Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, П. Б. Гольдин, Точные аномальные размерности составных операторов в модели Обухова–Крейчнана, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 3, 455–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 05:37:23

© 2004 г.

Н. В. Антонов*, П. Б. Гольдин†

ТОЧНЫЕ АНОМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛИ ОБУХОВА–КРЕЙЧНАНА

Рассмотрены два стохастических уравнения, описывающие турбулентный перенос пассивного скалярного поля $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ и обобщающие известную модель Обухова–Крейчнана на случай присутствия сжимаемости и крупномасштабной анизотропии. Парная корреляционная функция поля $\theta(x)$ характеризуется в этом случае бесконечным набором аномальных показателей, которые ранее были найдены точно с помощью метода нулевых мод. В квантово-полевой формулировке эти показатели отождествляются с критическими размерностями бесконечного семейства тензорных составных операторов, квадратичных по полю $\theta(x)$, что и позволяет получить для последних точные (вне рамок ε -разложения) значения, а по ним найти соответствующие константы ренормировки. Само отождествление показателей в корреляционной функции с размерностями составных операторов подтверждено прямым расчетом критических размерностей в однопетлевом приближении.

Ключевые слова: модель Обухова–Крейчнана, аномальный скейлинг, пассивный скаляр.

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние годы был достигнут значительный прогресс в понимании явлений перемежаемости и аномального скейлинга в развитой гидродинамической турбулентности. Важную роль в этих исследованиях играла модель Обухова–Крейчнана (ОК), описывающая турбулентный перенос скалярной величины $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ гауссовым полем скорости $\mathbf{v}(x)$, не коррелированным во времени и автомодельным в пространстве: впервые аномальные показатели были вычислены на основе микроскопической теории и в рамках регулярных пертурбативных схем (см. обзорную статью [1]).

Существуют два основных аналитических подхода к проблеме аномального скейлинга в модели ОК: метод нулевых мод и метод квантово-полевой ренормализационной группы (РГ) и операторного разложения. В первом случае нетривиальные аномальные показатели связываются с нулевыми модами (т.е. с собственными функциями с нулевыми собственными значениями) дифференциальных операторов, входящих в замкнутые

* Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: nikolai.antonov@pobox.spbu.ru

† Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

точные уравнения, которым удовлетворяют одновременные корреляционные функции поля $\theta(x)$, если поле скорости $\mathbf{v}(x)$ имеет исчезающе малое время корреляции [1]–[3]. В РГ-подходе аномальный скейлинг возникает как следствие существования в модели составных полей (в квантово-полевой терминологии – составных операторов) с отрицательными размерностями, которые и определяют аномальные показатели [4]–[6].

Два подхода удачно дополняют друг друга. Метод нулевых мод позволяет найти *точно* (т.е. вне рамок какой-либо теории возмущений) аномальные показатели для *парной* корреляционной функции, тогда как метод РГ позволяет построить для аномальных показателей регулярную теорию возмущений, аналогичную известному ε -разложению критических индексов, и выполнить практические вычисления до порядка ε^3 (трехпетлевое приближение). Роль параметра РГ-разложения здесь играет показатель степени в парном корреляторе поля скорости. Точных ответов (без разложения по ε) здесь получить, как правило, не удастся, зато такой подход применим и для всех *высших* корреляционных функций, когда метод нулевых мод оказывается менее эффективным (выполненные на данный момент расчеты ограничиваются первыми порядками по ε [2] и $1/d$ [3], где d – пространственная размерность).

Как правило, модель ОК обсуждается в связи с тем несомненным интересом, который она представляет для теории развитой гидродинамической турбулентности. Статистические законы сохранения в динамике кластеров частиц, иерархия анизотропных вкладов в корреляционных функциях, насыщение аномального скейлинга с ростом порядка корреляционных функций – эти и другие черты модели свойственны, как сейчас считается, и более сложным реальным турбулентным системам [1]. Наличие явных аналитических выражений для аномальных индексов позволяет изучать степень их универсальности и зависимость от анизотропии, сжимаемости, размерности пространства, давления (для векторных моделей) и др. В этом отношении модель ОК можно сравнить с моделью Изинга или сферической моделью Берлина–Каца в теории критических явлений [7].

В данной работе мы хотим обратить внимание на другой аспект проблемы: модель ОК – редкий пример нетривиальной квантово-полевой модели, в которой ряд интересных физических величин может быть найден точно. Мы покажем, что совместное использование метода нулевых мод и РГ дает возможность получить точные (непертурбативные) результаты для критических размерностей целого ряда составных полей (операторов) и соответствующих констант ренормировки.

Мы рассмотрим два стохастических уравнения, которые описывают турбулентный перенос пассивного скалярного поля $\theta(x)$ и обобщают исходную модель ОК на случай присутствия сжимаемости и крупномасштабной анизотропии. Парная корреляционная функция поля $\theta(x)$ характеризуется в этом случае бесконечным набором аномальных показателей, которые ранее были найдены точно с помощью метода нулевых мод в работах [8], [9] (см. также работу [3] для случая несжимаемой жидкости). В квантово-полевой формулировке эти показатели отождествляются с критическими (скейлинговыми) размерностями бесконечного семейства тензорных составных операторов, квадратичных по полю $\theta(x)$, что и позволяет получить для последних точные (без раз-

ложения по ε) значения, а по ним найти аномальные размерности вне неподвижной точки уравнений РГ и соответствующие константы ренормировки. Само отождествление показателей в корреляционной функции с размерностями составных операторов подтверждено прямым расчетом последних методом РГ в однопетлевом приближении (первый порядок по ε).

