Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Вильданов, Интегрируемая граничная задача для уравнения Буссинеска,
ТМФ, 2004, том 141, номер 2, 192–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:03:22

© 2004 г.

А. Н. Вильданов*

ИНТЕГРИРУЕМАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Обсуждается метод поиска интегрируемых краевых условий для нелинейных уравнений. Найдено новое краевое условие для уравнения Буссинеска, совместимое с парой Лакса, с бесконечным набором высших симметрий и преобразованием Беклунда. Построен класс явных частных решений уравнения, удовлетворяющих этому краевому условию.

Ключевые слова: интегрируемость, краевое условие, преобразование Беклунда, высшие симметрии, уравнение Буссинеска.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим нелинейные уравнения в частных производных вида

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_n), \quad (1)$$

допускающие интегрирование посредством метода обратной задачи рассеяния [1]. Здесь $u = u(x, t)$ – искомая функция, u_t, u_x – частные производные по t и по x . Предполагается, что уравнение (1) является условием совместности некоторой пары систем линейных уравнений вида

$$Y_x = U(x, t, \lambda)Y, \quad (2)$$

$$Y_t = V(x, t, \lambda)Y \quad (3)$$

с матричными коэффициентами U и V , зависящими от динамических переменных $u, u_x, \dots$ и от комплексного параметра λ . Как известно, метод обратной задачи позволяет эффективно решать задачу Коши, однако плохо приспособлен для решения задачи смешанного типа. Как показано в работе [2], начально-краевая задача с краевыми условиями общего вида

$$P_\alpha(t, u, u_x, \dots, u_m)|_{x=0} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (4)$$

*Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, Нефтекамск, Россия.
E-mail: alvild@mail.ru

сводится к задаче Коши для нелинейного (вообще говоря, неинтегрируемого) псевдодифференциального уравнения на функцию от двух независимых переменных. В этой связи представляет интерес проблема выявления всех краевых условий, для которых последнее уравнение само является интегрируемым. Заметим, однако, что проблема классификации нелинейных псевдодифференциальных уравнений с переменными коэффициентами остается нерешенной [3]. В то же время проблема классификации интегрируемых краевых условий является более изученной (см., например, [4]).

В работе [5] был рассмотрен альтернативный подход, пригодный к поиску интегрируемых краевых условий, использующий только ассоциированную линейную систему (2), (3). Здесь мы подробно обсудим идею работы [5] и построим новые примеры интегрируемых краевых условий.

Дадим строгое определение краевого условия, которое мы будем называть интегрируемым. Пусть при $x = 0$ имеет место краевое условие (4), и пусть $Y(x, t, \lambda)$ — решение уравнения (3). Положим $W(t, \lambda) = V(x, t, \lambda)|_{x=0}$. Тогда функция $Y(t, \lambda) = Y(x, t, \lambda)|_{x=0}$ является решением уравнения

$$Y_t = W(t, \lambda)Y. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Краевое условие (4) назовем интегрируемым, если существуют матричная функция $F = F(t, u(x, t)|_{x=0}, u_x(x, t)|_{x=0}, \dots, \lambda)$, $\det F \neq 0$, и скалярная функция $h = h(\lambda)$ такие, что новая функция

$$Y_1(t, \lambda) = FY(t, h(\lambda)) \quad (6)$$

снова является решением уравнения (5). При этом нужно исключить уже имеющиеся инволюции пары Лакса, т.е. предполагается, что функция $FY(x, t, h(\lambda))$ не является решением уравнения (3) при $x \neq 0$. Другими словами, при наложении интегрируемого краевого условия система линейных уравнений (3) при $x = 0$ приобретает дополнительную точечную симметрию.

Отметим, что из условия (6) следует выполнение равенства

$$\frac{d}{dt}Y^{-1}(t, \lambda)Y_1(t, \lambda) = 0, \quad (7)$$

означающего, что элементы матрицы $Y^{-1}(t, \lambda)Y_1(t, \lambda)$ есть производящие функции законов сохранения начально-краевой задачи (1), (4). В разделе 2 мы покажем, что найденные ранее интегрируемые краевые условия для уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ), синус-Гордон, Гарри Дима и модифицированного уравнения КдФ (мКдФ) удовлетворяют данному выше определению, поэтому его можно принять в качестве формального классификационного признака. В разделе 3 приводятся новые примеры интегрируемых краевых условий для уравнений Буссинеска и Каупа–Буссинеска. В разделе 4 вычислены высшие симметрии, согласованные с граничной задачей для уравнения Буссинеска и доказано, что такие симметрии образуют бесконечную иерархию. В разделе 5 построены частные решения этой граничной задачи.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

1. В качестве первого примера рассмотрим уравнение КдФ на полуоси

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (8)$$

Опишем для данного уравнения подробно процедуру нахождения функций $F, h(\lambda)$ преобразования (6) и интегрируемого краевого условия. Соответствующие матрицы U и V имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda - 2u \\ u_{xx} - (4\lambda + 2u)(u - \lambda) & -u_x \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что условие существования симметрий (6) эквивалентно существованию матричных решений уравнения

$$F_t = V(x, t, \lambda) \big|_{x=0} F(t, \lambda) - F(t, \lambda) V(x, t, h(\lambda)) \big|_{x=0}. \quad (9)$$

Будем искать интегрируемые краевые условия вида

$$P_1(u, u_x, u_{xx}) \big|_{x=0} = 0, \quad P_2(u, u_x, u_{xx}) \big|_{x=0} = 0. \quad (10)$$

Предположим сначала, что система (10) приводится к виду

$$u(x, t) \big|_{x=0} = g_1(u_x), \quad u_{xx}(x, t) \big|_{x=0} = g_2(u_x), \quad (11)$$

