Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Периодические оптические импульсы в нелинейных световодах, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 2, 178–191

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:52:27

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОПТИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СВЕТОВОДАХ

Обсуждается проблема прохождения поляризованных импульсов по световодам с изменяемой дисперсией. Диссипация и средняя дисперсия приняты равными нулю, что позволяет использовать модель векторного нелинейного уравнения Шредингера. Рассматривается световод, состоящий из частей большой и равной длины. Предложена асимптотическая рекуррентная процедура для вычисления амплитуды и фазы оптического импульса, проходящего по оптическому кабелю с изменяемой дисперсией.

Ключевые слова: оптические импульсы в телекоммуникации, световоды, нелинейное уравнение Шредингера, обратная задача рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Растущая потребность в средствах развития коммуникационных систем вызвала активизацию исследований в области передачи данных с помощью высокочастотных оптических импульсов. Изобретение и применение оптических усилителей, обеспечивающих периодическое усиление световых сигналов, привело к заметному продвижению в разработке моделей нелинейных оптоволоконных коммуникаций. Это позволяет решить проблему потери энергии в кабеле. Процесс прохождения импульса регулируется шумом, дисперсией и нелинейностью среды. В линейных системах большая мощность импульса вызывает искажения сигнала. С другой стороны, при наличии шума мощность не может быть очень малой, поскольку требуется поддерживать достаточно высокое отношение сигнал/шум. Поэтому приходится рассматривать нелинейные системы.

Системы телекоммуникаций передают информацию с помощью пакетов поляризованных электромагнитных импульсов, распространяющихся в световодах. Процесс прохождения таких сигналов при условии отсутствия диссипации хорошо описывается векторным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) (см., например, работу [1]):

$$i \frac{du_n}{dz} \pm \frac{d^2 u_n}{dt^2} + 2u_n \sum_{k=1}^N |u_k|^2 = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

* Институт математики с вычислительным центром УРО РАН, Уфа, Россия.
E-mail: vadim@imat.rb.ru

где z и t – пространственная и временная вещественные переменные. Наибольший интерес с точки зрения приложений вызывает двухкомпонентный случай $N = 2$, однако мы сохраним общий характер аналитических результатов для произвольного N . Численные эксперименты проводятся для $N = 2$. Известно, что уравнение (1.1) является интегрируемым: в работе [2] были найдены соответствующая L - A -пара и солитонные решения.

При условии постоянной дисперсии сигналы могут проходить по световоду в форме традиционного солитона. Солитонные импульсы не сохраняют свою форму при прохождении по кабелю из-за потери энергии и должны периодически “исправляться” с помощью специальных устройств. Авторы статьи [3] предложили включать в стандартную линию телекоммуникаций участки, на которых производится коррекция формы импульса путем изменения дисперсии. Это было первое упоминание идеи солитона с изменяемой дисперсией (периодического импульса), позднее получившей глубокое развитие как с численной, так и с теоретической стороны (см., например, работу [4]).

Итак, рассмотрим телекоммуникационную систему, состоящую из сегментов (плеч). В начальный момент времени генерируется некоторый импульс, который распространяется по плечу световода и претерпевает определенную деформацию. В конце этого плеча сигнал подвергается некоторому воздействию, которое позволяет восстановить его первоначальную форму, и передается в следующее плечо. Далее этот процесс повторяется. Подобный импульс был получен экспериментально, и возникла необходимость его теоретического анализа.

Модель солитона с переменной дисперсией была предложена и исследована для случая скалярного НУШ в работе [5] и выглядит следующим образом. Предположим, что начальное условие для НУШ (1.1) с отрицательной дисперсией представляет собой некоторый импульс. Пройдя по плечу, он приобретет другой вид, который станет начальным условием для задачи на следующем плече такой же длины, причем динамика импульса на этом шаге обуславливается НУШ (1.1) с положительной дисперсией. Далее этот процесс повторяется. Решение задачи такого рода является периодическим по z импульсом.

Основной целью этой работы является построение асимптотического (считаем длину плеча большой) описания для результата итеративной процедуры, характеризующей периодический импульс в случае поляризованного сигнала, эволюционирующего в силу векторного НУШ (1.1). Таким образом, имеем последовательность плеч равной и большой длины z_0 и импульс, динамика которого определяется одним из уравнений (1.1), причем знак дисперсионного члена меняется на конце каждого плеча и средняя дисперсия по периоду остается нулевой.