В связи с этим стоит упомянуть точно решаемую модель Гейзенберга для уравнения спектрального баланса турбулентной энергии [10]: некоторые из формул ренормировки для нее буквально совпадают с их аналогами для реальной турбулентности (точнее, для стохастического уравнения Навье–Стокса), но при этом могут быть получены точно (включая точное выражение для соответствующей β -функции, не сводящееся притом к однопетлевому вкладу) без ссылок на общую теорию ренормировки [11]. Последнее обстоятельство делает эту модель интересной и с методической точки зрения. Впервые на существование подобных моделей было указано в работах [12], где также был приведен и ряд примеров сравнительно простых задач классической физики, обладающих точной РГ-симметрией.

В свое время точно решаемые (или близкие к таковым) модели, такие как модели Ли [13], Тирринга [14] или иерархические модели Вильсона [15], сыграли важную роль в становлении современной квантовой теории поля и разработке ее математического аппарата. Наличие точных результатов в модели ОК позволяет обсуждать природу и характер сходимости рядов теории возмущений и ε -разложений в статистических моделях развитой турбулентности, строить улучшенные варианты ε -разложений в тех случаях, когда точное решение невозможно (см., например, раздел 7 работы [6]), а также должно оказаться полезным для развития и тестирования инстантонных методов применительно к моделям стохастической динамики в целом.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Для случая сжимаемой жидкости существуют два варианта уравнения, описывающего турбулентный перенос. Пассивный перенос полей $\theta(x)$ температуры или концентрации частиц примеси (общее название “tracer”) описывается уравнением

$$\partial_t \theta + (v_i \partial_i) \theta = \nu_0 \partial^2 \theta + f, \quad (1)$$

тогда как уравнение для переноса поля плотности какой-либо сохраняющейся величины (например, плотности примеси) имеет вид

$$\partial_t \theta + \partial_i (v_i \theta) = \nu_0 \partial^2 \theta + f. \quad (2)$$

Здесь $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, ν_0 – коэффициент температуропроводности или диффузии, ∂^2 – лапласиан, а $f \equiv f(x)$ – искусственно вводимый гауссов шум с нулевым средним и парным коррелятором

$$\langle f(x) f(x') \rangle = \delta(t - t') C(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad (3)$$

где функция $C(\mathbf{r})$ заметно изменяется лишь на расстояниях порядка $r \equiv |\mathbf{r}| \sim L$ – интегрального масштаба турбулентности. Вклад случайной силы поддерживает стационарное состояние и, если угодно, вносит крупномасштабную анизотропию. Конкретный вид функции $C(\mathbf{r})$ не существен.

В модели ОК поле $\mathbf{v}(x)$ выбирается гауссово-распределенным, с нулевым средним и коррелятором

$$\langle v_i(x)v_j(x') \rangle = \delta(t - t')K_{ij}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = \int_{k \geq m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} [D_0 P_{ij}(\mathbf{k}) + D'_0 Q_{ij}(\mathbf{k})] k^{-d-\varepsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (5)$$

Здесь $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ и $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ – поперечный и продольный проекторы, соответственно, $k \equiv |\mathbf{k}|$, D_0 и D'_0 – положительные амплитудные множители, d – размерность пространства $\mathbf{x}$. В РГ-подходе показатель $0 < \varepsilon < 2$ играет роль, подобную $\varepsilon = 4 - d$ в теории критического поведения. Параметр m обеспечивает инфракрасную регуляризацию, ее конкретный вид не существен (например, другой возможный выбор – замена $k^2 \rightarrow k^2 + m^2$), но с точки зрения практического вычисления диаграмм резкое обрезание интеграла при $k = m$ наиболее удобно. Соотношения

$$\frac{D_0}{\nu_0} \equiv g_0 \equiv \Lambda^\varepsilon \quad (6)$$

вводят константу связи g_0 и характерный ультрафиолетовый масштаб Λ . Для $D'_0 = 0$ (несжимаемая жидкость) поле скорости становится поперечным ($\partial_i v_i = 0$), а модели (1) и (2) не отличаются.

3. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА И РЕНОРМИРОВКА. УРАВНЕНИЯ РГ

Для определенности будем говорить о модели для поля концентрации (1), изменения для модели плотности (2) очевидны. Стохастическая задача (1), (3), (4) эквивалентна квантово-полевой модели для системы трех полей $\Phi \equiv \{\theta', \theta, \mathbf{v}\}$ с функционалом действия

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \theta' D_\theta \theta' + \theta' [-\partial_t - (v_i \partial_i) + \nu_0 \partial^2] \theta - \frac{1}{2} \mathbf{v} D_v^{-1} \mathbf{v}, \quad (7)$$

где D_θ и D_v – корреляторы случайной силы и скорости, соответственно, и подразумеваются все необходимые интегрирования по аргументам полей $x = (t, \mathbf{x})$ и суммирования по векторным индексам. Первые четыре вклада в функционал (7) представляют действие типа Мартина–Сиджа–Роуза для стохастической задачи (1), (3) при фиксированном $\mathbf{v}$ (см., например, главу 5 монографии [16]), а последний член описывает гауссово усреднение по $\mathbf{v}$. Введение функционала (7) означает, что корреляционные функции исходной стохастической задачи представляются функциональными средними с весом $e^{S(\Phi)}$.

