Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Антонио, Г. П. Пронько, Гамильтонов формализм в гидродинамике, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 3, 392–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 04:12:26

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Для описания динамики жидкости предложен гамильтонов подход, основанный на формулируемой в терминах лагранжевых переменных динамике. Построение канонических переменных жидкости проливает свет на происхождение введенных в девятнадцатом веке переменных Клебша. Развитый формализм позволяет связать закон сохранения циркуляции (теорему Томсона) с инвариантностью теории относительно специальных диффеоморфизмов, а также установить новые законы сохранения. Обсуждается различие между эйлеровым и лагранжевым описаниями, при этом указывается на неполноту первого. Построенный формализм применим также к идеальной плазме. В заключение приведены некоторые замечания относительно квантования жидкости.

Ключевые слова: гидродинамика, канонические переменные, плазма.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время почти все фундаментальные физические явления могут быть рассмотрены в рамках как классической, так и квантовой механики. Это означает, что такие явления допускают гамильтоново описание. За свою долгую историю гамильтонов формализм дал много мощных методов анализа общих свойств эволюции систем, инструментов для решения частных задач, а также уникальный способ перехода от классического описания систем к квантовому описанию.

В этом отношении механика сплошных сред (гидродинамика), несмотря на свое название, стоит в стороне от традиционной механики. Причиной этого является не только бесконечное число степеней свободы жидкости. Мы уже научились формулировать теорию классических и квантовых полей. Основное различие между обычной теорией поля и теорией сплошных сред заключается в том, что в первом случае речь может идти о динамике поля в фиксированной точке пространства (соответствующее поле, разумеется, взаимодействует с полем в соседних точках), в то время как во втором случае при описании взаимодействия составляющих жидкость соседних частиц положение частицы в пространстве не фиксировано вследствие движения жидкости. В то же время задачей

---

*Chaos and Innovation Research Unit, Department of Mathematics, Aristoteles University of Thessaloniki, Greece. E-mail: iantonio@math.auth.gr

†Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: pronko@mx.ihep.su

обычной гидродинамики является определение скорости, плотности и значения термодинамической переменной (давления или энтропии) как функций от координат $\vec{x}$ и времени t для соответствующих граничных и/или начальных условий [1]. Аналогичные задачи возникают также в магнитогидродинамике достаточно плотной плазмы [2]. Для развития гамильтонова формализма необходимо начать с более детального описания, основанного на траекториях частиц, составляющих жидкость или плазму. Такое описание особенно важно в случае плазмы, поскольку фундаментальное электромагнитное взаимодействие может быть определено только в терминах траекторий зарядов. Необходимо отметить, что некоторые аспекты такого подхода подробно рассматривались в ряде работ Марсдена, Вейнштейна, Купершмидта, Нолма, Ратиу и Левермора [3] особенно в контексте проблемы устойчивости для идеальной жидкости. В отличие от этих работ, мы сознательно избегаем, где это возможно, использования языка современной дифференциальной геометрии, чтобы сделать нашу статью понятной для физиков.

Конечно, не все свойства жидкости могут быть учтены в рамках гамильтонова подхода. Например, мы оставляем открытыми вопросы, связанные с диссипацией энергии, вязкостью и т.д.

2. ЛАГРАНЖЕВЫ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В гидродинамике приняты две различные картины описания. Первая, обычно называемая эйлеровой, в качестве координат использует пространственно зависимые поля скорости, плотности и некоторую термодинамическую переменную. Вторая, лагранжева, использует координаты частиц $\vec{x}(\xi_i, t)$, отмеченные набором параметров ξ_i , которые можно рассматривать как начальные положения $\vec{\xi} = \vec{x}(t)|_{t=0}$, и временем t . Эти начальные положения $\vec{\xi}$, так же как и координаты $\vec{x}(\xi_i, t)$, принадлежат некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Ниже мы будем рассматривать только консервативные системы, в которых траектории различных частиц не пересекаются, поэтому ясно, что функции $\vec{x}(\xi_i, t)$ определяют диффеоморфизм области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ и что функции, обратные $\vec{\xi}(x_i, t)$, также должны существовать:

$$\begin{aligned} x_j(\xi_i, t)|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}(x_i, t)} &= x_j, \\ \xi_j(x_i, t)|_{\vec{x}=\vec{x}(\xi_i, t)} &= \xi_j. \end{aligned} \quad (1)$$

Плотность частиц в пространстве в момент времени t есть

$$\rho(\vec{x}, t) = \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)), \quad (2)$$

где $\rho_0(\xi)$ – начальная плотность в момент времени $t = 0$. Поле скорости $\vec{v}$ как функция от координат $\vec{x}$ и t есть

$$\vec{v}(x_i, t) = \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}(x_i, t), t), \quad (3)$$

где $\vec{\xi}(x, t)$ – обратная функция (1). Скорость может быть также записана в следующем виде:

$$\vec{v}(x_i, t) = \frac{\int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t))}{\int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t))}, \quad (4)$$

или

$$\rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) = \int d^3 \xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)). \quad (5)$$

Вычислим производную по времени от плотности, используя определение последней в виде (2):

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x_i, t) &= \int d^3 \xi \rho_0(\xi_i) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) = \\ &= \int d^3 \xi \rho_0(\xi_i) (-\dot{\vec{x}}(\xi_i, t)) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \int d^3 \xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом мы убеждаемся в справедливости уравнения непрерывности для гидродинамики:

$$\dot{\rho}(x_i, t) + \vec{\partial}(\rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t)) = 0. \quad (7)$$

Используя координаты $\vec{x}(\xi_i, t)$ как переменные в конфигурационном пространстве, можно рассмотреть простейшее движение жидкости, описываемое лагранжианом

$$L = \int d^3 \xi \frac{m \dot{\vec{x}}^2(\xi_i, t)}{2}. \quad (8)$$

Вытекающие из (8) уравнения движения, очевидно, имеют вид

$$m \ddot{\vec{x}}(\xi_i, t) = 0. \quad (9)$$

Установим теперь, что это уравнение означает для плотности и скорости жидкости. Для этого продифференцируем обе части выражения (5) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) &= \int d^3 \xi \rho_0(\xi_i) \ddot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) + \\ &+ \int d^3 \xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Первый член в правой части этого равенства обращается в нуль в силу уравнений движения (9), и, преобразуя второй член так, как это было сделано в (6), мы приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) v_k(x_i, t)) = 0. \quad (11)$$

Перепишем его в следующем виде:

$$\vec{v}(x_i, t) \left[\dot{\rho}(x_i, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho(x_i, t) v_k(x_i, t)) \right] + \rho(x_i, t) \left[\dot{\vec{v}}(x_i, t) + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i, t) \right] = 0. \quad (12)$$

