Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, Поправки рода один к многоразрезным решениям матричной модели, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 3, 358–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:26:25

© 2004 г.

Л. О. Чехов*

ПОПРАВКИ РОДА ОДИН К МНОГОРАЗРЕЗНЫМ РЕШЕНИЯМ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ

На основе петлевого уравнения вычисляются поправки рода один к решению эрмитовой одноматричной модели с произвольным числом разрезов. Результат подтверждает ответ, полученный ранее из алгебро-геометрических соображений, и обобщает его на случай произвольных потенциалов.

Ключевые слова: петлевое уравнение, разложение по родам, гиперэллиптическая геометрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования решений матричных моделей с использованием петлевого уравнения имеют более чем десятилетнюю историю. Алгоритм, позволяющий находить решения в разложении по родам для эрмитовой одноматричной модели, был детально разработан (см. [1] и ссылки в этой работе) для больших N (N – размер эрмитовой матрицы) в случае, когда предельное распределение собственных значений сосредоточено на одном интервале вещественной оси. Такая ситуация обычно называется одноразрезным решением. Многоразрезные решения почти не исследовались. Проблема состояла не в том, что сложно было найти решение самого петлевого уравнения, т.е. разложение по родам так называемого петлевого среднего, – эта задача была решена Акеманом [2]. Универсальность критического поведения для соответствующих корреляционных функций была найдена в работе [3]. Сложной оставалась задача интегрирования полученных решений, что позволило бы получить поправки старших родов собственно к свободной энергии. Акеману удалось найти такую поправку рода один только в случае двух разрезов.

В последнее время было обнаружено, что многоразрезные решения матричных моделей оказываются исключительно полезными при исследовании структур, возникающих при нарушении вакуумов в $\mathcal{N} = 2$ ¹⁾ суперсимметричной теории Янга–Миллса по Зай-

¹⁾ Здесь $\mathcal{N}$ – число суперсимметрий, а не размер матрицы.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

бергу и Виттену [4]. Одновременно было предложено новое соотношение между суперпотенциалами $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий в размерности четыре и свободными энергиями матричных моделей в планарном пределе [5], [6]. Как оказалось, суперпотенциалы в некоторых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса в четырех измерениях могут быть выражены через единственную голоморфную функцию [5], которая была в дальнейшем отождествлена с планарным пределом свободной энергии для многоразрезных решений матричных моделей [6].

С другой стороны, есть серьезные основания считать, что такая аналогия распространяется за пределы древесного приближения и соответствующего предела больших N в статистической сумме матричной модели. Соответствие между калибровочными теориями и решениями матричных моделей было проверено на уровне одной петли для двухразрезного решения матричной модели с кубичным потенциалом [7]. Такое сравнение в общем случае требует знания структуры многоразрезного решения матричной модели в приближении рода один, которое до сих пор не было найдено в общем виде. Костов [8] привел соображения, показывающие возможность использования методов конформной теории поля (КТП) при вычислении таких поправок в общем случае, следуя методу, предложенному Муром [9]; этот метод был в дальнейшем улучшен Дойкграафом, Синкович и Темюрханом [10], которые на основе алгебро-геометрических соображений совместно с методами КТП предложили формулу для поправок рода один и сравнили ее с ответом в калибровочной теории. Заметим, однако, что, во-первых, сама применимость метода так называемого звездчатого оператора (одевания), предложенного Костовым, требует независимой проверки прямыми вычислениями, основанными единственно на петлевом уравнении. Во-вторых, необходимо дополнить алгебро-геометрические методы соображениями, позволяющими вычислять вклады от “негеометрической” части действия – вклады от так называемых “моментов” потенциала матричной модели. Такие вклады имеют место, как только степень многочлена, представляющего собой производную от потенциальной функции, становится больше числа разрезов; при этом возникают двойные точки, а род получаемой при этом гиперэллиптической поверхности может быть значительно меньше, чем старшая степень потенциала. Тем не менее и в этом случае суперпотенциал, удовлетворяющий уравнениям иерархии Уизема и уравнениям ассоциативности (уравнениям Виттена–Дойкграафа–Верлинде–Верлинде), задается планарным приближением (пределом больших N) для свободной энергии соответствующей матричной модели [11], [12].