где u_x — независимая переменная, т.е. уравнение (9) должно выполняться тождественно по $u_x(x, t) \big|_{x=0}$. Хотя в общем случае функция F из данного выше определения зависит от динамических переменных, можно показать, что для краевых условий вида (11) функция F не содержит явной зависимости от потенциала u и его производных в нуле: $F = F(t, \lambda)$. Пусть $F = f_{ij}(t, \lambda)$, $i, j = 1, 2$. Теперь уравнение (9) в случае краевых условий (11) запишется в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} f_{11t} &= -(4\lambda + 2g_1)f_{21} + (2hg_1 - 4h^2 + 2g_1^2 - g_2)f_{12}, \\ f_{12t} &= 2u_x f_{12} - (4\lambda + 2g_1)f_{22} + (4h + 2g_1)f_{11}, \\ f_{21t} &= g_2(f_{11} - f_{22}) - 2u_x f_{21} - (2\lambda g_1 - 4\lambda^2 + 2g_1^2)f_{11} + (2hg_1 - 4h^2 + 2g_1^2)f_{22}, \\ f_{22t} &= (4h + 2g_1)f_{21} - (2\lambda g_1 - 4\lambda^2 + 2g_1^2 - g_2)f_{12}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь требуется найти функции $h = h(\lambda)$, $f_{ij} = f_{ij}(t, \lambda)$, $g_i = g_i(u_x)$, $i, j = 1, 2$. Отметим, что матрица F преобразования (6) определена не однозначно, а с точностью до умножения на произвольную функцию параметра λ . Этим произволом мы воспользуемся ниже.

Продифференцируем уравнения системы (12) по u_x :

$$\begin{aligned} 0 &= -2g'_1 f_{21} + (2hg'_1 + 4g_1 g'_1 - g'_2) f_{12}, \\ 0 &= f_{12} + g'_1 (f_{11} - f_{22}), \\ 0 &= -2f_{21} + g'_2 (f_{11} - f_{22}) - (2\lambda + 4g_1) g'_1 f_{11} + (2h + 4g_1) g'_1 f_{22}, \\ 0 &= 2g'_1 f_{21} - (2\lambda g'_1 + 4g_1 g'_1 - g'_2) f_{12}, \end{aligned} \quad (13)$$

где g'_i обозначают производные dg_i/du_x . Складывая первое и четвертое уравнения последней системы, получим

$$2(h - \lambda) g'_1 f_{12} = 0.$$

Считая, что $h(\lambda) \neq \lambda$, получим $g'_1 f_{12} = 0$. Тогда из второго уравнения следует, что $f_{12} = 0$. Система (13) упрощается:

$$\begin{aligned} 0 &= g'_1 f_{12}, \\ 0 &= g'_1 (f_{11} - f_{22}), \\ 0 &= -2f_{21} + g'_2 (f_{11} - f_{22}) - (2\lambda + 4g_1) g'_1 f_{11} + (2h + 4g_1) g'_1 f_{22}. \end{aligned}$$

Допустим сначала, что $g'_1 \neq 0$. Тогда $f_{21} = 0$, $f_{11} = f_{22}$. Отсюда немедленно следует, что $f_{11}(\lambda - h) = 0$, $f_{11} = 0$, и F — нулевая матрица. Поэтому следует остановиться на случае $g'_1 = 0$, $g_1 = a = \text{const}$. Из второго уравнения системы (12) имеем

$$f_{22} = \frac{4h + 2g_1}{4\lambda + 2g_1} f_{11}.$$

Дифференцируя последнее равенство по t согласно первому и последнему уравнениям (12), получаем равенство $(4h + 2g_1) f_{21} = -(4h + 2g_1) f_{21}$, в силу которого $f_{21} = 0$. С учетом последнего равенства система (12) примет вид

$$\begin{aligned} f_{11t} &= 0, \\ f_{22} &= \frac{4h + 2g_1}{4\lambda + 2g_1} f_{11}, \\ 0 &= -g_2 (f_{11} - f_{22}) + (2\lambda g_1 - 4\lambda^2 + 2g_1^2) f_{11} - (2hg_1 - 4h^2 + 2g_1^2) f_{22}, \\ f_{22t} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что из второго уравнения следует, что $f_{11} \neq f_{22}$ (иначе $f_{11} = f_{22} = 0$). Из третьего уравнения видим, что функция g_2 также не зависит от t , $g_2 = b = \text{const}$. Осталось определить функции f_{11} , f_{22} и $h(\lambda)$. Подставляя второе уравнение (14) в третье уравнение (14), после упрощения получаем следующее равенство:

$$(-4h^3 + h(3a^2 - b) - \lambda(3a^2 - b) + 4\lambda^3) f_{11} = 0.$$

Обозначая $3a^2 - b = c$ и решая квадратное по h уравнение, в итоге получаем функцию $h = (-\lambda \pm \sqrt{c - 3\lambda^2})/2$. Пользуясь допустимым произволом в выборе f_{11} , возьмем $f_{11} = 2\lambda + a$, откуда $f_{22} = 2h + a$.