Квантово-полевой модели (7) стандартным образом сопоставляется диаграммная техника Фейнмана с тройной вершиной $-\theta'(v_i \partial_i)\theta \equiv \theta' V_j v_j \theta$ с вершинным множителем (в частотно-импульсном представлении)

$$V_j = -ik_j, \quad (8)$$

где $\mathbf{k}$ – импульсный аргумент поля θ . Для задачи (2) вклад взаимодействия в $S(\Phi)$ заменяется выражением $\theta' \partial_i (v_i \theta)$, а вершинный множитель принимает вид $V_j = ik_j$, где $\mathbf{k}$ – аргумент θ' . Затравочные пропагаторы (линии в диаграммах) в частотно-импульсном $(\omega, \mathbf{k})$ -представлении имеют вид

$$\langle \theta \theta' \rangle_0 = \langle \theta' \theta \rangle_0^* = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1}, \quad \langle \theta \theta \rangle_0 = C(\mathbf{k})(\omega^2 + \nu_0^2 k^4)^{-1}, \quad \langle \theta' \theta' \rangle_0 = 0, \quad (9)$$

где $C(\mathbf{k})$ – фурье-образ функции $C(\mathbf{r})$ из (3). Пропагатор $\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle_0 \equiv \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle$ дается выражениями (4) и (5).

Ренормировка модели (7) сравнительно проста [4]–[6]. Ультрафиолетовые расходимости (полюсы по ε) имеются лишь в единственной однопетлевой диаграмме 1-неприводимой корреляционной функции $\langle \theta' \theta \rangle_{1\text{-ir}}$, а также в диаграммах, содержащих ее в качестве подграфа, и полностью устраняются мультипликативной ренормировкой параметров (ренормировка полей Φ и массы m не требуется)

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_\nu^{-1} \quad (10)$$

с единственной независимой константой ренормировки Z_ν , одинаковой для задач (1) и (2) и притом известной точно:

$$Z_\nu = 1 - g C_d \frac{d-1+\alpha}{2d\varepsilon}, \quad C_d \equiv \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad \alpha \equiv \frac{D'_0}{D_0} \quad (11)$$

(без поправок порядка g^2 и старше). Здесь g и ν – ренормированные аналоги затравочных параметров g_0 и ν_0 , ренормировочная масса μ – дополнительный произвольный параметр ренормированной теории, $S_d \equiv 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве и α – отношение амплитуд при продольном и поперечном вкладах в корреляторе скорости (5). В (11) и далее используется схема минимальных вычитаний, в которой все константы ренормировки имеют вид “1 + только полюсы по ε ”.

Из факта мультипликативной ренормируемости и явных формул (10), (11) стандартным образом получаются дифференциальные уравнения РГ с точно известной β -функцией [5], [8]

$$\beta(g) = g \left[-\varepsilon + \frac{g C_d (d-1+\alpha)}{2d} \right]. \quad (12)$$

Она имеет инфракрасно-устойчивую неподвижную точку ($\beta(g_*) = 0$, $\beta'(g_*) > 0$) с координатой

$$g_* = \frac{2d\varepsilon}{C_d(d-1+\alpha)}. \quad (13)$$

Отсюда вытекает наличие в модели скейлинга (масштабной инвариантности) в инфракрасной области $\Lambda r \gg 1$, причем критические размерности Δ_F основных полей и параметров F находятся точно, например:

$$\Delta_\omega = 2 - \varepsilon, \quad \Delta[\theta^n] = n\Delta_\theta = n \left(-1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (14)$$

без поправок порядка ε^2 и старше.

4. ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ. ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Предметом исследования является поведение корреляционных функций описанных выше стохастических задач (1)–(5) в инерционном интервале масштабов, определяемом неравенствами $\Lambda \gg 1/r \gg m$. Нас будет интересовать одновременная парная корреляционная функция $D(\mathbf{r}) \equiv \langle \theta(t, \mathbf{x}) \theta(t, \mathbf{x}') \rangle$. Используя метод РГ или метод нулевых мод, можно показать, что при $\Lambda r \gg 1$ функция $D(\mathbf{r})$ не зависит от Λ (или, эквивалентно, от ν_0), что с учетом соображений размерности приводит к представлению

$$D(\mathbf{r}) = D_0^{-1} r^{-2\Delta_\theta} f(m\mathbf{r}), \quad (15)$$

где Δ_θ – критическая размерность (14), а скейлинговая функция f зависит также от безразмерных параметров ε , d и $\alpha \equiv D'_0/D_0$.

Для простоты ограничимся случаем одноосной анизотропии, когда в задаче имеется выделенное направление, задаваемое единичным постоянным вектором $\mathbf{n}$, входящим в функцию $C(\mathbf{r})$ из (3) (этого достаточно, чтобы выявить все независимые показатели). В присутствии вектора $\mathbf{n}$ функция f из (15) может быть записана в виде

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(mr) P_l(z), \quad z \equiv \frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{r}, \quad (16)$$

где z – косинус угла между направлениями $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}$, $P_l(z)$ – полиномы Гегенбауэра (d -мерное обобщение полиномов Лежандра) и $f_l = f_l(mr)$ – коэффициентные функции. В инерционном интервале (т.е. при $mr \ll 1$) они принимают степенной вид

$$f_l \propto (mr)^{\xi_l}. \quad (17)$$

В рамках метода нулевых мод показатели ξ_l были найдены точно в работах [8], [9] для обеих задач (1) и (2) при произвольных ε , d и α ; для случая несжимаемой жидкости ($\alpha = 0$) они были получены ранее в работе [3].