В данной работе выражение для приближения первого порядка (рода один) свободной энергии, отвечающей обобщенному многоразрезному решению матричной модели, выводится непосредственно из петлевого уравнения без привлечения геометрических соображений или применения методов КТП, что, в частности, подтверждает вычисления, произведенные в работах [8] и [10]. Изложение в разделах 2, 3 следует методу, предложенному в работах [1], [2], и описывает итеративную процедуру нахождения петлевого среднего в разложении по родам; ответ для вклада рода один $W_1(p)$ в петлевое среднее приведен в разделе 4. В том же разделе полученный ответ интегрируется, что дает полное выражение для вклада F_1 рода один в свободную энергию. В качестве по-

бочного продукта получаются интересные комбинаторные тождества на величины, входящие в петлевое среднее $W_1(p)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПЕТЛЕВОЕ УРАВНЕНИЕ

Статистическая сумма эрмитовой матричной модели имеет вид

$$\mathcal{Z}[N, \{t_i\}] \equiv e^{N^2 F} = \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_g[\{t_i\}] \right) \equiv \int d\Phi e^{-N \operatorname{tr} V(\Phi)}, \quad (2.1)$$

где интегрирование идет по эрмитовым матрицам Φ размера $N \times N$. Матричный потенциал, который, как предполагается, имеет вид многочлена степени $m + 1$, задается степенным разложением

$$V(x) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{t_j}{j} x^j. \quad (2.2)$$

При выводе петлевого уравнения предполагается, что в игру можно вводить *все* константы связи t_j ; частный случай потенциала конечной степени может быть исследован, если положить все старшие константы связи равными нулю в конечном ответе. При этом константы связи t_j выступают в качестве источников для полиномиальных вакуумных средних, задаваемых стандартными выражениями:

$$\langle Q(\phi) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d\Phi Q(\Phi) e^{-N \operatorname{tr} V(\Phi)}.$$

Определяя действие оператора вставки петли как

$$\frac{d}{dV}(p) \equiv - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{p^{j+1}} \frac{d}{dt_j}, \quad (2.3)$$

из свободной энергии F получим однопетлевое среднее $W(p)$:

$$W(p) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \operatorname{Tr} \Phi^k \rangle}{p^{k+1}} = \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{p - \phi} \right\rangle = \frac{d}{dV}(p) F + \frac{1}{p}, \quad (2.4)$$

где $F = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} F_g$ в разложении по родам. Все многопетлевые корреляторы можно получить аналогично, действуя оператором (2.3) на F (или на $W(p)$):

$$\begin{aligned} W(p_1, \dots, p_n) &\equiv N^{n-2} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{p_1 - \phi} \dots \operatorname{tr} \frac{1}{p_n - \phi} \right\rangle_{\text{conn}} = \\ &= \frac{d}{dV}(p_n) \frac{d}{dV}(p_{n-1}) \dots \frac{d}{dV}(p_1) F, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь индекс conn обозначает связную часть коррелятора. Так как вид разложений по родам для петлевых корреляторов и свободной энергии совпадает:

$$W(p_1, \dots, p_n) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2g}} W_g(p_1, \dots, p_n), \quad (2.6)$$

уравнение (2.5) выполняется по отдельности для каждого рода $g \geq 0$. Будем предполагать функцию $W(p)$ аналитической на бесконечности с асимптотическим поведением

$$\lim_{p \rightarrow \infty} W(p) \sim \frac{1}{p}, \quad (2.7)$$

т. е.

$$W_g(p)|_{p \rightarrow \infty} = \frac{1}{p} \delta_{g,0} + O\left(\frac{1}{p^2}\right). \quad (2.8)$$

Это означает, что старшие $W_g(p)$ должны быть полными производными:

$$W_g(p) = \frac{d}{dV}(p) F_g, \quad g \geq 1. \quad (2.9)$$

Петлевое уравнение представляет собой *точное* уравнение, которому удовлетворяет петлевое среднее [13]. Сам вывод петлевого уравнения не основан на структуре разрезов и основывается только на инвариантности статистической суммы относительно переопределения полей интегрирования $\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon/(p - \Phi)$. Единственное отличие многоразрезного случая состоит в том, что контур интегрирования $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ должен теперь обходить n непересекающихся интервалов на вещественной оси:

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p - \omega} W(\omega) = (W(p))^2 + \frac{1}{N^2} \frac{d}{dV}(p) W(p), \quad p \notin \mathcal{D}, \quad (2.10)$$

где $V'(\omega) = \sum_j t_j \omega^{j-1}$. Будем предполагать, что плотность $\rho_N(\lambda) \equiv \langle \sum_i^N \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle / N$ собственных значений матрицы Φ имеет компактный носитель $\mathcal{D}$ при $N \rightarrow \infty$. Предполагается, что область $\mathcal{D}$ состоит из n непересекающихся отрезков:

$$\mathcal{D} \equiv \bigcup_{i=1}^n [\mu_{2i-1}, \mu_{2i}], \quad \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{2n}. \quad (2.11)$$

Записывая $W(p)$ через $\rho_N(\lambda)$,

$$W(p) = \int d\lambda \frac{\rho_N(\lambda)}{p - \lambda},$$

найдем, что в пределе $N \rightarrow \infty$ петлевое среднее $W(p)$ аналитично вне n разрезов, лежащих на вещественной оси.

Подставляя разложение по родам (2.6) в петлевое уравнение (2.10), получим

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p - \omega} W_0(\omega) = (W_0(p))^2 \quad (2.12)$$

в роде ноль и

$$(\hat{\mathcal{K}} - 2W_0(p))W_g(p) = \sum_{g'=1}^{g-1} W_{g'}(p)W_{g-g'}(p) + \frac{d}{dV}(p)W_{g-1}(p), \quad g \geq 1, \quad (2.13)$$

для старших родов. Здесь через $\hat{\mathcal{K}}$ обозначен линейный интегральный оператор

$$\hat{\mathcal{K}}f(p) \equiv \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} f(\omega). \quad (2.14)$$

При заданном $W_0(p)$ можно определить величины $W_g(p)$ при $g \geq 1$ итерациями от младших родов к старшим, если только однозначно обратимо действие оператора ($\hat{\mathcal{K}} - 2W_0(p)$).

Уравнение (2.12) для планарного предела $W_0(p)$ решается следующим образом. Стыгивая контур в уравнении (2.12) на бесконечность, получим

$$(W_0(p))^2 = V'(p)W_0(p) + \oint_{\mathcal{C}_{\infty}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} W_0(\omega). \quad (2.15)$$

Тогда формальное решение имеет вид

$$\begin{aligned} W_0(p) &= \frac{1}{2}V'(p) - \frac{1}{2}\sqrt{(V'(p))^2 + 4P(p)}, \\ P(p) &= \oint_{\mathcal{C}_{\infty}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} W_0(\omega), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где знак минус выбран для того, чтобы удовлетворить асимптотическому условию (2.8), а $P(p)$ — многочлен степени $m-1$. Если допустить, что $W_0(p)$ имеет n разрезов в комплексной плоскости, естественно предложить следующий анзац для квадратного корня:

$$W_0(p) = \frac{1}{2}(V'(p) - y(p)), \quad (2.17)$$

где

$$y(p) \equiv M(p)\tilde{y}(p), \quad \tilde{y}(p) \equiv \sqrt{\prod_{i=1}^{2n} (p - \mu_i)} \quad (2.18)$$

(обозначения взяты из работы [11]). Предполагается, что многочлен $M(p)$ имеет степень $m-n$, но его еще нужно найти. По соглашению будем считать, что $\tilde{y}(p)|_{p \rightarrow \infty} \sim p^n$, и тогда $M(p)$ имеет вид

$$M(p) = \oint_{\mathcal{C}_{\infty}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{(\omega-p)\tilde{y}(\omega)}. \quad (2.19)$$

Подставляя это решение в уравнение (2.17) и деформируя контур в обратном направлении, получим однопетлевой коррелятор со структурой n разрезов в планарном пределе:

$$W_0(p) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} \frac{\tilde{y}(p)}{\tilde{y}(\omega)}, \quad p \notin \mathcal{D}. \quad (2.20)$$

Тогда плотность собственных значений в планарном пределе $\rho(\lambda) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(\lambda)$ имеет вид

