V. 215. P. 97.
- [20] *K. Rosquist.* Clas. Quant. Grav. 1995. V. 12. P. 1305.
- [21] *C. Lorenz, D. Ravenhall, C. Pethick.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 379.
- [22] *В. И. Обозов.* Изв. ВУЗов. Физика. 1995. № 3. С. 112.
- [23] *J. Synge.* Proc. Roy. Math. Soc. Ser. II. 1937. V. 43. P. 376.
- [24] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
- [25] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [26] *P. Jones.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1993. V. 263. P. 619.
- [27] *H. Chau, K. Cheng.* Phys. Rev. B. 1993. V. 47. P. 2707.

Поступила в редакцию 11.I.1996 г.

Y. V. Vlasov

SUPERFLUID QUANTUM VORTEX IN CURVED SPACE

The description of the general relativistic superfluid has an application to compact astrophysical objects namely neutron stars. We calculate the energy of a quantum vortex line in neutron superfluid in the case of Schwarzschild's metric.