Наша задача сейчас – обосновать асимптотику (17) и дать способ вычисления показателей ξ_l на основе РГ-подхода. Вид скейлинговой функции $f(m\mathbf{r})$ в представлении (15) не определяется самим уравнением РГ, и для нахождения ее асимптотики при $mr \ll 1$ можно воспользоваться операторным разложением, которое является одним из автоматических следствий ренормируемости квантово-полевой модели (7). Для одновременного произведения двух полей $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ операторное разложение имеет вид

$$\theta(t, \mathbf{x}_1) \theta(t, \mathbf{x}_2) = \sum_F C_F(\mathbf{r}) F(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2. \quad (18)$$

Здесь $C_F(\mathbf{r})$ – числовые коэффициентные функции, а суммирование идет по всем ренормированным составным операторам $F(x)$, т.е. ренормированным аналогам мономов, построенных из полей $\Phi \equiv \{\theta', \theta, \mathbf{v}\}$ и их производных конечного порядка в одной и той же

точке $x = (t, \mathbf{x})$. Согласно общему правилу в правой части (18) появляются все те операторы, которые возникают в простом тейлоровском разложении левой части, а также все операторы, примешивающиеся к ним при ренормировке (см., например, п. 3.33 монографии [16]). Фактически это все возможные операторы, совместимые с симметрией модели (7) и объекта в левой части (18).

Коррелятор $D \equiv \langle \theta\theta \rangle$ получается усреднением (18) с весом $e^{S(\Phi)}$, при этом в левой части возникают средние операторов $\langle F \rangle$:

$$D(\mathbf{r}) = \sum_F C_F(\mathbf{r}) \langle F(t, \mathbf{x}) \rangle. \quad (19)$$

Без ограничения общности можно считать, что разложение (18) выполнено по операторам F с определенными критическими размерностями Δ_F (точнее см. ниже). Анализ соответствующих РГ-уравнений показывает, что для таких операторов $\langle F \rangle \propto m^{\Delta_F}$ при $m \rightarrow 0$, что порождает вклады типа $(mr)^{\Delta_F}$ в асимптотике малых $mr \ll 1$ функции f из представления (15). При этом в формуле (19) можно игнорировать операторы с нулевыми средними, в частности, все операторы, имеющие вид полных производных, поскольку в силу трансляционной инвариантности задачи $\langle \partial F(x) \rangle = \partial \langle F(x) \rangle = 0$. Это позволяет также отождествлять операторы, отличающиеся друг от друга лишь вкладами типа производной. Можно также считать, что разложение (18) выполнено по операторам, отвечающим неприводимым представлениям группы $SO(d)$ (скаляры, векторы и бесследовые тензоры старших рангов). В изотропной задаче (в нашем случае это значит, что функция $C(\mathbf{r})$ в выражении (3) зависит только от модуля $r = |\mathbf{r}|$) ненулевыми средними обладают лишь скалярные операторы. При наличии анизотропии (например, при наличии в функции $C(\mathbf{r})$ некоторого единичного вектора $\mathbf{n}$) тензорные операторы приобретают ненулевые средние и могут дать вклад в (19). Например, среднее неприводимого тензора второго ранга будет пропорционально бесследовой конструкции $n_i n_j - \delta_{ij}/d$ и т. д.

Пусть F – некоторый составной оператор, построенный из n полей θ , l производных по $\mathbf{x}$ и q производных по t . Предположим для простоты, что F мультипликативно ренормируем, т.е. соответствующий ультрафиолетово-конечный ренормированный оператор F_R имеет вид $F = Z_F F_R$ с некоторой константой ренормировки Z_F . Тогда F обладает определенной критической размерностью

$$\Delta_F = l + q\Delta_\omega + n\Delta_\theta + \gamma_F^* = l + 2q - n + O(\varepsilon). \quad (20)$$

Здесь $\Delta_{\omega, \theta}$ – размерности (14), $\gamma_F(g) = \beta(g)\partial_g \ln Z_F$ – аномальная размерность оператора F и $\gamma_F^* = \gamma_F(g_*)$ – ее значение в неподвижной точке (13). Главные вклады в асимптотику скейлинговой функции f при $mr \rightarrow 0$ дают, очевидно, операторы с наименьшими Δ_F , что при малых ε отвечает максимально возможному числу полей θ и минимальному числу производных.

Линейность по θ исходных стохастических уравнений (1) и (2) приводит к двум важнейшим следствиям [4], [5]. Во-первых, число полей θ в любом операторе F , входящем в операторное разложение типа (18), не превышает числа полей θ в его левой части. В

частном случае разложения произведения двух полей (18) число полей θ в любом операторе F равно двум (единственное исключение – простейший оператор $F = 1$ с $\Delta_F = 0$). Во-вторых, диаграммы Фейнмана для соответствующих коэффициентов C_F не содержат пропагатора $\langle\theta\theta\rangle_0$ из (9) и, тем самым, зависят лишь от вектора $\mathbf{r}$ даже при наличии дополнительного вектора $\mathbf{n}$ в функции (3), тогда как средние $\langle F \rangle$, напротив, содержат лишь вектор $\mathbf{n}$. Поэтому тензорная свертка коэффициентов C_F со средними $\langle F \rangle$ неизбежно порождает полином Гегенбауэра $P_l(z)$ с зависящим лишь от модуля $r = |\mathbf{r}|$ коэффициентом, где l – ранг оператора F (напомним, что z – косинус угла между направлениями векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}$).