Первый член здесь обращается в нуль в силу уравнения непрерывности, тогда как второй дает уравнение Эйлера в случае свободного потока:

$$\dot{\vec{v}}(x_i, t) + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i, t) = 0. \quad (13)$$

Чтобы двигаться дальше, нам необходимо ввести в лагранжиан (8) отвечающий “потенциальной энергии” член, который приведет к появлению поля внутреннего давления в уравнении Эйлера. Как было отмечено выше, функции $\vec{x}(\xi_i, t)$ определяют диффеоморфизм в $\mathbb{R}^3$, поэтому матрица Якоби

$$A_k^j(\xi_i, t) = \frac{\partial x_j(\xi_i, t)}{\partial \xi_k} \quad (14)$$

является невырожденной для любых ξ_i и t . Интеграл (2) может быть выражен через детерминант матрицы Якоби $A_k^j(\xi_i, t)$:

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0(\xi_i)}{\det A(\xi_i, t)} g \Big|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}(x_i, t)}. \quad (15)$$

Предположим для простоты, что начальная плотность $\rho_0(\xi_i)$ постоянна в области $D \subseteq \mathbb{R}^3$, и эффективно нормируем поле плотности $\rho(\xi_i, t)$, положив $\rho_0(\xi_i) = 1$ (одна частица в элементарном объеме). Тогда равенство (15) принимает вид

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{\det A(\xi_i, t)} \Big|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}(x_i, t)}. \quad (16)$$

Рассмотрим в качестве “потенциальной энергии” функционал от якобиана $\det A$:

$$L = \int d^3 \xi \left[\frac{m \dot{\vec{x}}^2(\xi_i, t)}{2} - f(\det A(\xi_i, t)) \right]. \quad (17)$$

Теперь уравнения движения принимают вид

$$m \ddot{x}_j(\xi_i, t) - \frac{\partial}{\partial \xi_k} ((A^{-1})_j^k(\xi_i, t) f'(\det A) \det A) = 0. \quad (18)$$

Подставляя $\ddot{x}_j(\xi_i, t)$ из (18) в уравнение (10) и действуя так же, как при выводе уравнения (13), получаем

$$m \rho(x_i, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_j(x_i, t) - \frac{\partial}{\partial x_j} (f'(\det A(\xi_i, t)) \Big|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}(x_i, t)}) = 0. \quad (19)$$

Теперь очевидно, что если отождествить $-(1/m) f'(\det A(\xi_i, t)) \Big|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}(x_i, t)}$ с давлением $p(x_i, t)$, то уравнение (19) примет вид обычного уравнения Эйлера в отсутствие вязкости:

$$\rho(x_i, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_j(x_i, t) = - \frac{\partial}{\partial x_j} p(x_i, t). \quad (20)$$

Отметим, что появившееся здесь давление $p(x_i, t)$ связано не с наличием внешней силы, а является результатом взаимодействия между частицами. Дальнейшее усложнение лагранжиана в настоящий момент не является необходимым. Одно замечание, тем не менее, должно быть сделано. Никакое изменение лагранжиана не позволит нам получить уравнение Навье–Стокса, поскольку последнее учитывает эффекты диссипации, которые не симметричны по времени.

3. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Гамильтонов формализм классической механики наряду с другими преимуществами дает нам уникальный способ построения квантовой теории. В этом отношении гидродинамика стоит в стороне, поскольку ее основные переменные – локальные скорость, плотность и термодинамическая функция – не допускают непосредственной гамильтоновой интерпретации, несмотря на то что довольно часто в учебниках можно встретить термины типа “плотность импульса” (см., например, [1]).

Мы введем канонические переменные, соответствующие лагранжиану (17), таким образом, каноническими координатами у нас будут функции $\vec{x}(\xi_i, t)$. Сопряженные к ним импульсы определяются как производные от лагранжиана по скоростям $\dot{\vec{x}}(\xi_i, t)$:

$$\vec{p}(\xi_i, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{x}}(\xi_i, t)} = m \dot{\vec{x}}(\xi_i, t). \quad (21)$$

Гамильтониан дается преобразованием Лежандра от лагранжиана:

$$H = \int d^3 \xi \left(\frac{1}{2m} \vec{p}^2(\xi_i, t) + f(\det A(\xi_i, t)) \right). \quad (22)$$

Канонические скобки Пуассона определены следующим образом:

$$\{p_j(\xi_i), x_k(\xi'_i)\} = \delta_{jk} \delta^3(\xi_i - \xi'_i). \quad (23)$$

Очевидно, скобки Пуассона (23) и гамильтониан (22) определяют уравнения движения в канонических переменных, эквивалентные уравнениям Лагранжа. Фазовое пространство Γ жидкости образовано переменными $\vec{x}(\xi_i, t)$, $\vec{p}(\xi_i, t)$. В настоящий момент у нас отсутствует пространственная интерпретация переменных $\vec{x}(\xi_i)$ и $\vec{p}(\xi_i)$. Чтобы получить такую интерпретацию, введем новый объект, используя то же усреднение, что было использовано в предыдущем разделе:

$$\vec{l}(x) = \int d^3 \xi \vec{p}(\xi_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i)) = \rho(x) \vec{p}(\xi_i(x)). \quad (24)$$

Этот новый объект будет играть роль части координат в фазовом пространстве Γ , следовательно, нам нужно вычислить его скобки Пуассона, используя (23). Результат имеет следующий вид:

$$\{l_j(x_i), l_k(y_i)\} = \left[l_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_j} + l_j(y_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (25)$$

Такие скобки Пуассона были давно введены из геометрических соображений без физического обоснования в работах [4] как “скобки гидродинамического типа”. Настоящее обсуждение обнаруживает происхождение этих скобок. Коммутационное соотношение (25) совпадает с алгеброй трехмерных диффеоморфизмов, где $l_j(x_i)$ служит в

качестве генераторов. Другими словами, с помощью этих генераторов можно реализовать конечный диффеоморфизм $x_j \rightarrow \phi_j(x_i)$ любой x -зависимой динамической переменной. Следует отметить, что порождаемая генераторами $l_j(x_i)$ группа диффеоморфизмов в случае гидродинамики не является калибровочно-симметричной, каковой она является, например, в случае релятивистской струны или мембраны. В то же время в гидродинамике существует бесконечномерная симметрия по отношению к специальным (т.е. сохраняющим объем) диффеоморфизмам SDiff , которые будут рассмотрены в следующем разделе.