Выше мы предполагали, что $h(\lambda) \neq \lambda$. Теперь осталось рассмотреть случай, когда $h(\lambda) = \lambda$. Сложение первого и четвертого уравнений системы (12) дает $d(f_{11} + f_{22})/dt = 0$, $f_{11} + f_{22} = c_1 = \text{const}$. Система (13) теперь будет эквивалентна следующей системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= -2g'_1 f_{21} + (2\lambda g'_1 + 4g_1 g'_1 - g'_2) f_{12}, \\ 0 &= f_{12} + g'_1 (f_{11} - f_{22}). \end{aligned} \quad (15)$$

Если функция f_{12} равна нулю, то из второго уравнения системы (12) будет следовать, что $f_{11} = f_{22}$. Тогда третье уравнение системы (13) дает $f_{21} = 0$, т.е. $F = cI$, где I — единичная матрица, симметрия (6) тривиальна. Поэтому предположим, что $f_{12} \neq 0$. Тогда $g'_1 \neq 0$, $f_{11} \neq f_{22}$. Перепишем систему (15) в виде

$$\begin{aligned} f_{11} - f_{22} &= -\frac{f_{12}}{g'_1}, \\ f_{21} &= \left(\lambda + 2g_1 - \frac{g'_2}{2g'_1} \right) f_{12}. \end{aligned} \quad (16)$$

Дифференцирование по t левой части первого уравнения системы (16) дает

$$\begin{aligned} f_{11t} - f_{22t} &= -2(4\lambda + 2g_1) f_{21} + 2(2\lambda g_1 - 4\lambda^2 + 2g_1^2 - g_2) f_{12} = \\ &= -2(4\lambda + 2g_1) \left(\lambda + 2g_1 - \frac{g'_2}{2g'_1} \right) f_{12} + 2(2\lambda g_1 - 4\lambda^2 + 2g_1^2 - g_2) f_{12} = \\ &= \left[-16\lambda^2 + \left(-16g_1 + \frac{4g'_2}{g'_1} \right) \lambda - 4g_1^2 - 2g_2 + \frac{2g_1 g'_2}{g'_1} \right] f_{12}. \end{aligned}$$

С другой стороны, дифференцирование правой части того же уравнения дает

$$\begin{aligned} -\frac{f_{12t}}{g'_1} + \frac{g'_1}{g_1'^2} \frac{d}{dt} u_x f_{12} &= -\frac{1}{g'_1} (2u_x f_{12} + (4\lambda + 2g_1)(f_{11} - f_{22})) + \frac{g'_1}{g_1'^2} \frac{d}{dt} u_x f_{12} = \\ &= -\frac{1}{g'_1} \left(2u_x - \frac{4\lambda + 2g_1}{g'_1} - \frac{g'_1}{g_1'} \frac{d}{dt} u_x \right) f_{12}. \end{aligned}$$

Сравнение полученных выражений как полиномов от λ дает $f_{12} = 0$, что противоречит сделанному выше предположению. Итак, в случае $h(\lambda) = \lambda$ нужные симметрии отсутствуют.

Случаи, когда уравнения (10) разрешимы относительно функции u или u_{xx} , приводят к тривиальным инволюциям. Результат не изменится, если рассматривать немного более общие, чем (10), краевые условия вида

$$P_1(u, u_x, u_{xx}, t)|_{x=0} = 0, \quad P_2(u, u_x, u_{xx}, t)|_{x=0} = 0. \quad (17)$$

Суммируя результаты, получаем, что у уравнения КдФ имеются интегрируемые краевые условия вида

$$u(x, t)|_{x=0} = a, \quad u_{xx}(x, t)|_{x=0} = b, \quad (18)$$

где a, b – произвольные константы из $\mathbb{R}$,

$$F = \begin{pmatrix} 2\lambda + a & 0 \\ 0 & 2h + a \end{pmatrix}, \quad h = \frac{-\lambda \pm \sqrt{c - 3\lambda^2}}{2}, \quad c = 3a^2 - b.$$

В случае $c = 0$ имеет место равенство $b = 3a^2$ и

$$F = \begin{pmatrix} 2\lambda + a & 0 \\ 0 & 2\omega\lambda + a \end{pmatrix}, \quad h = \omega\lambda, \quad \omega^3 = 1.$$

Граничные условия (18) были получены в работе [6]. Отметим, что краевое условие (18) содержит два уравнения. Если рассматривать условия, содержащие одно равенство – да

$$H(u, u_x, u_{xx}, t)|_{x=0} = 0, \quad (19)$$

то, как можно показать, оно приводит к тривиальным инволюциям, т.е. у уравнения КдФ нет интегрируемого краевого условия, состоящего только из одного уравнения.

2. Рассмотрим уравнение синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (20)$$

Матрицы U и V имеют вид

$$4iU = \begin{pmatrix} u_t & -i\lambda e^{iu/2} + \frac{i}{\lambda} e^{-iu/2} \\ i\lambda e^{-iu/2} - \frac{i}{\lambda} e^{iu/2} & -u_t \end{pmatrix},$$

$$4iV = \begin{pmatrix} u_x & -i\lambda e^{iu/2} - \frac{i}{\lambda} e^{-iu/2} \\ i\lambda e^{-iu/2} + \frac{i}{\lambda} e^{iu/2} & -u_x \end{pmatrix}.$$

Вычисления дают два вида интегрируемых краевых условий. Первое имеет вид

$$u(x, t)|_{x=0} = a, \quad (21)$$

где a – произвольная действительная постоянная. Ему соответствуют следующие функции F и h :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda e^{ia/2} + \frac{1}{\lambda} e^{-ia/2} & 0 \\ 0 & h e^{ia/2} + \frac{1}{h} e^{-ia/2} \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{\lambda}.$$

Другое интегрируемое условие также содержит одно равенство:

$$u_x(x, t)|_{x=0} = a \cos \frac{u}{2} + b \sin \frac{u}{2}, \quad (22)$$

где a и b – произвольные константы из $\mathbb{R}$. В этом случае F и h следующие:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda(a + ib) - \lambda^{-1}(a - ib) & i(h^2 - h^{-2}) \\ i(\lambda^2 - \lambda^{-2}) & h(a + ib) - h^{-1}(a - ib) \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{\lambda}.$$

Условия (21), (22) были найдены в работах [7]–[9].