Из всего сказанного вытекает, что ведущий вклад в асимптотику $mr \rightarrow 0$ коэффициента $f_l(mr)$ в $SO(d)$ -разложении (16) скейлинговой функции $f(\mathbf{r})$ порождается оператором вида

$$F_{i_1 \dots i_l}^{(l)}(x) \equiv \text{Irp}[\theta(x) \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \theta(x)], \quad (21)$$

т.е. тензором ранга l , включающим максимально возможное (два) число полей θ и минимально возможное (l) число производных по $\mathbf{x}$ со всеми свободными индексами. Операция Irp отбирает неприводимую часть тензора, например,

$$\text{Irp}[\theta(x) \partial_i \partial_j \theta(x)] = \theta(x) \partial_i \partial_j \theta(x) - \frac{\delta_{ij}}{d} \theta(x) \partial^2 \theta(x), \quad (22)$$

а в общем случае вычитаемые члены обеспечивают исчезновение свертки получаемого неприводимого тензора типа (22) по любой паре его индексов. Другие варианты расстановки производных ∂_i на полях θ можно не рассматривать, поскольку все они сводятся к структурам (21) с точностью до производных, в чем нетрудно убедиться с помощью соотношения $F_1 \partial F_2 = -F_2 \partial F_1 + \partial(F_1 F_2)$. Оно же показывает, что при нечетном l тензоры (21) сами сводятся к полным производным и, тем самым, имеют нулевые средние, так что в разложении (16) присутствуют лишь вклады с четными $l = 0, 2, 4, \dots$.

Анализ показывает, что операторы (21) ренормируются мультипликативно, т.е. $F^{(l)} = Z_l F_R^{(l)}$ с некоторыми константами ренормировки Z_l (с точностью до несущественных вкладов простейшего оператора $F = 1$). При этом важную роль играют три обстоятельства. Во-первых, примешивание операторов с более чем двумя полями θ к операторам $F^{(l)}$ невозможно вследствие линейности уравнений (1) и (2) по θ . Во-вторых, любые диаграммы, отвечающие смешиванию операторов с равным числом полей θ , не содержат пропагатора $\langle\theta\theta\rangle_0$ (это также является следствием линейности), и потому $SO(d)$ -ковариантны (напомним, что анизотропия привносится в задачу только коррелятором (3), входящим в пропагатор $\langle\theta\theta\rangle_0$). Это запрещает смешивание между собой операторов $F^{(l)}$, имеющих различные ранги. В-третьих, наконец, примесь к $F^{(l)}$ операторов ранга l с дополнительными скалярными множителями типа ∂^2 или ∂_t запрещена общей теорией ренормировки: операторы большей канонической размерности не могут примешиваться к младшим.

Все сказанное выше означает, что операторы $F^{(l)}$ обладают определенными критическими размерностями $\Delta_l = l + 2\Delta_\theta + \gamma_l^*$ с $\gamma_l(g) = \beta(g) \partial_g \ln Z_l$, которые и следует отождествить с показателями ξ_l из (17). Тогда для суммарных показателей $\zeta_l =$

$-2\Delta_\theta + \xi_l$, описывающих зависимость от r вклада с $P_l(z)$ в корреляторе (15) (именно они непосредственно определяются методом нулевых мод) получаем $\zeta_l = l + \gamma_l^*$.

Для того чтобы убедиться в справедливости такого отождествления, в следующем разделе мы вычислим в однопетлевом приближении (первый порядок ренормированной теории возмущений по g) константы Z_l для обеих моделей (1) и (2), найдем по ним аномальные размерности γ_l^* в первом порядке по ε и сравним результат с результатом для показателей ζ_l , полученным ранее в работах [8], [9] с помощью метода нулевых мод.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ОПЕРАТОРОВ $F^{(l)}$ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Константы ренормировки Z_l операторов (21) можно найти из условия ультрафиолетовой конечности 1-неприводимых функций Грина

$$\langle F_R^{(l)}(x)\theta(x_1)\theta(x_2) \rangle_{1\text{-ir}} = Z_l^{-1} \langle F^{(l)}(x)\theta(x_1)\theta(x_2) \rangle_{1\text{-ir}} \equiv Z_l^{-1} \Gamma^{(l)}(x; x_1, x_2), \quad (23)$$

т.е. из условия отсутствия в них полюсов по ε в ренормированных переменных. В разложении функции $\Gamma^{(l)} = \Gamma_0^{(l)} + \Gamma_1^{(l)} + \dots$ по константе связи g_0 древесный (беспетлевой) вклад есть просто вершинный множитель оператора (21). В импульсном представлении $\Gamma_0^{(l)} = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_l}$ и вклады с δ -символами, обеспечивающие бесследовость тензора, например, $p_i p_j - \delta_{ij}/d$. Однопетлевой вклад $\Gamma_1^{(l)}$ представляется единственной диаграммой

$$\Gamma_1^{(l)} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}, \quad (24)$$