Как было упомянуто выше, величины $l_j(x_i)$ являются только частью x -зависимых координат в фазовом пространстве Γ ; они могут рассматриваться как “ x -зависимые импульсы”. Теперь мы должны определить “ x -зависимые координаты”. На эту роль можно выбрать, например, функции $\xi_j(x_i)$, которые являются обратными к функциям $x_j(\xi_i)$ (1). Дифференцируя первое из равенств (1) по x , получаем

$$A_k^j(\xi_i(x_k)) \frac{\partial \xi_k(x_i)}{\partial x_l} = \delta_l^j, \quad (26)$$

другими словами, матрица

$$a_l^k(x_i) = \frac{\partial \xi_k(x_i)}{\partial x_l} \quad (27)$$

является обратной к матрице $A_k^j(\xi_i(x_k))$. Поэтому из (16) следует, что

$$\rho(x_i) = \det a(x_i). \quad (28)$$

Чтобы упростить вычисление скобок Пуассона, можно выразить $\xi_j(x_i)$ следующим образом:

$$\xi_j(x_i) = \frac{\int d^3\xi \xi_j \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t))}{\int d^3\xi \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t))}. \quad (29)$$

Отсюда легко получаем

$$\{\xi_j(x_i), \xi_k(y_i)\} = 0. \quad (30)$$

Вычисление скобок Пуассона между величинами $\xi_j(x_i)$ и $l_j(x_i)$ более сложно, но результат прост:

$$\{l_j(x_i), \xi_k(y_i)\} = -\frac{\partial \xi_k(x_i)}{\partial x_j} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (31)$$

Таким способом мы построили набор x -зависимых координат $(l_j(x_i), \xi_j(x_i))$ в фазовом пространстве Γ , однако преобразование

$$(p_j(\xi_i), x_j(\xi_i)) \rightarrow (l_j(x_i), \xi_j(x_i)) \quad (32)$$

не является каноническим. Набор канонических x -зависимых координат в фазовом пространстве Γ может быть получен следующим образом. Умножим обе части равенства (31) на матрицу $A_m^j(\xi_i(x_k))$:

$$A_m^j(\xi_i(x_k)) \{l_j(x_i), \xi_k(y_i)\} = -\delta_m^k \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (33)$$

где использовано равенство (26). Далее, в соответствии с соотношением (30) можно внести $A_m^j(\xi_i(x_k))$ внутрь скобок и получить

$$\{\pi_m(x_i), \xi_k(y_i)\} = \delta_m^k \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (34)$$

где

$$\pi_m(x_i) = -A_m^j(\xi_i(x_k)) l_j(x_i). \quad (35)$$

Прямым вычислением получим также

$$\{\pi_m(x_i), \pi_k(y_i)\} = 0, \quad (36)$$

так что набор $(\pi_m(x_i), \xi_k(y_i))$ образован каноническими переменными. В терминах этих канонических переменных генераторы группы диффеоморфизмов $l_j(x_i)$ имеют следующий вид:

$$l_j(x_i) = -\frac{\partial \xi_k(x_i)}{\partial x_j} \pi_k(x_i). \quad (37)$$

Для рассматриваемого лагранжиана из (21) и (24) следует, что генераторы $l_j(x_i)$ даются формулой

$$l_j(x_i) = m \rho(x_i) v_j(x_i), \quad (38)$$

и представление (37) очень похоже на параметризацию Клебша [5] для скорости. Отличие (37) от первоначальной параметризации Клебша состоит в появлении трех “потенциалов” вместо двух для трехмерной жидкости. Причина такого различия будет обсуждаться в конце настоящего раздела.

Приведенное выше построение канонических x -зависимых переменных является наиболее простым. В некоторых задачах может оказаться полезным другой набор канонических переменных. Построим этот набор координат, обозначаемых $\zeta_j(x_i)$:

$$\zeta_j(x_i) = \int d^3 \xi \xi_j \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)). \quad (39)$$

Вычисляя скобки Пуассона величин $\zeta_j(x_i)$ и $l_j(x_i)$, получаем

$$\{l_j(x_i), \zeta_k(y_i)\} = \zeta_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (40)$$

Отсюда заключаем, что величины $l_j(x_i)$ должны иметь следующее представление:

$$l_j(x_i) = \zeta_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_k(x_i), \quad (41)$$

где $\eta_k(x_i)$ – переменная, канонически сопряженная с $\zeta_j(x_i)$:

$$\{\eta_j(x_i), \zeta_k(y_i)\} = \delta_{jk} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (42)$$

Канонический гамильтониан (22) должен быть выражен теперь через новые переменные $(\pi_m(x_i), \xi_k(y_i))$. Действительно, введем единицу

$$1 = \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i)) \quad (43)$$

в подынтегральное выражение в (22) и изменим порядок интегрирования:

$$H = \int d^3x \int d^3\xi \left(\frac{1}{2m} \vec{p}^2(\xi_i, t) + f(\det A(\xi_i)) \right) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i)). \quad (44)$$

Выполняя интегрирование по ξ с помощью (2) и (24), получаем

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2m\rho(x_i)} \vec{l}^2(x_i) + \rho(x_i) f\left(\frac{1}{\rho(x_i)}\right) \right). \quad (45)$$

Воспользовавшись равенством (37), можно выразить гамильтониан H через канонические переменные $(\pi_m(x_i), \xi_k(y_i))$:

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2m\rho(x_i)} \frac{\partial \xi_k(x_i)}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_m(x_i)}{\partial x_j} \pi_k(x_i) \pi_m(x_i) + V(\rho(x_i)) \right), \quad (46)$$

где введено обозначение $V(\rho(x_i))$ для “потенциальной” части энергии. Этот член представляет внутреннюю энергию жидкости и должен обращаться в нуль (с точностью до несущественной константы) для однородного распределения плотности $\rho(x_i) = \rho_0$. Феноменологическое выражение для $V(\rho(x_i))$ может быть записано следующим образом [6]:

$$V(\rho(x_i)) = \frac{\kappa}{2\rho_0} (\delta\rho(x_i))^2 + \lambda (\nabla\rho(x_i))^2 + \dots, \quad (47)$$

где $\delta\rho(x_i)$ – отклонение плотности от однородного распределения:

$$\delta\rho(x_i) = \rho(x_i) - \rho_0. \quad (48)$$

Первый член в выражении (47) отвечает за звуковые волны в жидкости (κ – скорость звука), а второй член описывает дисперсию звуковых волн.