Предположим, что имеется вектор исходных импульсов $\bar{u}(t)$ в начале плеча с отрицательной дисперсией. Вопрос состоит в том, как определить форму импульса на конце следующего плеча с положительной дисперсией. Будем использовать схему, сходную с предложенной в статье [5].

1. Положим $\bar{u}^-(t, -z_0/2) = \bar{u}(t)$ и используем этот вектор в качестве потенциала для оператора Лакса L^- (см. ниже (2.1)). Потом решим прямую задачу рассеяния с целью найти соответствующие данные рассеяния.

2. Поскольку данные рассеяния имеют простую динамику, без труда находим соответствующие данные на конце текущего плеча с отрицательной дисперсией.

3. Решаем обратную задачу рассеяния и находим решение $\bar{u}^-(t, z_0/2)$ на конце плеча с положительной дисперсией.

4. Положим $\bar{u}^+(t, -z_0/2) = \bar{u}^-(t, z_0/2)$ и решим прямую задачу рассеяния, в результате чего найдем соответствующие данные рассеяния.

5. Найдем данные рассеяния на конце плеча с положительной дисперсией.

6. Решим обратную задачу рассеяния и найдем соответствующий импульс $\bar{u}^+(t, z_0/2)$ через период световода с изменяемой дисперсией.

Все перечисленные шаги могут быть выполнены явно, можно также полностью контролировать точность асимптотических решений прямой и обратной задач рассеяния. В результате мы получаем явное рекуррентное соотношение, позволяющее определять итоговую форму решения через много периодов световода с изменяемой дисперсией.

В последнем разделе представлены результаты численных экспериментов, которые показывают хорошее согласование с аналитическими выкладками. Рисунки иллюстрируют принципиальное сходство динамики двухкомпонентного сигнала с динамикой сигнала в скалярном случае, изученной в работе [5], хотя каждая из двух компонент, взятая отдельно, не является решением для однокомпонентной задачи.

2. ВЕКТОРНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Система (1.1) была проинтегрирована с помощью метода обратной задачи рассеяния с использованием линейных уравнений на $(N + 1)$ -компонентный вектор

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} : \quad -i\psi_{0t} = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k \psi_k e^{i\lambda t}, \quad i\psi_{nt} = \bar{u}_n \psi_0 e^{-i\lambda t}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$L^\pm \Psi = 0, \quad L^\pm = \begin{pmatrix} id_t & \mp \bar{u}_1 e^{i\lambda t} & \dots & \mp \bar{u}_N e^{i\lambda t} \\ u_1 e^{-i\lambda t} & id_t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N e^{-i\lambda t} & 0 & \dots & id_t \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где d_t – оператор производной по t . Пусть Ψ – нормированное фундаментальное решение системы (2.1), такое что $\Psi \rightarrow I$ при $t \rightarrow \infty$, где I – единичная матрица. Матрица рассеяния $S(\lambda, z) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Psi(t, z, \lambda)$ имеет тривиальную динамику по z :

$$S(\lambda, z) = e^{-iz\lambda^2 a} S(\lambda, 0) e^{iz\lambda^2 a}, \quad \det S = 1, \quad a = \frac{1}{2} \text{diag}(-1, 1, \dots, 1).$$

Обозначим $\Delta_j(\lambda)$ минор матрицы рассеяния размерности j . Функции $\Delta_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, N+1$, не зависят от z и могут быть аналитически продолжены на верхнюю полуплоскость. Следующая теорема была доказана в работе [6].

ТЕОРЕМА. Пусть миноры матрицы рассеяния удовлетворяют условиям

- 1) $\Delta_j(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-3})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $j = 1, 2, \dots, N+1$;
- 2) $0 < |\Delta_1(\lambda)| \leq |\Delta_2(\lambda)| \leq \dots \leq |\Delta_{N+1}(\lambda)| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

и система (2.1) не имеет дискретного спектра. Тогда верны следующие асимптотические формулы:

$$u_n = z^{-1/2} A_n(\xi) \exp\left(\frac{iz\xi^2}{2} + i\alpha(\xi) \ln z\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $\xi = t/z$, $\alpha = \sum_{n=1}^N |A_n|^2$, и амплитуды удовлетворяют равенствам

$$|A_n|^2 = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\Delta_n(\xi)}{\Delta_{n+1}(\xi)} \right|, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha(\xi) = \frac{1}{\pi} \ln |\Delta_1(\xi)|.$$

Забегая вперед, отметим, что факт сохранения условий теоремы в процессе эволюции решений проверяется численным образом: профили, представленные в разделе 7, позволяют вычислить соответствующие данные рассеяния, указывающие на отсутствие дискретного спектра.