в которой сплошные линии обозначают затравочный пропагатор $\langle \theta\theta' \rangle_0$ из (9), причем перечеркнутый конец отвечает полю θ' , а конец без перечеркивания – полю θ , штриховая линия – пропагатор (4). Простым точкам (местам пересечения штриховой линии и сплошных) отвечают вершинные множители $V_j = -ik_j$ для модели (1) или $V_j = ik_j$ для (2), где k_j – импульсы полей θ или θ' , соответственно; см. формулу (8) и пояснения к ней. Жирная точка обозначает вершину, порождаемую составным оператором, т.е. вариационную производную $\delta^2 F^{(l)} / \delta\theta\delta\theta$; возникающая при дифференцировании двойка сокращает симметричный коэффициент при диаграмме (24). В импульсном представлении полюсная по ε часть диаграммы пропорциональна древесному вкладу $\Gamma_0^{(l)}$; коэффициент пропорциональности равен, очевидно, коэффициенту при главном мономе $p_{i_1} \dots p_{i_l}$ (мы будем игнорировать множитель i^l , общий для всех членов разложения $\Gamma^{(l)} = \Gamma_0^{(l)} + \Gamma_1^{(l)} + \dots$). В свою очередь, такой вклад в диаграмме полностью порождается вкладом самого же главного монома в вершине: вычитаемые члены в вершине содержат δ -символы, которые остаются в ответе и, тем самым, заведомо не могут породить главный моном $p_{i_1} \dots p_{i_l}$. Таким образом, для нахождения коэффициента достаточно заменить полный вершинный множитель вкладом главного монома, а при вычислении диаграммы игнорировать любые отличные от $p_{i_1} \dots p_{i_l}$ конструкции, например, все вклады с δ -символами по индексам $i_1 \dots i_l$ или со свертками типа $p^2 \equiv p_i p_i$. Это позволяет игнорировать и нелогарифмические расходимости с положительными степенями

параметра ультрафиолетового обрезания, которые неизбежно содержат δ -символы, и вычислять диаграмму сразу со снятым обрезанием.

Мы будем вычислять диаграмму в частотно-импульсном представлении, при всех нулевых внешних частотах и со специальным выбором внешних импульсов. Именно, будем считать, что импульс $\mathbf{p}$ втекает в левую нижнюю вершину и вытекает через правую; импульс, втекающий в вершину составного оператора, равен нулю. Этого достаточно для нахождения интересующего нас коэффициента. Удобно свернуть функцию (23) по всем индексам с некоторым фиксированным вектором $\mathbf{u}$, чтобы иметь дело со скалярной величиной. Тогда древесный вклад примет вид $\Gamma_0^{(l)} = (p_i u_i)^l$. Напомним также, что нас интересуют лишь четные l . Для определенности сначала рассмотрим случай модели (1). В этом случае аналитическое выражение для диаграммы (24) принимает вид

$$\Gamma_1^{(l)} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{D_0 T_{ab}(\mathbf{k})}{k^{d+\varepsilon}} (\mathbf{u}\mathbf{q})^l \frac{1}{|i\omega + \nu_0 q^2|^2} p_a p_b. \quad (25)$$

В подынтегральном выражении первый сомножитель – пропагатор поля скорости с $T_{ab}(\mathbf{k}) = P_{ab}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ab}(\mathbf{k})$, второй – вершинный множитель составного оператора с $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} + \mathbf{k}$, третий – произведение пропагаторов $\langle \theta\theta' \rangle_0$ (они комплексно-сопряженные, поскольку частота ω течет по ним в противоположных направлениях), четвертый – произведение простых вершинных множителей $(-ip_a)(+ip_b)$.

Выполнив простое интегрирование по ω и опустив слагаемое δ_{ab} в тензоре T_{ab} (при свертке с $p_a p_b$ оно порождает несущественный для нас вклад с p^2), приходим к выражению

$$\Gamma_1^{(l)} = \frac{(\alpha - 1)D_0}{2\nu_0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{k})^2 (\mathbf{q}\mathbf{u})^l}{k^{2+d+\varepsilon} q^2}. \quad (26)$$

С точностью до несущественных членов $q^2 = k^2 + 2(\mathbf{p}\mathbf{k})$, так что разложение знаменателя в подынтегральном выражении (26) по $\mathbf{p}$ имеет вид

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{s=0}^{\infty} (-2)^s \frac{(\mathbf{p}\mathbf{k})^s}{k^{2s}}. \quad (27)$$

Подставив разложение (27) в (26) и выполнив сдвиг переменной суммирования $s \rightarrow s+2$, получаем

$$\Gamma_1^{(l)} = \frac{(\alpha - 1)D_0}{2\nu_0} \sum_{s=2}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} (-2)^{s-2} (\mathbf{q}\mathbf{u})^l \frac{(\mathbf{p}\mathbf{k})^s}{k^{2s}} \frac{1}{k^{d+\varepsilon}}. \quad (28)$$

В этом выражении нам нужно отобрать лишь вклад монома $p_{i_1} \dots p_{i_l}$, поэтому верхний предел суммирования по s достаточно ограничить значением $s = l$, а в s -м члене суммы (28) в биномиальном разложении

$$(\mathbf{q}\mathbf{u})^l = (\mathbf{p}\mathbf{u} + \mathbf{k}\mathbf{u})^l = \dots + C_l^s (\mathbf{p}\mathbf{u})^{l-s} (\mathbf{k}\mathbf{u})^s + \dots \quad (29)$$

достаточно взять лишь явно выписанное слагаемое:

$$\Gamma_1^{(l)} = \frac{(\alpha - 1)D_0}{2\nu_0} \sum_{s=2}^l (\mathbf{p}\mathbf{u})^{l-s} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} (-2)^{s-2} C_l^s \frac{(\mathbf{u}\mathbf{k})^s (\mathbf{p}\mathbf{k})^s}{k^{2s}} \frac{1}{k^{d+\varepsilon}}. \quad (30)$$

Входящий в полученное выражение интеграл

$$J_{i_1 i_2 \dots i_{2s}} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^{d+\varepsilon}} \frac{k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_{2s}}}{k^{2s}} \quad (31)$$