Для того чтобы обнаружить связь порождаемого (46) гамильтонова потока с геодезическим потоком [7], введем метрический тензор

$$g_{jk}(x_i) = A_j^m(\xi_i(x_k)) A_k^m(\xi_i(x_k)). \quad (49)$$

В этих обозначениях гамильтониан (46) принимает вид

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2m} \sqrt{g(x_i)} g^{km}(x_i) \pi_k(x_i) \pi_m(x_i) + V\left(\frac{1}{\sqrt{g(x_i)}}\right) \right). \quad (50)$$

Метрический тензор с верхними индексами $g^{jk}(x_i)$ обозначает, как обычно, обратную матрицу, и

$$g(x_i) = \det g_{jk}(x_i) = \frac{1}{\rho^2(x_i)}. \quad (51)$$

Представление (50) дает возможность рассматривать гидродинамику как геодезический поток на динамическом многообразии с метрикой $g_{jk}(x_i)$, и это обстоятельство дает возможность вывести многие общие свойства динамики жидкости (см., например, [7]).

Завершим данный раздел одним важным замечанием относительно нашего описания гидродинамики. В рамках настоящего рассмотрения фазовое пространство трехмерной жидкости является шестимерным, что естественно вытекает из принятого нами подхода. Это можно сравнить с недавней работой [8], где (в наших обозначениях) только $\rho(x_i)$ и $v_j(x_i)$ рассматриваются как координаты в фазовом пространстве. Такая точка зрения представлена также в различных учебниках и статьях (см., например, [7], [6], [9]).

Согласно обычной точке зрения состояние жидкости определяется ее скоростью и плотностью, поэтому все остальные переменные, подобные нашим $\vec{x}(\xi_i)$, не нужны. Действительно, решая уравнения движения Эйлера, можно выразить скорость $\vec{v}(x_i, t)$ и плотность $\rho(x_i, t)$ в момент времени t через начальные данные $\vec{v}(x_i, t)|_{t=0}$ и $\rho(x_i, t)|_{t=0}$. Далее, из определения (3) величины $\vec{v}(x_i, t)$ следует

$$\vec{v}(x(\xi, t), t) = \dot{\vec{x}}(\xi, t) \quad (52)$$

(здесь мы для краткости опустили индексы при аргументах). Очевидно, можно решить эти уравнения относительно $\vec{x}(\xi, t)$, если известны начальные данные $\vec{x}(\xi, t)|_{t=0}$. Поэтому может показаться, что переменные $\vec{x}(\xi, t)$ являются лишними, так как они могут быть получены из других переменных. Однако начальные данные $\vec{x}(\xi, t)|_{t=0}$ суть половина канонических переменных гамильтонова формализма. Таким образом, при используемом подходе нам необходимо больше переменных. Эти дополнительные переменные обеспечивают *полное описание* жидкости в том смысле, что, решая уравнения движения, мы определяем не только величины $\vec{v}(x_i, t)$ и $\rho(x_i, t)$, но и траектории частиц, которые не могут быть получены в рамках традиционного формализма. Эта ситуация аналогична вращению твердого тела: здесь фазовое пространство образовано тремя углами и тремя компонентами момента импульса J_i . Поскольку гамильтониан зависит только от компонент J_i , эволюция момента импульса может рассматриваться отдельно. Такое описание для этой механической системы является неполным. Полное описание непременно должно включать эволюцию углов, которые определяют положение твердого тела в пространстве.

В случае динамики жидкости *полное описание* должно производиться в шестимерном фазовом пространстве Γ , которое образовано переменными $\vec{x}(\xi)$ и $\vec{p}(\xi)$ (или $\vec{\xi}(x)$ и $\vec{l}(x)$). Если, как это обычно бывает, гамильтониан зависит только от величин $\vec{l}(x)$ и $\rho(x)$, возможно неполное описание в терминах скоростей и плотностей, рассматриваемых как “существенные” переменные. Это означает, что мы не интересуемся эволюцией тех координат в фазовом пространстве, которые рассматриваются как несущественные. “Существенные” координаты не обязательно образуют симплектическое подпространство

в Γ . Невырожденные в Γ скобки Пуассона могут стать вырожденными на подпространстве Γ , соответствующем “существенным” переменным. Такое положение в самом деле имеет место в случаях твердого тела и в традиционной гидродинамике. В первом случае вырожденность алгебры скобок Пуассона для “существенных” переменных (момента импульса) хорошо известна. Ее центральный элемент – оператор Казимира группы вращений. В случае гидродинамики алгебра “существенных” переменных (скоростей и плотностей) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\{v_j(x_i), v_k(y_i)\} &= -\frac{1}{\rho(x)} (\nabla_j v_k(x_i) - \nabla_k v_j(x_i)) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{v_j(x_i), \rho(y_i)\} &= \nabla_j \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\rho(x_i), \rho(y_i)\} &= 0.\end{aligned}\tag{53}$$

Данная алгебра может быть получена из равенств (25), (30) и (31). Центр этой алгебры является бесконечномерным, и его структура зависит от размерности x -пространства. В двумерном случае центр образован элементами

$$I_k = \int dx dy \left(\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} \right)^k \rho^{1-k}(x, y)\tag{54}$$

(подробное обсуждение см. в [7], [8]). В трехмерном случае общий ответ авторам не известен, и его получение выходит за рамки настоящей работы. В качестве примера мы упомянем, что инвариант Хопфа

$$Q = \int d^3x \epsilon_{jkl} v_j(\vec{x}) \nabla_k v_l(\vec{x})\tag{55}$$

принадлежит этому центру.

4. БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ СИММЕТРИЯ И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Как упоминалось выше, лагранжиан (17) обладает инвариантностью относительно “сохраняющей объем” группы диффеоморфизмов $\text{SDiff}[D]$, где $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Действительно, запишем лагранжиан (17) через плотность лагранжиана:

$$L = \int d^3\xi \mathcal{L}(\xi_i),\tag{56}$$

и рассмотрим преобразования координат $\xi_i \in D$ из $\text{SDiff}[D]$

$$\xi_j \rightarrow \xi'_j = \phi_j(\xi_i),\tag{57}$$

$$\det \frac{\partial \phi_j(\xi_i)}{\partial \xi_k} = 1.\tag{58}$$

Вследствие (58), очевидно, имеем

$$L = \int d^3 \phi(\xi_i) \mathcal{L}(\phi(\xi_i)) = \int d^3 \xi \mathcal{L}(\phi(\xi_i)), \quad (59)$$