3. ОСНОВНОЙ ФОРМАЛИЗМ

Предположим, что спектральная задача (2.1) не имеет дискретных собственных значений и рассмотрим импульсы, быстро убывающие при $|t| \rightarrow \infty$. Именно такие импульсы широко используются в оптических системах телекоммуникаций [1]. В случае непрерывного спектра имеют место стандартные утверждения:

$$\Psi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \Psi \rightarrow \begin{pmatrix} a_0^\pm(\lambda) \\ a_1^\pm(\lambda) e^{\mp i\lambda^2 z/2} \\ \vdots \\ a_N^\pm(\lambda) e^{\mp i\lambda^2 z/2} \end{pmatrix}, \quad t \rightarrow -\infty,$$

где a_j , $j = 0, \dots, N$ — спектральные данные. Предположим, что плечи с положительной и отрицательной дисперсией имеют одинаковую длину z_0 и $\delta = 1/z_0$ является малым параметром. Введем также малый параметр $\epsilon = z_0^{-1} \ln z_0$.

Рассмотрим вектор импульсов $\bar{u}(t, 0)$ в центре плеча с отрицательной дисперсией. Пусть эти начальные данные не содержат солитонов. Тогда вектор $\bar{u}^-(t, -z_0/2)$ в начале плеча с отрицательной дисперсией, вектор $\bar{u}^-(t, z_0/2) = \bar{u}^+(t, -z_0/2)$ в конце плеча с отрицательной дисперсией и начале плеча с положительной дисперсией и вектор

$\bar{u}^+(t, z_0/2)$ в конце плеча с положительной дисперсией имеют следующий вид:

$$\bar{u}_n^-\left(t, -\frac{z_0}{2}\right) = \delta^{1/2} (A_n^-(\xi, \epsilon) + O(\delta)) e^{iS^-(\xi, \epsilon)/\delta}, \quad (3.1)$$

$$\bar{u}_n^-\left(t, \frac{z_0}{2}\right) = \bar{u}_n^+\left(t, -\frac{z_0}{2}\right) = \delta^{1/2} (A_n(\xi, \epsilon) + O(\delta)) e^{iS(\xi, \epsilon)/\delta}, \quad (3.2)$$

$$\bar{u}_n^+\left(t, \frac{z_0}{2}\right) = \delta^{1/2} (A_n^+(\xi, \epsilon) + O(\delta)) e^{iS^+(\xi, \epsilon)/\delta}, \quad (3.3)$$

амплитуды и фазы предполагаются конечными по отношению к ϵ :

$$\left| \frac{d^k}{d\xi^k} A_n^\pm \right| = O(1), \quad \left| \frac{d^k}{d\xi^k} S^\pm \right| = O(1), \quad k = 0, 1, 2, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

и

$$\frac{d}{d\xi} S^+ > 0, \quad \frac{d}{d\xi} S^- < 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Таким образом, мы имеем дело с решениями, определяемыми условиями (3.1)–(3.4). Они точно определяются асимптотическими решениями соответствующих обратных задач рассеяния при выполнении равенства

$$S^\pm(\xi, \epsilon) = \pm \frac{\xi^2}{2} + O(\epsilon). \quad (3.6)$$

Смысл условий (3.3)–(3.6) состоит в том, что мы можем применить метод Вентцеля–Крамера–Бриллюэна (ВКБ) для решения соответствующих прямой и обратной задач. Эти условия обеспечивают тот факт, что только одна точка поворота вносит вклад в описание формул для решений линейной задачи (2.1).

4. ПРЯМАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛЕЧА С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Мы будем следовать схеме, приведенной в разделе 1 (п. 1–6).