не зависит от других векторов, кроме $\mathbf{k}$, и поэтому легко находится из соображений изотропии:

$$J_{i_1 i_2 \dots i_{2s}} = \frac{\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{2s-1} i_{2s}} + \text{перестановки}}{d(d+2) \dots (d+2s-2)} J(m), \quad (32)$$

где

$$J(m) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^{d+\varepsilon}} = \frac{C_d m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (33)$$

с C_d из формулы (11). Числитель выражения (32) содержит сумму всевозможных произведений δ -символов с различными вариантами расположения индексов – всего

$$(2s-1)!! = \frac{(2s)!}{2^s s!}$$

слагаемых, из которых нас интересуют лишь порождающие моном $(\mathbf{p}\mathbf{u})^s$ при свертке с векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{p}$ в выражении (30). Это те произведения, в которых любой из δ -символов по одному индексу сворачивается с вектором $\mathbf{u}$, а по второму – с вектором $\mathbf{p}$. Как нетрудно понять, число таких слагаемых равно $s!$. С учетом этого обстоятельства подстановка выражения (32) в (30) дает

$$\Gamma_1^{(l)} = \frac{(\alpha-1)D_0}{2\nu_0} (\mathbf{p}\mathbf{u})^l J(m) \sum_{s=2}^l \frac{(-2)^{s-2} C_l^s s!}{d(d+2) \dots (d+2s-2)}. \quad (34)$$

Входящая в формулу (34) сумма вычисляется явно:

$$S_l \equiv \sum_{s=2}^l \frac{(-2)^{s-2} l!}{(l-s)!} \frac{1}{d(d+2) \dots (d+2s-2)} = \frac{4l(l-1)}{d(d+2l-2)}. \quad (35)$$

Подставляя выражения (33) для интеграла $J(m)$ и (35) для суммы S_l в формулу (34) и переходя к ренормированным переменным с помощью соотношений $D_0 = g_0 \nu_0 = g \mu^\varepsilon \nu$ и $\nu_0 = \nu$ (первое – точное, второе достаточно для нашего приближения), для функции $\Gamma^{(l)}$ окончательно находим

$$\Gamma^{(l)} = (\mathbf{p}\mathbf{u})^l \left[1 + \frac{(\alpha-1)gC_d}{2\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m} \right)^\varepsilon \frac{l(l-1)}{d(d+2l-2)} + O(g^2) \right]. \quad (36)$$

Отсюда из условия конечности величины $Z_l^{-1} \Gamma^{(l)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ находим константу ренормировки Z_l в схеме минимальных вычитаний:

$$Z_l = 1 + \frac{gC_d}{2\varepsilon} \frac{(\alpha-1)l(l-1)}{d(d+2l-2)} + O(g^2), \quad (37)$$

а для аномальной размерности $\gamma_l(g) = \beta(g)\partial_g \ln Z_l \simeq -\varepsilon g \partial_g \ln Z_l$ получаем

$$\gamma_l(g) = gC_d \frac{(1-\alpha)l(l-1)}{2d(d+2l-2)} + O(g^2). \quad (38)$$

Обратимся теперь к модели (2). Для нее аналог выражения (25) получается простой заменой $p_a p_b \rightarrow q_a q_b$. Как нетрудно проверить, $T_{ab}(\mathbf{k})q_a q_b = T_{ab}(\mathbf{k})p_a p_b + \alpha q^2$ с точностью до несущественного вклада p^2 . Второе слагаемое порождает дополнительный вклад, приводящий к отличию величины $\Gamma_1^{(l)}$ для модели (2) от ее аналога для задачи (1). Этот вклад легко вычисляется: множитель q^2 сокращается с таким же выражением в знаменателе, полученным от интегрирования по частоте, так что добавка к интегралу (26) имеет вид

$$\frac{\alpha D_0}{2\nu_0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} (\mathbf{q}\mathbf{u})^l \frac{1}{k^{d+\varepsilon}}. \quad (39)$$

Вклад главного монома в этом интеграле получается просто заменой $(\mathbf{q}\mathbf{u})^l \rightarrow (\mathbf{p}\mathbf{u})^l$, что сразу сводит его к скалярному интегралу $J(m)$ из (33). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат для аномальной размерности:

$$\gamma_l(g) = gC_d \frac{(1-\alpha)l(l-1)}{2d(d+2l-2)} - \frac{\alpha g C_d}{2} + O(g^2). \quad (40)$$

Подстановка координаты неподвижной точки (13) в выражения (38) и (40) дает

$$\gamma_l^* = -\varepsilon \frac{l(l-1)(\alpha-1)}{(d+2l-2)(d-1+\alpha)} + O(\varepsilon^2) \quad (41)$$

для модели “tracer” и

$$\gamma_l^* = -\varepsilon \frac{l(l-1)(\alpha-1) + \alpha d(d+2l-2)}{(d+2l-2)(d-1+\alpha)} + O(\varepsilon^2) \quad (42)$$

для случая поля плотности. Как легко убедиться, эти выражения согласуются с линейными по ε вкладами в точных показателях ζ_l , полученных с помощью метода нулевых мод (см. формулы (16), (18) в работе [8] или формулы (28), (31) в работе [9]), что и подтверждает отождествление величин ζ_l с $l + \gamma_l^*$.