и согласно теореме Нётер эта инвариантность приводит к существованию бесконечного множества интегралов движения. Чтобы получить эти интегралы, необходимо прежде всего найти параметризацию преобразований (57), (58) в окрестности тождественного преобразования

$$\phi_j(\xi_i) = \xi_j + \alpha_j(\xi_i). \quad (60)$$

Из условия (58) вытекает уравнение для $\alpha_j(\xi_i)$:

$$\frac{\partial \alpha_j(\xi_i)}{\partial \xi_j} = 0. \quad (61)$$

Далее необходимо явно учесть, что сохраняющий объем диффеоморфизм (57) оставляет границу области D инвариантной. Мы ограничимся тем случаем, когда область D получена в результате исключения из пространства $\mathbb{R}^3$ области с дифференцируемой границей, заданной условием

$$g(\xi_i) = 0. \quad (62)$$

Физически это означает, что мы помещаем в жидкость фиксированное тело, форма которого задается формулой (62). В этом случае условие того, что инфинитезимальный диффеоморфизм (60) сохраняет область D , есть

$$g(\xi_j + \alpha_j(\xi_i)) \big|_{g(\xi_i)=0} = 0, \quad (63)$$

или

$$\alpha_j(\xi_i) \nabla_j g(\xi_i) \big|_{g(\xi_i)=0} = 0. \quad (64)$$

Геометрически уравнение (64) означает, что вектор $\vec{\alpha}(\xi_i)$ является касательным к определяемой формулой (62) поверхности, поскольку вектор $\nabla_j g(\xi_i) \big|_{g(\xi_i)=0}$ пропорционален нормали $n_j(\xi_i)$ к поверхности (62) в точке ξ_i .

Из теоремы Нётер получаем, что из инвариантности лагранжиана относительно преобразования (60) вытекает следующий закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D d^3 \xi p_m(\xi_i) \frac{\partial x_m(\xi_i)}{\partial \xi_l} \alpha_l(\xi_i) = 0, \quad (65)$$

где $\alpha_l(\xi_i)$ удовлетворяет условиям (61) и (64). Наличие этих условий препятствует взятию вариации от левой части (65) по $\alpha_l(\xi_i)$ и получению интегралов движения в локальной форме. Для этого необходимо получить из условий (61) и (64) интегральные свойства $\alpha_l(\xi_i)$.

Рассмотрим произвольную однозначную дифференцируемую в области D функцию $\beta(\xi_i)$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$0 = \int_D d^3 \xi \beta(\xi_i) \frac{\partial \alpha_j(\xi_i)}{\partial \xi_j} = \int_D d^3 \xi \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\beta(\xi_i) \alpha_j(\xi_i)) - \int_D d^3 \xi \alpha_j(\xi_i) \frac{\partial \beta(\xi_i)}{\partial \xi_j}. \quad (66)$$

Первое равенство справедливо вследствие условия (61). Используя теорему Стокса, можно преобразовать интеграл от полной производной в последнем равенстве (66):

$$\int_D d^3 \xi \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\beta(\xi_i) \alpha_j(\xi_i)) = \int_{\partial D} dS_j (\beta(\xi_i) \alpha_j(\xi_i)) = 0, \quad (67)$$

где ∂D обозначает границу D . Последний интеграл в (67) обращается в нуль в силу условия (64), поскольку дифференциал dS_j пропорционален вектору нормали к поверхности ∂D , определенной формулой (62). Из равенств (66) и (67) мы заключаем, что

$$\int_D d^3 \xi \alpha_j(\xi_i) \frac{\partial \beta(\xi_i)}{\partial \xi_j} = 0 \quad (68)$$

для любой гладкой дифференцируемой функции $\beta(\xi_i)$. Учитывая данное свойство $\alpha_j(\xi_i)$, из законов сохранения (65) получаем, что величины

$$J_k(\xi_i) = p_m(\xi_i) \frac{\partial x_m(\xi_i)}{\partial \xi_k} \quad (69)$$

сохраняются по модулю некоторого члена, который является градиентом от скаляра. В частности, это означает, что величины

$$R_j(\xi_i) = \epsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial \xi_k} J_l(\xi_i) = \epsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(p_m(\xi_i) \frac{\partial x_m(\xi_i)}{\partial \xi_l} \right) \quad (70)$$

являются интегралами движения. Заметим, что, поскольку группа инвариантности является бесконечномерной, мы получили бесконечное число интегралов движения. По отношению к скобкам Пуассона (23) величины $R_j(\xi_i)$ образуют алгебру. Эта алгебра может быть выписана в компактном виде для интегральных объектов

$$R[\phi] = \int d^3 \xi \phi_j(\xi_i) R_j(\xi_i), \quad (71)$$

где $\phi_j(\xi_i)$ – гладкие быстроубывающие функции. Индуцированная скобками Пуассона (23) алгебра $R[\phi]$ имеет вид

$$\{R[\phi], R[\psi]\} = R[\text{curl } \phi \times \text{curl } \psi]. \quad (72)$$

Построение x -зависимого объекта, соответствующего $R_j(\xi_i)$, представляет собой непростую задачу, поскольку наше “усреднение” с $\delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i))$ приведет к появлению временной зависимости, и вместо сохраняющегося объекта мы получим некоторую плотность, производная по времени которой дает дивергенцию “тока”. Поэтому необходимо ввести усреднение другого рода без явного обращения к координатам $\vec{x}(\xi_i)$. С этой

целью напомним, что под действием диффеоморфизма замкнутый контур переходит в замкнутый контур. Рассмотрим такой контур λ и поверхность σ , границей которой он является. Интеграл

$$V = \int_{\sigma} dS_j R_j(\xi_i), \quad (73)$$

в котором вектор dS_j , как обычно, представляет собой элемент площади, умноженный на вектор единичной нормали к поверхности, сохраняется, поскольку сохраняется вектор $R_j(\xi_i)$. Далее, из теоремы Стокса имеем

$$V = \oint_{\lambda} d\xi_j p_m(\xi_i) \frac{\partial x_m(\xi_i)}{\partial \xi_j}. \quad (74)$$

Делая замену переменных в (74), получаем

$$V = \oint_{\Lambda} dx_j \frac{l_j(x_i)}{\rho(x_i)} = \oint_{\Lambda} dx_j v_j(x_i), \quad (75)$$

где Λ – образ контура λ под действием диффеоморфизма $\xi_j \rightarrow x_j(\xi_i)$. Величина (75) очень хорошо известна в гидродинамике как “циркуляция”, и ее сохранение известно как теорема Томсона [10]. Связь сохранения циркуляции с инвариантностью относительно специальных диффеоморфизмов впервые была установлена в явном виде в работе [11], хотя этот результат мог также быть извлечен из общего рассмотрения в приложении 2 книги [7].