1. Чтобы решить прямую задачу рассеяния, соответствующую потенциалу $\bar{u}_n^-(t, -z_0/2)$, подставим (3.1) в линейную задачу (2.1) и заменим переменные. Получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \pm i\delta^{1/2}\psi_{0\xi} &= (A_1\psi_1 + \dots + A_N\psi_N)e^{-i\Phi}, \\ -i\delta^{1/2}\psi_{1\xi} &= A_1\psi_0e^{i\Phi}, \\ &\vdots \\ -i\delta^{1/2}\psi_{N\xi} &= A_N\psi_0e^{i\Phi}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\Phi = (S - \lambda\xi)/\delta$. Граничные условия для этой системы выглядят так:

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_0^-(\lambda, -z_0/2) \\ a_1^-(\lambda, -z_0/2)e^{\frac{i\lambda^2}{2\delta}} \\ \vdots \\ a_N^-(\lambda, -z_0/2)e^{\frac{i\lambda^2}{2\delta}} \end{pmatrix}, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (4.2)$$

Система (4.1) может рассматриваться как сингулярно возмущенная с малым параметром при производных. Используя идеи Захарова и Манакова, решаем эту задачу методом ВКБ. Соответствующие стационарные точки (точки поворота) фазы могут быть найдены из уравнения

$$S'_-(\xi, 0) - \lambda = 0. \quad (4.3)$$

Условие (3.4) гарантирует, что только одна точка поворота вносит вклад в результат применения метода ВКБ к решению задачи (2.1). Полезно ввести следующую параметризацию:

$$\lambda = S'_-(\mu, 0) = S_-(\mu), \quad (4.4)$$

где μ — новый спектральный параметр, однозначно восстанавливаемый путем обращения формулы (4.4) $\mu = \mu(\lambda)$ вблизи точки поворота.

Теперь дифференцируем по ξ первое уравнение системы (4.1), используем условие (3.4) и получаем уравнение на ψ_0 :

$$i\delta\psi_{0\xi\xi} \pm i\psi_0 \sum_{j=1}^N A_j^2 - \delta\Phi\xi\psi_{0\xi} + \delta^{1/2}e^{-i\Phi} \sum_{j=1}^N A_{j\xi}\psi_j = 0, \quad (4.5)$$

которое имеет следующие ВКБ-решения вдали от стационарной точки $\xi = \mu$:

$$\psi_0(\xi, \mu) = \exp \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\pm i A^2(\zeta, \epsilon)}{S^{-'}(\zeta) - S^{-'}(\mu)} d\zeta + O(\sqrt{\delta}), \quad \xi > \mu. \quad (4.6)$$

Для определения решения при $\xi < \mu$ отметим, что (3.4), (4.1) дают

$$\left(\sum_{j=1}^N A_j \psi_j \right)_{\xi\xi} = \pm \delta^{-1} \sum_{j=1}^N A_j^2 \sum_{j=1}^N A_j \psi_j + i\Phi_{\xi} \sum_{j=1}^N A_j \psi_{j\xi} + O(\delta),$$

поэтому для $\xi < \mu$ имеем

$$\sum_{j=1}^N A_j \psi_j = \exp \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\mp i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta, \epsilon)}{S^{-'}(\zeta) - S^{-'}(\mu)} d\zeta + O(\sqrt{\delta}).$$

С другой стороны,

$$\psi_0 = \pm \delta^{1/2} e^{-i\Phi} \frac{\sum_{j=1}^N A_j \psi_{j\xi}}{\sum_{j=1}^N A_j}. \quad (4.7)$$

Наложим граничное условие при $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\sum_{j=1}^N A_j \psi_j \rightarrow \sum_{j=1}^N a_j A_j,$$

тогда

$$\sum_{j=1}^N A_j \psi_j = \sum_{j=1}^N A_j a_j \exp \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\mp i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta)}{S^{-'}(\zeta) - S^{-'}(\mu)} d\zeta + O(\delta).$$

Используя (4.7), выводим

$$\begin{aligned} \psi_0 &= -\delta^{1/2} \sum_{j=1}^N a_j A_j(\mu) \frac{e^{-i\Phi}}{S^{-'}(\xi) - S^{-'}(\mu)} \times \\ &\times \exp \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\mp i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta)}{S^{-'}(\zeta) - S^{-'}(\mu)} d\zeta + O(\delta), \quad \xi < \mu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Теперь используем эту формулу в линейной системе (4.1) и получим:

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi, \mu) &= a_0(\mu) \exp \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\mp i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta) d\zeta}{S^{-'}(\zeta) - S^{-'}(\mu)} - \delta^{1/2} \sum_{j=1}^N a_j A_j(\mu) \times \\ &\times \frac{e^{-i\Phi}}{S^{-'}(\xi) - S^{-'}(\mu)} \exp \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\pm i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta) d\zeta}{S^{-'}(\zeta) - S^{-'}(\mu)} + O(\delta), \quad \xi < \mu, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\psi_0(\xi, \mu) = \exp \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\pm i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta) d\zeta}{S^{-'}(\zeta) - S^{-'}(\mu)} + O(\delta^{1/2}), \quad \xi > \mu. \quad (4.10)$$

5. ПРОЦЕДУРА СШИВАНИЯ

Для получения необходимых условий на данные рассеяния сингулярные интегралы в формулах (4.9), (4.10) должны быть продолжены через точку поворота $\xi = \mu$. Для этого используем стандартную процедуру сшивания (см. [7], [8]).

В окрестности точки поворота $\xi = \mu$ имеем

$$\begin{aligned} S'(\zeta) - S'(\mu) &= S''(\mu)(\xi - \mu) + O(\xi - \mu)^2, \\ S(\xi) - \lambda\xi &= S(\mu) - \mu S'(\mu) + \frac{1}{2} S''(\mu)(\xi - \mu)^2 + O(\xi - \mu)^3. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Теперь введем локальный параметр $\tau = \delta^{-1/2}(\xi - \mu)\sqrt{S''(\mu)}$ и перепишем уравнение (4.5) в следующем виде:

$$\psi_{0\tau\tau} - i\tau\psi_{0\tau} \pm \psi_0 \sum_{j=1}^N A_j^2/S''(\mu) = 0.$$

Вводя обозначения $V(\tau) = e^{i\tau^2/4}\psi_0$, $\tau = \alpha x$, $\alpha^2 = i$, $\beta = \mp \sum_{j=1}^N A_j^2/S''(\mu)$, получим классическое линейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$V_{xx} + V\left(\frac{1}{2} + i\beta - \frac{x^2}{4}\right) = 0. \quad (5.2)$$

Поэтому вблизи точки поворота

$$\psi_0(\tau, \mu) = C(\mu)e^{i\tau^2/4}D_{i\beta}(\tau\sqrt{i}), \quad (5.3)$$

где D — функция параболического цилиндра, $C(\mu)$ — некоторая функция. Теперь используем известные асимптотические свойства $D(z)$ вдоль оси $\arg z = \pi/4$:

$$\psi_0(\tau, \mu) = C(\mu)e^{-\frac{\pi\beta}{4}}\tau^{i\beta}(1 + O(\tau^{-2})), \quad \tau \rightarrow +\infty \quad (5.4a)$$

$$\psi_0(\tau, \mu) = C(\mu)\left[e^{-\frac{\pi\beta}{4}}\tau^{i\beta} + \frac{\sqrt{2\pi}e^{\pi(5\beta-3i)/4}}{\Gamma(-i\beta)}\tau^{-i\beta-1}e^{\frac{i\tau^2}{2}}\right](1 + O(\tau^{-2})), \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (5.4b)$$

Чтобы вычислить множитель $C(\mu)$, склеим справа: $\xi \rightarrow \mu + 0$, $\tau \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi, \mu) &= \exp \int_{\xi}^{+\infty} \frac{i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta)}{S''(\xi)} d \ln(S'(\zeta) - S'(\mu)) = \\ &= \exp \left\{ -\frac{i \sum_{j=1}^N A_j^2}{S''(\xi)} \ln(S'(\zeta) - S'(\mu)) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\xi}^{+\infty} \ln(S'(\zeta) - S'(\mu)) i \left(\frac{\sum_{j=1}^N A_j^2}{S''(\zeta)} \right)' d\zeta \right\} = \\ &= (\delta^{1/2}\tau\sqrt{S''(\mu)})^{i\beta} \exp \int_{\mu}^{+\infty} i\beta'(\zeta) \ln(S'(\zeta) - S'(\mu)) d\zeta + O(\epsilon) = \\ &= \delta^{i\beta/2}\tau^{i\beta} M_1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$M_1 = (S''(\mu))^{i\beta/2} \exp \int_{\mu}^{+\infty} \ln(S'(\zeta) - S'(\mu)) d\beta(\zeta).$$