3. В качестве следующего примера рассмотрим уравнение Гарри Дима

$$u_t + u^3 u_{xxx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (23)$$

Матрицы U и V имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda}{u^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = -2\lambda \begin{pmatrix} u_x & -2u \\ u_{xx} + \frac{2\lambda}{u} & -u_x \end{pmatrix}$$

Здесь классификация также дает два типа краевых условий. Первый из них имеет вид

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u_x(x, t)|_{x=0} = b,$$

где b – произвольная константа, ему соответствуют

$$F = I + \alpha e^{4\lambda b t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \text{const}, \quad h = \lambda,$$

постоянная α не зависит от b . Отметим, что здесь матрица F явно зависит от времени t . Другое интегрируемое условие имеет вид

$$u_x(x, t)|_{x=0} = au, \quad u_{xx}(x, t)|_{x=0} = \frac{a^2 u}{2} + \frac{d}{u}, \quad a, d \in \mathbb{R},$$

и соответственно

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \frac{a}{2}(\lambda - h) & h \end{pmatrix}, \quad h = \frac{-d - 2\lambda \pm \sqrt{d^2 - 4\lambda d - 12\lambda^2}}{4}.$$

Эти краевые условия получены в работе [4].

4. Рассмотрим также уравнение мКдФ

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2 v_x, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (24)$$

Это уравнение является условием совместности следующей переопределенной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} y_x &= (-i\xi\sigma_3 + U)y, \\ y_t &= (4i\xi^3\sigma_3 - 4\xi^2 U - \xi V_1 - V_0)y, \end{aligned}$$

где

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2iv^2 & -2v_x \\ -2v_x & 2iv^2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & iv \\ -iv & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} 0 & -iv_{xx} + 2iv^3 \\ iv_{xx} - 2iv^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что уравнения КдФ и мКдФ связаны преобразованием Миуры, поэтому интегрируемые краевые условия для уравнения мКдФ получаются прямым пересчетом

соответствующих результатов для уравнения КдФ. Пусть $Y(x, t, \lambda)$ и $Y_m(x, t, \lambda)$ означают собственные функции уравнений КдФ и мКдФ, соответственно. Тогда они связаны преобразованием Беклунда вида $Y_m = GY$, где

$$G = \begin{pmatrix} v - i\xi & 1 \\ -i(v + i\xi) & -i \end{pmatrix}.$$

При этом имеет место связь между решениями уравнений КдФ и мКдФ вида

$$u = v^2 - v_x. \quad (25)$$

Теперь легко найти матрицу F_m преобразования (6) уравнения мКдФ из соотношения $F_m = GFG^{-1}$,

$$F_m = \begin{pmatrix} P_-(\xi) - P_+(h) & iP_-(h) - iP_-(\xi) \\ iP_+(h) - iP_+(\xi) & P_-(h) - P_+(\xi) \end{pmatrix}, \quad P_{\pm}(\xi) = i(v(x, t)|_{x=0} \pm i\xi)(i\xi^2 + a).$$

Соответствующая функция h удовлетворяет равенству $h^2 = (-\xi^2 \pm \sqrt{4b - 3\xi^4})/2$. Краевые условия уравнения КдФ (18) посредством связи (25) переходят в интегрируемые краевые условия уравнения мКдФ вида

$$\begin{aligned} v_x - v^2 + a|_{x=0} &= 0, \\ v_t + 4v^4 - 2av^2 - 2vv_{xx} - 4b + a^2|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь матрица F явно зависит от функции $v(x, t)|_{x=0}$.

3. ИНТЕГРИРУЕМОЕ КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Рассмотрим уравнение Буссинеска, которое мы записываем в виде

$$u_{tt} = \frac{1}{3}u_{xxx} + \frac{4}{3}(u^2)_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (26)$$

Преобразуем его в эквивалентную эволюционную систему

$$u_t = v_x, \quad v_t = \frac{1}{3}u_{xxx} + \frac{8}{3}uv_x, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (27)$$

Известно, что эта система есть условие равенства операторов $L_t = [L, A]$, где L, A — операторы из следующей задачи:

$$Ly = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u - iv \right) y = \lambda y, \quad y_t = -Ay = i \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3}u \right) y. \quad (28)$$

Возьмем вектор $Y = (y, y_x, y_{xx})^T$, тогда уравнения (28) переходят в систему вида (2), (3) с матрицами

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda - u_x + iv & -2u & 0 \end{pmatrix}, \quad V = i \begin{pmatrix} \frac{4}{3}u & 0 & 1 \\ \lambda + \frac{u_x}{3} + iv & -\frac{2}{3}u & 0 \\ \frac{u_{xx}}{3} + iv_x & \lambda - \frac{u_x}{3} + iv & -\frac{2}{3}u \end{pmatrix}.$$

Наша цель — найти функции $F(\lambda, t)$, $h(\lambda)$ и краевое условие вида (4), при которых выполняется равенство (9). В общем виде решить такую задачу сложно, и мы ограничимся случаем, когда матричная функция F не зависит от времени t . Тогда выполнение (9) означает, что матрицы $V(x, t, \lambda)|_{x=0}$ и $V(x, t, h(\lambda))|_{x=0}$ подобны:

$$V(x, t, \lambda)|_{x=0} = F(\lambda)V(x, t, h(\lambda))|_{x=0}F^{-1}(\lambda). \quad (29)$$