Сохранение циркуляции – не единственное следствие (65). Рассмотрим, например, случай двумерного пространства. Здесь вместо сохраняющегося вектора $R_j(\xi_i)$ мы будем иметь сохраняющийся скаляр

$$R(\xi_i) = \epsilon_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi_k} J_l(\xi_i) = \epsilon_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(p_m(\xi_i) \frac{\partial x_m(\xi_i)}{\partial \xi_l} \right). \quad (76)$$

Этот скаляр определяет следующие интегралы движения:

$$I_n = \int_D d^2 \xi R^n(\xi_i) = \int_D d^2 \xi \left(\epsilon_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(p_m(\xi_i) \frac{\partial x_m(\xi_i)}{\partial \xi_l} \right) \right)^n. \quad (77)$$

Делая в (77) замену переменных $\xi_j \rightarrow x_j(x_i)$, что возможно, поскольку $\xi_j(x_i)$ есть диффеоморфизм области D , получаем

$$I_n = \int_D d^2 x \rho(x_i) \left(\epsilon_{kl} A_k^j(\xi(x)) A_l^m(\xi(x)) \frac{\partial p_m(\xi(x))}{\partial x_j} \right)^n, \quad (78)$$

где матрица $A_k^j(\xi)$ определена формулой (14). Интегралы I_n можно представить как

$$I_n = \int_D d^2 x \rho(x_i)^{1-n} \left(\epsilon_{jm} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{l_m(x_i)}{\rho(x_i)} \right)^n, \quad (79)$$

если использовать следующее свойство двумерной матрицы $A_k^j(\xi)$:

$$\epsilon_{kl} A_k^j(\xi(x)) A_l^m(\xi(x)) = \epsilon_{jm} \det A(\xi(x)) = \frac{\epsilon_{jm}}{\rho(x_i)}. \quad (80)$$

Напомним, что в случае лагранжиана (17) мы рассматриваем

$$\frac{l_j(x_i)}{\rho(x_i)} = m v_j(x_i). \quad (81)$$

Поэтому интегралы I_n совпадают с центром (54) алгебры Пуассона (53).

В трехмерном пространстве можно построить аналогичные интегралы движения, интегрируя произведения векторов (70):

$$K_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \int_D d^3 \xi R_{j_1}(\xi_i) R_{j_2}(\xi_i) \dots R_{j_n}(\xi_i). \quad (82)$$

Делая замену переменных $\xi_j \rightarrow \xi_j(x_i)$, как и выше, получим

$$R_j(\xi) \rightarrow R_j(\xi(x)) = \epsilon_{jkl} A_k^m(\xi(x)) A_l^n(\xi(x)) \frac{\partial p_n(\xi(x))}{\partial x_m}. \quad (83)$$

В трехмерном случае матрицы $A_j^m(\xi(x))$ удовлетворяют уравнению

$$\epsilon_{jkl} A_k^m(\xi(x)) A_l^n(\xi(x)) = \epsilon_{mnr} \frac{\partial \xi_j(x)}{\partial x_r} \det A(\xi(x)). \quad (84)$$

Поэтому (83) принимает вид

$$R_j(\xi(x)) = \frac{1}{\rho(x_i)} \epsilon_{mnr} \frac{\partial \xi_j(x)}{\partial x_r} \frac{\partial p_n(\xi(x))}{\partial x_m}. \quad (85)$$

Интегралы K_n в выражении (82) превращаются в

$$K_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \int_D d^3 x \rho(x_i) R_{j_1}(\xi(x)) R_{j_2}(\xi(x)) \dots R_{j_n}(\xi(x)). \quad (86)$$

Очевидно, из-за наличия выражения $\partial \xi_j(x)/\partial x_r$ в (85) в этом случае невозможно выразить (85) только в терминах скорости и плотности, т.е. эйлерово описание не допускает интегралов движения такого рода.

В трехмерном случае существует еще один интеграл, который не существует в любой другой размерности. Напомним, что вектор $J_k(\xi_i)$, заданный формулой (69), сохраняется с точностью до градиента, следовательно, интеграл

$$Q = \int_D d^3 \xi J_k(\xi_i) R_k(\xi_i) \quad (87)$$

сохраняется, поскольку $\vec{R}(\xi_i) = \text{curl } \vec{J}(\xi_i)$. Преобразуя ξ_j -зависимые переменные в x_j -зависимые, получаем инвариант Хопфа

$$Q = \int_D d^3 x \epsilon_{jkl} p_j(\xi(x)) \frac{\partial p_k(\xi(x))}{\partial x_l}. \quad (88)$$

5. ВКЛЮЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. ПЛАЗМА

Будем рассматривать плазму как жидкость, состоящую из двух компонентов, а именно электронов с массой m и электрическим зарядом $-e$ и ионов с массой M и зарядом $+e$. Координаты электронов будем обозначать как $\vec{x}(\xi_i)$, а координаты ионов — как $\vec{X}(\Xi_i)$. Взаимодействие компонентов плазмы с электромагнитным полем $A_\mu(x)$ определяется лагранжианом

$$L = L_0^{\text{el}} + L_0^{\text{ion}} + e \int d^3\xi \left[A_0(\vec{x}(\xi_i, t)) - \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \vec{A}(\vec{x}(\xi_i, t)) \right] - \\ - e \int d^3\Xi \left[A_0(\vec{X}(\Xi_i, t)) - \dot{\vec{X}}(\Xi_i, t) \vec{A}(\vec{X}(\Xi_i, t)) \right] - \frac{1}{4} \int d^3x F^{\mu\nu}(x, t) F_{\mu\nu}(x, t), \quad (89)$$

где L_0^{el} и L_0^{ion} — “свободные” лагранжианы:

$$L_0^{\text{el}} = \int d^3\xi \left[\frac{m \dot{\vec{x}}^2(\xi_i, t)}{2} - f^{\text{el}} \left(\det \frac{\partial x_j(\xi_i, t)}{\partial \xi_k} \right) \right], \\ L_0^{\text{ion}} = \int d^3\Xi \left[\frac{M \dot{\vec{X}}^2(\Xi_i, t)}{2} - f^{\text{ion}} \left(\det \frac{\partial X_j(\Xi_i, t)}{\partial \Xi_k} \right) \right], \quad (90)$$

и $F_{\mu\nu}(x, t)$ обозначает тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(x, t) = \partial_\mu A_\nu(x, t) - \partial_\nu A_\mu(x, t). \quad (91)$$

Преимущество лагранжева описания жидкости (плазмы) очевидно. Использование координат заряженных частиц в качестве основных переменных делает явным взаимодействие с электромагнитным полем.