Сравним (5.5) с (5.4а) и получим условие гладкой склейки:

$$C(\mu) = e^{\pi\beta/4} \delta^{i\beta/2} M_1(\mu). \quad (5.6)$$

Теперь склеим слева: $\xi \rightarrow \mu - 0$, $\tau \rightarrow -\infty$,

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi, \mu) &= a_0(\mu) \delta^{i\beta/2} |\tau|^{i\beta} M_2(\mu) + \frac{\delta^{1/2}}{\sqrt{S''(\mu)} (\xi - \mu)} \frac{\sum_{j=1}^N A_j a_j}{\sqrt{S''(\mu)}} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\delta} \left[S(\mu) - \mu S'(\mu) + \frac{1}{2} (\xi - \mu)^2 S''(\mu) \right] \right\} \times \\ &\times \exp \int_{-\infty}^{\xi} \frac{i \sum_{j=1}^N A_j^2(\zeta) d\zeta}{S'^{-}(\zeta) - S'^{-}(\mu)} + O(\epsilon) = \\ &= a(\mu) \delta^{i\beta/2} |\tau|^{i\beta} M_2(\mu) + \frac{\sum_{j=1}^N A_j a_j}{\sqrt{S''(\mu)}} \tau^{-1} \exp \left[\frac{i}{\delta} (S(\mu) - \mu S'(\mu)) \right] \times \\ &\times e^{i\tau^2/2} \delta^{-i\beta/2} |\tau|^{-i\beta} M_2^{-1}(\mu), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$M_2(\mu) = (S''(\mu)) \exp \int_{-\infty}^{\mu} i\beta'(\zeta) \ln(S'(\zeta) - S'(\mu)) d\zeta.$$

Сшивку слева в главном порядке дает:

$$C(\mu) e^{-\pi\beta/4} |\tau|^{i\beta} e^{\pi\beta} = a_0(\mu) \delta^{i\beta/2} |\tau|^{i\beta} M_2(\mu)$$

и

$$a_0(\mu) = e^{\pi\beta} M_1/M_2, \quad |a_0(\mu)| = e^{\pi\beta(\mu)}. \quad (5.8)$$

Теперь найдем и склеим следующие порядки в разложениях (4.9), (5.4):

$$\begin{aligned} C(\mu) \frac{\sqrt{2\pi} e^{\pi/4} 5\beta - 3i}{\Gamma(-i\beta)} \tau^{-i\beta-1} e^{i\tau^2/2} = \\ = \frac{\sum_{j=1}^N A_j a_j}{\sqrt{S''(\mu)}} \exp \left[\frac{i}{\delta} (S(\mu) - \mu S'(\mu)) \right] e^{i\tau^2/2} \delta^{-i\beta/2} |\tau|^{-i\beta} \tau^{-1} M_2^{-1}(\mu). \end{aligned}$$

Это дает линейную комбинацию спектральных данных:

$$\sum_{j=1}^N a_j^- A_j^- = \sqrt{2\pi S''_-(\mu)} \exp \left\{ \frac{-i}{\delta} [S_-(\mu) - \mu S'_-(\mu) - \epsilon\beta + \delta\phi_-] \right\}, \quad (5.9)$$

где

$$\epsilon = \delta \ln \delta, \quad \phi = -\arg M_1 - \arg M_2 + \frac{3}{4}\pi + \arg \Gamma(-i\beta).$$

6. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Целью данного раздела является нахождение связи между параметрами формул (3.1), (3.2) (амплитуды фаз) в начале и конце плеча. Используем свойства спектральных данных (5.8), (5.9) и их тривиальную динамику по z :

$$a_0^-\left(\lambda, +\frac{z_0}{2}\right) = a_0^-\left(\lambda, -\frac{z_0}{2}\right), \quad a_j^-\left(\lambda, +\frac{z_0}{2}\right) = a_j^-\left(\lambda, -\frac{z_0}{2}\right) e^{-i\lambda^2 z_0}. \quad (6.1)$$