Отсюда заключаем, что определители матриц $V(x, t, \lambda)|_{x=0}$ и $V(x, t, h(\lambda))|_{x=0}$ совпадают,

$$\det V(x, t, \lambda)|_{x=0} = \det V(x, t, h(\lambda))|_{x=0}.$$

Из последнего равенства следует, что $i^3(h(\lambda) - \lambda)(h(\lambda) + \lambda + 2iv(x, t)|_{x=0}) = 0$. Предположим сначала, что интегрируемое краевое условие существует, когда первая скобка равна нулю, т.е. $h(\lambda) = \lambda$. Тогда из равенства (29) получаем, что матрицы $V(x, t, \lambda)|_{x=0}$ и $F(\lambda)$ перестановочны,

$$V(x, t, \lambda)|_{x=0}F(\lambda) = F(\lambda)V(x, t, \lambda)|_{x=0}.$$

Отсюда заключаем, что $F(\lambda) = cI$, где c — произвольная функция λ , I — единичная матрица, симметрия (6) тривиальна. Следовательно, сделанное предположение неверно, и нулю равна вторая скобка, т.е. выполняется равенство $h(\lambda) + \lambda = -2iv(x, t)|_{x=0}$. Так как в последнем равенстве левая часть зависит только от λ , а правая — от времени t , заключаем, что

$$v(x, t)|_{x=0} = a = \text{const}, \quad (30)$$

а функция $h(\lambda) = -\lambda - 2ia$. Производя дальнейшие выкладки, как в случае уравнения КдФ, мы найдем, что наряду с условием (30) имеет место также условие

$$u_x(x, t)|_{x=0} = b = \text{const}. \quad (31)$$

При выполнении краевых условий (30), (31) существуют функции F и h преобразования (6), которые имеют вид

$$F = \text{diag}\left(-\lambda - ia + \frac{b}{3}, \lambda + ia + \frac{b}{3}, -\lambda - ia + \frac{b}{3}\right), \quad h = -2ai - \lambda.$$

В итоге справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Эволюционная система (27) для уравнения Буссинеска допускает в точке $x = 0$ интегрируемое краевое условие (в смысле данного в разделе 1 определения), состоящее из двух равенств вида (30), (31), где a , b — произвольные вещественные константы. Если выполнены условия (30), (31), уравнение (3) при $x = 0$ имеет точечную симметрию (6) при $h = -2ai - \lambda$ с диагональной матрицей преобразования F . Оно будет единственным интегрируемым краевым условием*

в классе тех матриц F преобразования (6), которые зависят только от λ и не зависят от времени t .

Для уравнения (26) краевые условия (30), (31) примут вид

$$u_x|_{x=0} = b, \quad u_{xxx} + 8uu_x|_{x=0} = 0. \quad (32)$$

В заключение раздела рассмотрим систему уравнений Каупа–Буссинеска

$$\begin{aligned} \pi_t &= u_{xx} + \beta^2 u_{xxx} - \varepsilon(u_x \pi)_x, \\ \pi &= u_t + \frac{1}{2\varepsilon u_x^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

которая описывает в длинноволновом приближении ($0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \beta \ll 1$) продольные движения электронной плазмы в волноводе [10].

Система (33) может быть получена как условие совместности двух линейных уравнений

$$y_{xx} + py = 0, \quad y_t = \frac{\beta}{2} qxy - (2i\beta\lambda + \beta q)y_x, \quad (34)$$

где

$$p = \lambda^2 + \frac{1}{4\beta^2} + i\lambda q - r, \quad q = \frac{\varepsilon}{2\beta} u_x, \quad r = \frac{\varepsilon}{4\beta^2} \left(u_t + \frac{3}{4} \varepsilon u_x^2 \right).$$

Вводя в рассмотрение вектор $Y = (y, y_x)^T$, запишем равенства (34) как систему вида (2), (3) с матрицами

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 - \frac{1}{4\beta^2} - i\lambda q + r & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} q_x & -2i\beta\lambda - \beta q \\ \frac{\beta}{2} q_{xx} + (2i\beta\lambda + \beta q)p & -\frac{\beta}{2} q_x \end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают, что у уравнения Каупа–Буссинеска имеется одно интегрируемое краевое условие, состоящее из двух равенств вида

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} &= b = \text{const}, \\ \left(\beta^2 u_{xxx} - \varepsilon u_t u_x - \frac{\varepsilon^2}{2} u_x^3 + u_x \right) \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Ему соответствует следующая матрица преобразования (6):

$$F = \begin{pmatrix} 2i\beta\lambda + \frac{\varepsilon}{2}b & 0 \\ 0 & 2i\beta h + \frac{\varepsilon}{2}b \end{pmatrix}, \quad h = -\lambda.$$

4. ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Убедимся, что краевые условия (32) являются интегрируемыми с других точек зрения. Следуя [4] (см. также [11]), проверим, что краевые условия (32) совместны с бесконечным числом высших симметрий уравнения (26). Имеется в виду следующее. Пусть уравнение

$$u_\tau = g(v, u, u_x, \dots, u_{x^k}) \quad (35)$$

является симметрией уравнения Буссинеска (26). Дифференцирование правых частей равенств (32) по τ дает 0. Симметрия (35) совместна с краевым условием (32), если дифференцирование левых частей (32) по τ снова дает 0 в точке $x = 0$ с учетом краевого условия (32) и его дифференциальных следствий. Возьмем, к примеру, классическую симметрию сдвига по времени t (здесь и далее греческими индексами обозначены симметрии уравнения (26) или системы (27))

$$u_\tau = u_t. \quad (36)$$

Дифференцирование краевых условий (32) по τ дает

$$\begin{aligned} (u_x)_\tau|_{x=0} &= (u_\tau)_x|_{x=0} = (u_t)_x|_{x=0} = \frac{d}{dt}(u_x|_{x=0}) = \frac{d}{dt}b = 0, \\ (u_{xxx} + 8uu_x)_\tau|_{x=0} &= (u_{xxx\tau} + 8u_\tau u_x + 8u_{x\tau})|_{x=0} = (u_{\tau xxx} + 8u_\tau u_x + 8u_{u\tau x})|_{x=0} = \\ &= (u_{t xxx} + 8u_t u_x + 8uu_{tx})|_{x=0} = \frac{d}{dt}(u_{xxx} + 8uu_x)|_{x=0} = \frac{d}{dt}0 = 0, \end{aligned}$$