Лагранжиан (89) обладает $U(1)$ -калибровочной инвариантностью. Мы будем использовать обычный гамильтонов формализм для систем со связями [12]. Канонические переменные суть

$$\vec{x}(\xi_i), \quad \vec{p}(\xi_i) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{x}}(\xi_i)}; \\ \vec{X}(\Xi_i), \quad \vec{P}(\Xi_i) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{X}}(\Xi_i)}; \\ \vec{A}(x_i), \quad \vec{P}_{\text{em}}(x_i) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}(x_i)} = -\vec{E}(x_i); \\ A_0(x_i), \quad P_{\text{em}}^0(x_i) = 0, \quad (92)$$

где $\vec{E}(x_i)$ — напряженность электрического поля,

$$\vec{E}(x_i) = -\nabla A_0(x_i) - \dot{\vec{A}}(x_i). \quad (93)$$

Последнее из выражений (92) является в действительности первичной связью. Преобразование Лежандра лагранжиана (89) дает канонический гамильтониан

$$\begin{aligned}
 H = & \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{P}_{\text{em}}^2(x_i) + \vec{H}^2(x_i)) + A_0(x_i) \nabla \vec{P}_{\text{em}}(x_i) \right] + \\
 & + \int d^3\xi \left[\frac{1}{2m} (\vec{p}(\xi_i) + e\vec{A}(x(\xi_i)))^2 - eA_0(x(\xi_i)) + f^{\text{el}} \left(\det \frac{\partial x_j(\xi_i, t)}{\partial \xi_k} \right) \right] + \\
 & + \int d^3\Xi \left[\frac{1}{2M} (\vec{P}(\Xi_i) - e\vec{A}(X(\Xi_i)))^2 + eA_0(X(\Xi_i)) + f^{\text{ion}} \left(\det \frac{\partial X_j(\Xi_i, t)}{\partial \Xi_k} \right) \right], \quad (94)
 \end{aligned}$$

где $\vec{H}(x_i) = \text{curl } \vec{A}(x_i)$ – напряженность магнитного поля. Условие сохранения первичной связи $P_{\text{em}}(x_i) = 0$ дает вторичную связь (закон Гаусса)

$$\nabla_j (P_{\text{em}}(x_i))_j - e(\rho_{\text{el}}(x_i) - \rho_{\text{ion}}(x_i)) = 0. \quad (95)$$

Теперь к первичной связи $P_{\text{em}}^0(x_i) = 0$ можно добавить калибровочное условие $A_0(x_i) = 0$ и исключить эти переменные из рассмотрения. Вводя x -зависимые функции вместо ξ -зависимых и Ξ -зависимых, как это было сделано в разделе 2, мы получаем гамильтониан плазмы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 H = & \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{P}_{\text{em}}^2(x_i) + \vec{H}^2(x_i)) + \frac{(\vec{l}(x_i) + e\rho_{\text{el}}(x_i)\vec{A}(x_i))^2}{2m\rho_{\text{el}}(x_i)} + \right. \\
 & \left. + \frac{(\vec{L}(x_i) + e\rho_{\text{ion}}(x_i)\vec{A}(x_i))^2}{2m\rho_{\text{ion}}(x_i)} + v_{\text{el}}(\rho_{\text{el}}(x_i)) + v_{\text{ion}}(\rho_{\text{ion}}(x_i)) \right], \quad (96)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \vec{l}(x_i) &= \int d^3\xi \vec{p}(\xi_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i)), \\
 \vec{L}(x_i) &= \int d^3\Xi \vec{P}(\Xi_i) \delta(\vec{x} - \vec{X}(\Xi_i)).
 \end{aligned} \quad (97)$$

Этот гамильтониан калибровочно-инвариантен относительно преобразований, порождаемых связью (95). Далее мы наложим кулоновское калибровочное условие на электромагнитное поле:

$$\nabla_j A_j(x_i) = 0, \quad (98)$$

и, следуя обычной процедуре, исключим продольные составляющие векторов $\vec{A}(x_i)$ и $\vec{P}_{\text{em}}(x_i)$. В результате фиксации калибровки продольная часть $\vec{P}_{\text{em}}(x_i)$ приводит к появлению кулоновского члена в гамильтониане

$$H_{\text{Col}} = -e^2 \int d^3x (\rho_{\text{el}}(x_i) - \rho_{\text{ion}}(x_i)) \left(-\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \right) (\rho_{\text{el}}(y_i) - \rho_{\text{ion}}(y_i)), \quad (99)$$

и в целом гамильтониан принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 H = H_{\text{Col}} + \int d^3x & \left[\frac{1}{2} (\vec{P}_{\text{em}\perp}(x_i) + \vec{H}^2(x_i)) + \right. \\
 & + \frac{(\vec{l}(x_i) + e\rho_{\text{el}}(x_i)\vec{A}_{\perp}(x_i))^2}{2m\rho_{\text{el}}(x_i)} + v_{\text{el}}(\rho_{\text{el}}(x_i)) + \\
 & \left. + \frac{(\vec{L}(x_i) + e\rho_{\text{ion}}(x_i)\vec{A}_{\perp}(x_i))^2}{2m\rho_{\text{ion}}(x_i)} + v_{\text{ion}}(\rho_{\text{ion}}(x_i)) \right], \quad (100)
 \end{aligned}$$

где нижний индекс $\perp$ используется для обозначения поперечных составляющих электромагнитных переменных, для которых скобки Пуассона (Дирака) даются выражением [12]

$$\{P_{\perp j}^{\text{em}}(x), A_{\perp k}(y)\} = \left(\delta_{jk} - \frac{1}{\Delta} \partial_j \partial_k \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (101)$$

Как обычно, кулоновский член (99) содержит бесконечную аддитивную часть, связанную с “самодействием”, которая должна быть вычтена. Известно, что в равновесной плазме кулоновское взаимодействие экранируется облаком и остаточное взаимодействие Дебая является короткодействующим (см., например, [13]). В [14] было установлено, что кулоновский член сводится к локальному функционалу разности плотностей зарядов $\rho_{\text{el}}(x_i) - \rho_{\text{ion}}(x_i)$.

Следуя нашему рассмотрению жидкости в разделе 3, можно ввести канонические координаты $\xi(x_i), \vec{\pi}(x_i)$ для электронного компонента и $\Xi(x_i), \vec{\Pi}(x_i)$ для ионного компонента плазмы:

$$\begin{aligned}
 \{\pi_j(x_i), \xi_k(y_i)\} &= \delta_{jk} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\
 \{P_j(x_i), \Xi_k(y_i)\} &= \delta_{jk} \delta(\vec{x} - \vec{y}),
 \end{aligned} \quad (102)$$

для которых

$$l_j(x_i) = \xi(x_i) \frac{\partial \vec{\pi}(x_i)}{\partial x_j}, \quad L_j(x_i) = \Xi(x_i) \frac{\partial \vec{\Pi}(x_i)}{\partial x_j}. \quad (103)$$

Подставляя (103) в (100), получаем гамильтониан в терминах канонических переменных.