Будем искать асимптотику потенциала в следующем виде:

$$u_j^-\left(t, +\frac{z_0}{2}\right) = \delta^{1/2} (A_j(\xi, \epsilon) + O(\delta)) e^{iS(\xi, \epsilon)/\delta}. \quad (6.2)$$

Так же как в разделе 3, амплитуду A_j и фазу S (6.2) можно получить путем решения линейной задачи с известными спектральными данными (6.1):

$$\begin{aligned} i\sqrt{\delta} \psi_{0\xi} &= (A_1 \psi_1 + \dots + A_N \psi_N) e^{-i\Phi}, \\ -i\sqrt{\delta} \psi_{1\xi} &= A_1 \psi_0 e^{i\Phi}, \\ &\vdots \\ -i\sqrt{\delta} \psi_{N\xi} &= A_N \psi_0 e^{i\Phi}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\Phi = \delta^{-1}(S + \lambda\xi)$, и граничными условиями

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, & t \rightarrow +\infty, \\ \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} a_0^-(\lambda, -z_0/2) \\ a_1^-(\lambda, -z_0/2) e^{-\frac{i\lambda^2}{2\delta}} \\ \vdots \\ a_N^-(\lambda, -z_0/2) e^{-\frac{i\lambda^2}{2\delta}} \end{pmatrix}, & t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Сравнивая линейные задачи (4.1), (4.2) и (6.3), (6.4), заметим, что они отличаются только в знаке фаз экспонент. Поэтому можно повторить вычисления раздела 3 и получить подобные выражения для спектральных данных через амплитуды и фазы на конце плеча:

$$\begin{aligned} \left| a^-\left(\lambda, -\frac{z_0}{2}\right) \right| &= \exp\left\{ -\frac{\pi \sum_{j=1}^N A_j^2(\nu)}{S''(\nu)} \right\}, \quad \lambda = -S'(\nu), \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad (6.5) \\ \sum_{j=1}^N A_j a_j^-\left(\lambda, -\frac{z_0}{2}\right) &= \sqrt{2\pi S''(\mu)} \exp\left\{ -\frac{i}{\delta} \left(S(\nu) - \nu S'(\nu) - \epsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_j^2(\nu)}{S''(\nu)} + \delta\phi(\nu) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Рис. 1. Амплитуды A_1 и A_2 компонент импульса.

Здесь ν обозначает точку поворота для задачи (6.3), (6.4): $\lambda = -S'(\nu)$.

Теперь мы можем сравнить формулы (5.9) и (6.5) и найти связь между амплитудами и фазами на обоих концах плеча:

$$\frac{A_{j-}^2(\mu)}{S_{-}''(\mu)} = \frac{A_j^2(\nu)}{S''(\nu)}, \quad \lambda = S'_{-}(\mu) = -S'(\nu), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.6)$$

$$S_{-}(\mu) - \mu S'_{-}(\mu) + \epsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_{j-}^2(\mu)}{S_{-}''(\mu)} = S(\nu) - \nu S'(\nu) - \epsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_j^2(\nu)}{S''(\nu)}.$$

Решение прямой и обратной задач рассеяния для оператора L^+ на плече с положительной дисперсией совершенно аналогично описанному выше решению для оператора L^- .

Это дает соотношения на параметры A_j, S в начале плеча и A_j^+, S_+ в конце плеча. Эти формулы имеют следующий вид (ср. (6.6)):