т.е. симметрия сдвига совместна с краевыми условиями (32). Покажем, что у уравнения Буссинеска имеется бесконечно много симметрий, совместных с этим краевым условием. В монографии [12] представлен оператор рекурсии R_0 высших симметрий уравнения (27)

$$R_0 = \begin{pmatrix} 3v + 2v_x D_x^{-1} & D_x^2 + 2u + u_x D_x^{-1} \\ \frac{1}{3}D_x^4 + \frac{10}{3}uD_x^2 + 5u_x D_x + 3u_2 + \frac{16}{3}u^2 + (\frac{2}{3}u_3 + \frac{16}{3}uu_x)D_x^{-1} & 3v + v_x D_x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Оператор рекурсии R_0 при известной симметрии (u_τ, v_τ) уравнений (27) порождает новую симметрию (u_{τ_1}, v_{τ_1}) по правилу

$$\begin{pmatrix} u_{\tau_1} \\ v_{\tau_1} \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Для дальнейшего анализа необходимо, следуя [4], выделить набор динамических переменных для системы (27). Это будут функции u, u_x, v и их производные по t . Теперь следует переписать оператор рекурсии R_0 в новых динамических переменных. Он выражается через матрицу R размера 4×4 , элементы которой мы найдем из условия

$$(l_1)_{\tau_1} = Rl_1, \quad (38)$$

где $l_1 = (u, u_x, u_{xx}, v)^T$. Кроме того, заменим все производные динамических переменных по x на производные по t , а оператор D_x^{-1} в R выразим через оператор D_t^{-1} . Для этого выпишем дифференциальные следствия системы (27):

$$\begin{aligned} v_x &= D_t u, & v_{xxxx} &= 3v_{tt} - 8u_t u_x - 8u u_{xt}, \\ v_{xx} &= D_t u_x, & u_{xxx} &= 3v_t - 8u u_x, \\ v_{xxx} &= D_t u_{xx}, & u_{x^4} &= 3u_{tt} - 8u_x^2 - 8u u_{xx}. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее перепишем уравнения системы (27) в виде

$$D_x^{-1} u = D_t^{-1} v, \quad D_x^{-1} v = \frac{1}{3} D_t^{-1} u_{xx} + \frac{4}{3} D_t^{-1} u^2. \quad (40)$$

Теперь найдем элементы матрицы R . Для этого перепишем равенство (37) с учетом дифференциальных следствий (39) и (40):

$$\begin{aligned} u_{\tau_1} &= (3v + 2v_x D_x^{-1}) u_\tau + (D_x^2 + 2u + u_x D_x^{-1}) v_\tau = \\ &= 3v u_\tau + 2v_x D_t^{-1} v_\tau + D_t(u_x)_\tau + 2u v_\tau + u_x \left(\frac{1}{3} D_t^{-1} (u_{xx})_\tau + \frac{8}{3} D_t^{-1} u u_\tau \right) = \\ &= \left(3v + \frac{8}{3} u_x D_t^{-1} u \right) u_\tau + D_t(u_x)_\tau + \frac{1}{3} u_x D_t^{-1} (u_{xx})_\tau + (2u + 2v_x D_t^{-1}) v_\tau = \\ &= R_{11} u_\tau + R_{12} (u_x)_\tau + R_{13} (u_{xx})_\tau + R_{14} v_\tau. \end{aligned}$$

Аналогично, выписывая v_{τ_1} , найдем элементы четвертой строки матрицы R :

$$\begin{aligned} v_{\tau_1} &= \left(D_t^2 + \frac{u_{xx}}{3} + \frac{16}{3} u^2 + \frac{8}{3} v_x D_t^{-1} u \right) u_\tau - \frac{1}{3} u_x (u_x)_\tau + \\ &\quad + \left(\frac{2}{3} u + \frac{v_x}{3} D_t^{-1} \right) (u_{xx})_\tau + (2v_t D_t^{-1} + 3v) v_\tau = \\ &= R_{41} u_\tau + R_{42} (u_x)_\tau + R_{43} (u_{xx})_\tau + R_{44} v_\tau. \end{aligned}$$

Далее, дифференцируя u_{τ_1} дважды по x , найдем выражения $(u_x)_{\tau_1}$ и $(u_{xx})_{\tau_1}$:

$$\begin{aligned} (u_x)_{\tau_1} &= \left(7v_x + 2u D_t + \frac{8}{3} u_{xx} D_t^{-1} u \right) u_\tau + 3v (u_x)_\tau + \\ &\quad + \left(2D_t + \frac{u_{xx}}{3} D_t^{-1} \right) (u_{xx})_\tau + (2u_{xt} D_t^{-1} + 4u_x) v_\tau = \\ &= R_{21} u_\tau + R_{22} (u_x)_\tau + R_{23} (u_{xx})_\tau + R_{24} v_\tau, \\ (u_{xx})_{\tau_1} &= \left(-21u_{xt} - 25u_x D_t + \frac{8}{3} (3v_t - 8u u_x) D_t^{-1} u \right) u_\tau + (-20u_t - 30u D_t) (u_x)_\tau + \\ &\quad + \left(3v + \frac{3v_t - 8u u_x}{3} D_t^{-1} \right) (u_{xx})_\tau + (2u_{xxt} D_t^{-1} + 6u_{xx} + 12D_t^2) v_\tau = \\ &= R_{31} u_\tau + R_{32} (u_x)_\tau + R_{33} (u_{xx})_\tau + R_{34} v_\tau. \end{aligned}$$