Лагранжиан (89) инвариантен относительно диффеоморфизмов, сохраняющих объем обоих компонентов плазмы в отдельности, так что в данном случае мы имеем два набора законов сохранения – один для электронов, другой для ионов. Применяя описанную в предыдущем разделе процедуру, получаем сохраняющиеся циркуляции

$$V_{\Lambda}^{\text{el}} = \oint_{\Lambda} dx_j \frac{l_j(x_i)}{\rho_{\text{el}}(x_i)}, \quad V_{\Lambda}^{\text{ion}} = \oint_{\Lambda} dx_j \frac{L_j(x_i)}{\rho_{\text{ion}}(x_i)}, \quad (104)$$

где $l_j(x)$ и $L_j(x)$ даются выражениями (103). Подобным способом можно построить аналоги интегралов (86) и (88) для рассматриваемого случая. Заметим, что в случае

плазмы равенство (38) не справедливо из-за наличия электромагнитного поля, вместо него имеют место равенства

$$\begin{aligned}\vec{l}(x) &= \rho_{\text{el}}(x)(m\vec{v}_{\text{el}}(x) - e\vec{A}(x)), \\ \vec{L}(x) &= \rho_{\text{ion}}(x)(M\vec{v}_{\text{ion}}(x) + e\vec{A}(x)),\end{aligned}\tag{105}$$

поэтому выражения (38) не являются циркуляциями скоростей. В то же время, складывая циркуляции V_{Λ}^{el} и V_{Λ}^{ion} , на общем контуре Λ имеем

$$V_{\Lambda} = V_{\Lambda}^{\text{el}} + V_{\Lambda}^{\text{ion}} = \oint_{\Lambda} dx_j (mv_{\text{el}}(x) + Mv_{\text{ion}}(x)),\tag{106}$$

так что линейная комбинация циркуляций электронной и ионной скоростей сохраняется даже при наличии электромагнитного взаимодействия.

Подводя итог, можно сказать, что фазовое пространство плазмы Γ в кулоновской калибровке – это пространство с координатами $\vec{A}_{\perp}(x)$, $\vec{P}_{\perp}^{\text{em}}(x)$; $\vec{\xi}(x_i)$, $\vec{\pi}(x_i)$; $\vec{\Xi}(x_i)$, $\vec{\Pi}(x_i)$ и скобками Пуассона (101) и (102). Эволюция состояния в Γ определяется гамильтонианом (100).

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Гамильтонов подход для идеальной жидкости и плазмы, рассмотренный в настоящей работе, напоминает в некоторых аспектах гамильтонов формализм для классического поля. При таком подходе мы имеем дело с системой с бесконечным числом степеней свободы – “частицами”, которые образуют сплошную среду. Эти частицы взаимодействуют с ближайшими соседями благодаря потенциальной части лагранжиана или гамильтониана подобно амплитудам в обычной теории поля. Отличие от последней, которое мы подчеркивали на протяжении статьи, заключается в том, что составляющие части жидкости изменяют свое положение в пространстве по мере эволюции, и для того чтобы иметь локальное описание жидкости в терминах x -зависимых переменных, нам необходимо проецирование, реализуемое, например, равенством (4). Гидродинамику можно также сравнить с механикой протяженных объектов типа n -бран. Эти объекты также являются n -мерными объектами, вложенными в пространство-время, но их составляющие неразличимы, и вследствие этого общие координатные диффеоморфизмы проявляются как калибровочная инвариантность теории. В случае жидкости предполагается, что ее составляющие различимы, и в результате только специальные диффеоморфизмы сохраняют лагранжиан, давая начало нётеровским интегралам движения.

До сих пор мы рассматривали только классическую механику жидкости и плазмы, однако, как известно, любая классическая гамильтонова система может быть подвергнута процедуре квантования. Здесь под квантованием мы подразумеваем формальную процедуру перехода от классических канонических координат к операторам, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям, унаследованным от скобок Пуассона, и построение представления этих операторов в подходящем пространстве. Разумеется, эта процедура не имеет физического смысла в случае плазмы, но в случае жидкости было бы вполне разумно иметь теорию идеальной квантовой жидкости. Квантовая

жидкость может быть рассмотрена как новое представление квантового поля, в котором собственное значение оператора плотности частиц может быть непрерывной функцией переменной x . Проблема заключается в том, что в случае обычного квантового поля нам известно только фоковское представление [15], для которого оператор плотности частиц в пространстве (или в импульсном пространстве) обладает собственными значениями, являющимися суперпозицией δ -функций; это означает, что средняя плотность равна нулю, и для того чтобы рассмотреть состояния с конечной плотностью, необходимо выйти за рамки фоковского пространства.

Благодарности. Мы выражаем благодарность профессору К. Густафсону и профессору А. Разумову за плодотворные обсуждения. Помощь нашего друга, покойного профессора И. Пригожина, в период работы над этой статьей была очень важна. Работа второго автора была частично поддержана РФФИ (грант № 01-01-00201).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [2] F. Chen. Introduction to Plasma Physics. New York: Plenum Press, 1983.
- [3] J. Marsden, A. Weinstein. Physica D. 1982. V. 4. P. 394; D. D. Holm, B. Kupershmidt, C. D. Levermore. Phys. Lett. A. 1983. V. 98. P. 389; J. Marsden, A. Weinstein. Physica D. 1983. V. 7. P. 305; D. D. Holm, J. E. Marsden, I. Ratiu, A. Weinstein. Phys. Rep. 1985. V. 123. № 1, 2. P. 1.
- [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29; Б. А. Дубровин. Функц. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. № 2. С. 57.
- [5] A. Clebsch. J. Reine Angew. Math. 1859. V. 56. P. 1.
- [6] В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 5. С. 1714.
- [7] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974; V. I. Arnold, B. Khesin. Topological Methods in Hydrodynamics. Berlin: Springer, 1998.
- [8] R. Jackiw. Lectures on fluid mechanics. physics/0010042.
- [9] К. Ланцош. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
- [10] W. Thompson. Mathematical and Physical Papers. V. 4. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1910.
- [11] R. Salmon. Ann. Rev. Fluid Mech. 1998. V. 20. P. 225.
- [12] П. А. М. Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
- [13] Р. Балеску. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978.
- [14] L. D. Faddeev, A. Niemi. Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3416; physics/0003083.
- [15] С. Швеебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963.

Поступила в редакцию 4.III.2004 г.