$$\begin{aligned} \frac{A_j^2(\nu)}{S''(\nu)} &= \frac{(A_j^+(k))^2}{S_+''(k)}, \quad \lambda = -S'(\nu) = S'_+(k), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ S(\nu) - \nu S'(\nu) + \epsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_j^2(\nu)}{S''(\nu)} &= S_+(k) - k S'_+(k) - \epsilon \sum_{j=1}^N \frac{(A_j^+(\nu))^2}{S_+''(k)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Объединяя полученные результаты, сформулируем рекуррентную процедуру для отображения импульса на период в виде следующей системы дифференциальных уравнений на амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} S^-(\mu, \epsilon) - \mu \frac{dS^-(\mu, \epsilon)}{d\mu} + \epsilon \sum_{j=1}^N (A_j^-(\mu, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S^-(\mu, \epsilon)}{d\mu^2} \right)^{-1} &= \\ = S(\nu, \epsilon) - \nu \frac{dS(\nu, \epsilon)}{d\nu} - \epsilon \sum_{j=1}^N (A_j(\nu, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S(\nu, \epsilon)}{d\nu^2} \right)^{-1}, \\ (A_j^-(\mu, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S^-(\mu, \epsilon)}{d\mu^2} \right)^{-1} &= (A_j(\nu, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S(\nu, \epsilon)}{d\nu^2} \right)^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ S(\nu, \epsilon) - \nu \frac{dS(\nu, \epsilon)}{d\nu} + \epsilon \sum_{j=1}^N (A_j(\nu, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S(\nu, \epsilon)}{d\nu^2} \right)^{-1} &= \\ = S^+(\kappa, \epsilon) - \kappa \frac{dS^+(\kappa, \epsilon)}{d\kappa} - \epsilon \sum_{j=1}^N (A_j^+(\kappa, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S^+(\kappa, \epsilon)}{d\kappa^2} \right)^{-1}, \\ (A_j(\nu, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S(\nu, \epsilon)}{d\nu^2} \right)^{-1} &= (A_j^+(\kappa, \epsilon))^2 \left(\frac{d^2 S^+(\kappa, \epsilon)}{d\kappa^2} \right)^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь μ, ν, κ – решения следующих уравнений:

$$\xi = \frac{dS^-(\mu, 0)}{d\mu} = -\frac{dS^-(\nu, 0)}{d\nu} = \frac{dS^+(\kappa, 0)}{d\kappa}.$$

Эти решения единственны в силу условий (3.4), (3.6).

В заключение необходимо отметить, что представленная рекуррентная процедура имеет определенный асимптотический смысл и не может быть повторена очень много раз ввиду накапливающейся погрешности. Оценки указывают на то, что после $n \sim \max\{A_1(\xi)\epsilon^{-1}\}$ шагов условие (3.4) более не выполняется и вычисления должны учитывать вклад ВКБ-анализа множественных точек поворота, что представляется сложным и выходит за рамки этой работы.

Рис. 2. Амплитуды компонент импульса в логарифмическом масштабе.

7. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Прямое численное моделирование решений двухкомпонентного НУШ дает хорошее соответствие с аналитическими вычислениями. Счет был проведен для плеч длины $z_0 = 450$ при величине амплитуд порядка $O(10^{-1})$. Решение было найдено с помощью алгоритма, подобного развитому в статье [1].

Рис. 1 показывает динамику амплитуд обеих компонент импульса за один период.

Рис. 2 дает динамику тех же амплитуд обеих компонент импульса за один период в логарифмическом масштабе. Рис. 3 дает динамику угла поляризации двухкомпонентного

Рис. 3. Угол поляризации импульса.

импульса за один период. Нетривиальность эволюции поляризации свидетельствует о несводимости результатов к случаю однородно поляризованного импульса.

Благодарности. Автор выражает признательность В. Ю. Новокшенову за ценные консультации. Работа выполнялась при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00190.

Список литературы

- [1] *V. E. Zakharov, S. Wabnitz (eds.). Optical Solitons. Theoretical Challenges and Industrial Perspectives.* Berlin: Springer, EDP Sciences, 1999.
- [2] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков.* Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 70. № 9. С. 573; *А. Б. Шабат.* Дифф. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1824.
- [3] *W. Forysiak, N. J. Doran, F. M. Knox, K. J. Blow.* Optics Commun. 1995. V. 117. P. 65.
- [4] *I. Gabitov, S. Turitsyn.* Opt. Lett. 1996. V. 21. P. 327.
- [5] *А. В. Михайлов, В. Ю. Новокшенов.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 1. С. 124.
- [6] *В. Ю. Новокшенов.* УМН. 1982. Т. 37. № 2 (224). С. 215.
- [7] *В. Ю. Новокшенов.* ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 799.
- [8] *P. A. Deift, X. Zhou.* Commun. Math. Phys. 1994. V. 165. P. 175.

Поступила в редакцию 26.VIII.2003 г.,
после доработки 6.II.2004 г.