В результате получим несколько громоздкий оператор рекурсии R со свойством (38). Можно упростить вид оператора R . Для этого введем новые переменные h и w так, что $u_{xx} = h - 4u^2$, $v = w + a$, и рассмотрим новый набор динамических переменных $l = (u, h, u_x, w)^T$. В новых переменных симметрия (36) запишется в виде $l_\tau = l_t$, а совместность с краевыми условиями (30), (31) перейдет в условие обращения в нуль третьей и четвертой координат вектора l_τ в точке $x = 0$. Оператор рекурсии запишется в виде $R = 3aI + R_1$, где

$$R_1 = \begin{pmatrix} 3w & \frac{1}{3}u_x D_t^{-1} & D_t & 2u + 2u_t D_t^{-1} \\ -u_{xt} - 3u_x D_t & 3w + w_t D_t^{-1} & 2u D_t & 4h + 3D_t^2 + 2h_t D_t^{-1} \\ -3u_t - 6u D_t & D_t + \frac{h-4u^2}{3} D_t^{-1} & 3w & 2u_{xt} D_t^{-1} + 3u_x \\ D_t^2 + \frac{h-4u^2}{3} & \frac{2}{3}u + \frac{u_t}{3} D_t^{-1} & -\frac{u_x}{3} & 2w_t D_t^{-1} + 3w \end{pmatrix}, \quad (41)$$

и R_1 – снова оператор рекурсии.

ТЕОРЕМА 2. Пусть уравнение (35) – симметрия, совместная с краевыми условиями (30), (31). Тогда применение квадрата оператора рекурсии (41) R_1^2 к этой симметрии снова дает симметрию, совместную с (30), (31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l_{τ_0} – симметрия, совместная с краевыми условиями (30), (31). Применив к ней два раза оператор рекурсии R_1 , получим симметрию

$$l_{\tau_1} = R_1^2 l_{\tau_0}. \quad (42)$$

Нетрудно убедиться, что элементы матрицы $(R_1^2)_{31}, (R_1^2)_{32}, (R_1^2)_{41}, (R_1^2)_{42}$ обращаются в нуль при $x = 0$. Тогда равенство (42) при $x = 0$ содержит оператор рекурсии блочно-треугольного вида:

$$\begin{pmatrix} u \\ h \\ u_x \\ w \end{pmatrix}_{\tau_1} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\tau_0} \\ h_{\tau_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $(u_x)_{\tau_1}$ и w_{τ_1} обращаются в нуль при $x = 0$, т.е. симметрия (42) также совместна с краевыми условиями (30), (31). Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что многократное применение к симметрии (36) квадрата оператора рекурсии R_1^2 даст бесконечную иерархию симметрий, совместных с краевыми условиями (32). С другой стороны, можно начать с гамильтоновой симметрии сдвига

$$u_\gamma = u_x, \quad v_\gamma = v_x.$$

Применение к этой симметрии оператора рекурсии R_0 дает симметрию

$$u_{\gamma_1} = u_{txx} + 4uu_t + 4u_x D_x^{-1} u_t.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, симметрия

$$u_\chi = u_{\gamma_1} - 4au_\gamma \quad (43)$$

совместна с (32) и, следовательно, в силу теоремы 2 порождает вторую бесконечную иерархию симметрий, совместных с краевыми условиями. Итак, мы убедились, что краевые условия (32) совместны с бесконечным числом высших симметрий, образующих две иерархии. Одна иерархия порождается симметрией сдвига по времени, а другая – симметрией (43).

5. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Представляет интерес задача отыскания частных решений краевой задачи

$$u_{tt} = \frac{1}{3}u_{xxxx} + \frac{4}{3}(u^2)_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (44)$$

$$u_x|_{x=0} = b, \quad u_{xxx} + 8uu_x|_{x=0} = 0. \quad (45)$$

Один класс решений, в силу специфики краевых условий (45), очевиден: это не зависящие от t решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_{xxx} + 8uu_x = 0. \quad (46)$$

Оно легко преобразуется к уравнению первого порядка, разрешенному относительно производной:

$$u_x = \sqrt{-\frac{8}{3}u^3 + c_1u + c_2},$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Общее решение последнего уравнения – эллиптическая функция Вейерштрасса $u = -(3/2)\wp(\pm x + \alpha)$ (см. [13]), четная по переменной x , α – постоянная интегрирования. Другие решения краевой задачи можно получить с помощью преобразования Беклунда:

$$\begin{aligned} kw'_t - 2w'_{xx} - 4w_{xx} + 12(w' - w)w_x + 4(w' - w)^3 + \lambda &= 0, \\ kw_t + 4w'_{xx} + 2w_{xx} + 12(w' - w)w'_x + 4(w' - w)^3 + \lambda &= 0, \end{aligned} \quad (47)$$

где $k^2 = -36$, $u = 3w_x/2$, λ – произвольная константа. При этом функции $w(x, t)$ и $w'(x, t)$ будут удовлетворять следующему уравнению:

$$w_{tt} = 4w_xw_{xx} + \frac{1}{3}w_{xxxx}. \quad (48)$$

Интегрируемые краевые условия (45) для функции $w(x, t)$ примут вид

$$w(x, t)|_{x=0} = 0, \quad w_{xx}(x, t)|_{x=0} = \frac{2}{3}b.$$

Следующая теорема полезна для построения решений краевой задачи (44), (45).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $w(x, t)$ – решение уравнения (48) с краевыми условиями

$$w(x, t)|_{x=0} = 0, \quad w_{xx}(x, t)|_{x=0} = b, \quad (49)$$

$w'_0(x, t)$ – решение, полученное преобразованием Беклунда (47) функции $w(x, t)$ при $\lambda = 2b$, удовлетворяющее начальному условию $w'_0(x, t)|_{x, t=0} = 0$. Тогда решение $w'_0(x, t)$ также удовлетворяет краевым условиям вида (49)