6. ТОЧНЫЕ АНОМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ $\gamma_l(g)$ И КОНСТАНТЫ РЕНОРМИРОВКИ Z_l

Отождествив показатели ζ_l со значениями аномальных размерностей γ_l составных операторов (21) в неподвижной точке, мы тем самым получили для последних точные значения (вне рамок разложения по ε). Более того, можно получить точные (без разложения по константе связи g) значения для этих размерностей *вне* неподвижной точки. Действительно, в схеме минимальных вычитаний аномальные размерности не зависят от ε (см., например, обсуждение в п. 1.22 монографии [16]), так что зависимость γ_l^* от

ε возникает при подстановке $g \rightarrow g_*$ в $\gamma_l(g)$. Поэтому размерность $\gamma_l(g)$ можно получить, просто выполнив в известной величине γ_l^* обратную подстановку. В нашем случае $\varepsilon \rightarrow gC_d(d-1+\alpha)/(2d)$, см. (13). Далее, интегрируя соотношение $\gamma_l(g) = \beta(g)\partial_g \ln Z_l$ с известной β -функцией (12) и очевидным начальным условием $Z_l(g=0) = 1$, приходим к точному выражению и для самих констант ренормировки:

$$Z_l = \exp \int_0^g dg' \frac{\gamma_l(g')}{\beta(g')}. \quad (43)$$

Получаемые таким образом формулы довольно громоздки (см., например, приведенное в работе [10] точное выражение (46) для константы ренормировки в модели Гейзенберга). В данном случае мы ограничимся лишь простейшим нетривиальным примером, а именно показателем ζ_0 для случая поля плотности, имеющим вид [5], [8], [9]

$$\zeta_0 = \gamma_0^* = \frac{-\varepsilon\alpha(d+\varepsilon)}{(d-1)+\alpha(1+\varepsilon)} \quad (44)$$

и отвечающим скалярному оператору θ^2 (для модели “traser” $\zeta_0 = 0$ и главный нетривиальный показатель $\zeta_0 = 2 - \varepsilon$ связан со скалярным оператором $\theta\partial^2\theta$ [8]). Аномальная размерность вне неподвижной точки имеет вид

$$\gamma_0(g) = -\frac{\alpha g C_d(2d^2 + g C_d(d-1+\alpha))}{2d(2d + \alpha g C_d)}, \quad (45)$$

а для константы ренормировки из (43) и (45) получаем

$$Z_l = \left(1 - g C_d \frac{d-1+\alpha}{2d\varepsilon}\right)^{-\alpha(d+\varepsilon)/(d-1+\alpha(1+\varepsilon))} \times \\ \times \left(1 + \frac{\alpha g C_d}{2d}\right)^{(d-1)(\alpha-1)/(d-1+\alpha(1+\varepsilon))}. \quad (46)$$

Выражение (46) иллюстрирует некоторые общие свойства констант ренормировки: при $g \rightarrow g_*$ константа Z всегда имеет сингулярность вида $Z \propto (1 - g/g_*)^{\gamma^*/\omega}$, где γ^* – соответствующая аномальная размерность и $\omega = \beta'(g_*)$ – наклон β -функции в неподвижной точке, в нашем случае равный просто ε . Далее, можно непосредственно убедиться, что коэффициенты разложения величины (46) по g содержат лишь чистые полюсы по ε , как и должно быть в схеме минимальных вычитаний. Добавим, что знание особенностей точных показателей (44) и (45) в комплексной плоскости параметров ε и g , соответственно, должно оказаться полезным для развития инстантонных методов применительно к стохастическим динамическим моделям в целом. Добавим также, что хотя точные ответы для показателей старших корреляционных функций пока не были получены, результаты существующих численных экспериментов [17] могут рассматриваться как предсказания для критических размерностей старших составных операторов, справедливые и при конечных (не малых) значениях ε .

Благодарности. Авторы выражают благодарность Л. П. Аджемьяну, М. Гнатичу, М. Ю. Налимову, С. В. Новикову и Ю. Р. Хонконену за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Совета Северных стран (грант № FIN-20/2003), программы “Университеты России” и Академии Финляндии (грант № 203122).

Список литературы

- [1] *G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola.* Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 913.
- [2] *D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 2564.
- [3] *M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev.* Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 4924.
- [4] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev.* Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 1823;
Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев. ТМФ. 1999. Т. 120. С. 309.
- [5] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov.* Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 7381.
- [6] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov et al.* Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056306.
- [7] *М. Фишер.* Природа критического состояния. М.: Мир, 1968; *Г. Стенли.* Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973; *Ф. Дайсон, Э. Монтролл, М. Кац, М. Фишер.* Устойчивость и фазовые переходы. М.: Мир, 1973.
- [8] *N. V. Antonov, J. Honkonen.* Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 036302.
- [9] *Н. В. Антонов, Ю. Р. Хонконен.* Вестн. СПб. Сер. Физика, Химия. 2004. № 1 (в печати).
- [10] *W. Heisenberg.* Z. Phys. 1948. V. 124. P. 628.
- [11] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 245.
- [12] *Д. В. Ширков.* ДАН СССР. 1982. Т. 263. С. 64; ТМФ. 1984. Т. 60. С. 218.
- [13] *T. D. Lee.* Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 1329.
- [14] *W. Thirring.* Ann. Phys. 1958. V. 3. P. 91.
- [15] *K. G. Wilson.* Phys. Rev. D. 1970. V. 2. P. 1438.
- [16] *А. Н. Васильев.* Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. С.-П.: Изд-во ПИЯФ, 1998.
- [17] *U. Frisch, A. Mazzino, A. Noullez, M. Vergassola.* Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 2178;
A. Mazzino, P. Muratore Ginanneschi. Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 015302(R).

Поступила в редакцию 30.I.2004 г.