$$w'_0(x, t)|_{x=0} = 0, \quad w'_{0xx}(x, t)|_{x=0} = b_1,$$

где $b_1 = -b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем преобразование Беклунда (47) в удобном для наших целей виде:

$$\begin{aligned} kw'_t - 3w_{xx} + 12(w' - w)w_x + 6(w' - w)w'_x + 6(w' - w)^3 + \frac{kw_t}{2} + \frac{3}{2}\lambda &= 0, \\ 4w'_{xx} + 12(w' - w)w'_x + 4(w' - w)^3 + kw_t + 2w_{xx} + \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Пусть производная по x функции $w'_0(x, t)$ принимает в точке $x = 0$, $t = 0$ значение $w'_{0x}(x, t)|_{x, t=0} = \alpha$. Дифференцируя первое уравнение системы (50) по x и полагая $x = 0$, получаем следующую систему обыкновенных (по t) дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $w'(x, t)|_{x=0}$, $w'_x(x, t)|_{x=0}$ и заданными функциями $w(x, t)|_{x=0}$, $w_x(x, t)|_{x=0}$, $w_{xxx}(x, t)|_{x=0}$:

$$\begin{aligned} w'_t &= \frac{1}{k} \left[3w_{xx} - 12(w' - w)w_x - 6(w' - w)w'_x - 6(w' - w)^3 - \frac{kw_t}{2} - \frac{3}{2}\lambda \right], \\ w'_{xt} &= \frac{1}{k} \left[3w_{xxx} - 12(w'_x - w_x)w_x - 6(w'_x - w_x)w'_x - 18(w' - w)^2(w'_x - w_x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{kw_{xt}}{2} + 6(w' - w) \left(\frac{k}{4}w_t - \frac{3}{2}w_{xx} + 3(w' - w)w'_x + (w' - w)^3 \right) \right] \end{aligned} \quad (51)$$

с начальными условиями

$$w'(x, t)|_{x, t=0} = 0, \quad w'_x(x, t)|_{x, t=0} = \alpha. \quad (52)$$

Ясно, что существует решение первого уравнения системы (51) вида $w'(x, t)|_{x=0} = 0$. Подставляя это решение во второе уравнение системы (51), получаем уравнение

$$w'_{xt} = \frac{1}{k} \left[3w_{xxx} - 12(w'_x - w_x)w_x - 6(w'_x - w_x)w'_x - \frac{kw_{xt}}{2} \right]. \quad (53)$$

Обозначим $w'_x(x, t)|_{x=0} = \psi(t)$ решение уравнения (53) с начальным условием $w'_x(x, t)|_{x, t=0} = \alpha$. Тогда пара функций $w'(x, t)|_{x=0} = 0$, $w'_x(x, t)|_{x=0} = \psi(t)$ дают решение системы (51) с начальными условиями (52). В силу единственности решения задачи Коши это означает, что функция $w'_0(x, t)$ принимает значения $w'_0(x, t)|_{x=0} = 0$,

$w'_{0x}(x, t)|_{x=0} = \psi(t)$. Теперь из второго уравнения системы (50) следует, что $w'_{0xx}(x, t)|_{x=0} = -b$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что неоднократным применением преобразования Беклунда к любому решению уравнения (46) при специальном выборе начального условия и коэффициента преобразования Беклунда мы каждый раз будем получать решение краевой задачи (44), (45). Пример таких решений – рациональные решения уравнения Буссинеска (44). Они получаются последовательным применением преобразования Беклунда (47) к нулевому решению. Приведем три первых из них:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{3}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln(x^2 + \theta), \\ u(x, t) &= \frac{3}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln(x^4 + 2\theta x^2 - \theta^2), \\ u(x, t) &= \frac{3}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln(x^6 + 5x^4\theta + 5x^2\theta^2 + 5\theta^3), \end{aligned}$$

где $\theta = \pm 2i(t - t_0)$. Из теоремы 3 следует, что у уравнения Буссинеска существует бесконечно много рациональных решений, удовлетворяющих краевым условиям (45) при $b = 0$.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 01-01-00931).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [2] А. Дегасперис, С. В. Манаков, П. М. Сантини. ТМФ. 2002. Т. 133. № 2. С. 184–201.
- [3] A. V. Mikhailov, V. S. Novikov. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 4775–4790.
- [4] I. T. Habibullin. Phys. Lett. A. 1993. V. 178. P. 369–373.
- [5] I. T. Habibullin, A. N. Vil'danov. Boundary conditions consistent with $L-A$ pairs. In: Proc. Intern. Conf. MOGRAN-2000 “Modern Group Analysis for the New Millenium” (27 Sept. – 30 Oct. 2000). Eds. V. A. Baikov et al. Ufa: USATU, 2001. P. 80–81.
- [6] V. Adler, B. Gürel, M. Gürses, I. Habibullin. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 3505–3513.
- [7] Р. Ф. Бикбаев, В. О. Тарасов. Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. С. 78–93.
- [8] Е. К. Склянин. Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 2. С. 86–87.
- [9] S. Ghoshal, A. B. Zamolodchikov. Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 3841–3886; Erratum. P. 4353; hep-th/9306002.
- [10] А. О. Смирнов. ТМФ. 1986. Т. 66. № 1. С. 30–46.
- [11] I. T. Habibullin, A. N. Vil'danov. Integrable boundary conditions for nonlinear lattices. In: SIDE III-Symmetries and Integrability of Difference Equations. CRM Proc. Lect. Notes. V. 25. Eds. D. Levi, O. Ragnisco. Providence, RI: AMS, 2000. P. 173–180.
- [12] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [13] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 17.11.2004 г.