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (W_0(\lambda - i\epsilon) - W_0(\lambda + i\epsilon)) = \frac{1}{2\pi} \text{Im } y(\lambda), \quad \lambda \in \mathcal{D}. \quad (2.21)$$

Местоположения точек μ_α , $\alpha = 1, \dots, 2n$ в (2.18) все еще не определены. На них имеются ограничения двух сортов. Первый набор условий следует из асимптотических условий (2.8), которым должно удовлетворять решение (2.20), откуда имеем

$$\delta_{k,s} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega^k V'(\omega)}{\tilde{y}(\omega)}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (2.22)$$

Эти условия дают $n+1$ уравнение для $2n$ чисел μ_α (что оказывается достаточным только при $n = 1$).

Другой набор условий не следует из аналитической структуры. Введем в рассмотрение числа заполнения

$$S_i = \oint_{A_i} \frac{d\omega}{4\pi i} M(\omega) \tilde{y}(\omega) \equiv \oint_{A_i} \frac{d\omega}{4\pi i} y(\omega), \quad (2.23)$$

где A_i , $i = 1, \dots, n-1$, — базис A -циклов на гипергеометрической римановой поверхности $\tilde{y}^2 = \prod_{\alpha=1}^{2n} (x - \mu_\alpha)$ (удобно выбрать в качестве этих циклов первые $n-1$ разрезов). Эти числа интерпретируются как *независимые* параметры теории в подходе Дойкграфа и Вафы, что накладывает дополнительные ограничения

$$\frac{d}{dV}(p) S_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.24)$$

(Если принять противоположную точку зрения, которая естественна для исходного матрично-модельного подхода, (см. [14], [2]), то следует искать минимум действия матричной модели по отношению как к переменным S_i , так и к временам t_j . Это означает, что частные производные от F_0 , взятые по переменным S_i , должны обращаться в нуль. Можно показать, что эти производные (см. [14], [6]) представляют собой разности химических потенциалов на различных разрезах, и они равны интегралам по *дуальным* B -циклам соответствующей римановой поверхности, т.е. получаемый при этом набор условий имеет вид

$$\frac{d}{dV}(p) \oint_{B_i} d\omega y(\omega) = 0. \quad (2.25)$$

Заметим, что, как будет показано ниже, с технической точки зрения не важно, какой именно набор циклов (A или B) выбирается в качестве базисного. То есть поправки старших родов становятся зависимыми от схемы вычислений: в зависимости от того, выбираются ли определяющие условия в виде (2.24) или (2.25), получаются различные выражения для свободной энергии в приближении рода один. Тем не менее эти выражения имеют сходный вид — они различаются только выбором соответствующих базисных циклов.)

3. ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА

3.1. Моменты модели. Поправки старших родов можно находить итеративно с помощью обращения петлевого уравнения в разложении по родам (2.13). Если найдено выражение для $W_g(p)$, то все старшие многопетлевые корреляционные функции получаются применением оператора вставки петли (2.3) к этому выражению (см. уравнения (2.5) и (2.4)). Как и в одnorазрезном случае [1], с помощью перехода от констант связи к моментам $M_\alpha^{(k)}$ можно выразить корреляционные функции старших родов непертурбативно по константам связи t_j , и, как оказывается, эти корреляционные функции зависят от конечного числа моментов

$$M_\alpha^{(k)} \equiv \oint_{\mathcal{C}_D} \frac{d\omega}{2\pi i} V'(\omega) \phi_\alpha^{(k)}(\omega), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha = 1, \dots, 2n, \quad (3.1)$$

где

$$\phi_\alpha^{(k)}(\omega) \equiv \frac{1}{(\omega - \mu_\alpha)^k} \phi^{(0)}(\omega), \quad \phi^{(0)}(\omega) \equiv \frac{1}{\tilde{y}(\omega)}. \quad (3.2)$$

Заметим, что из выражения (2.19) следует, что

$$M_\alpha^{(1)} = M(\mu_\alpha). \quad (3.3)$$

3.2. Определение базиса. Введем теперь подходящий базис для задания действия интегрального оператора на $W_g(p)$ в уравнении (2.13):

$$(\hat{\mathcal{K}} - 2W_0(p))\chi_\alpha^{(k)}(p) \equiv \frac{1}{(p - \mu_\alpha)^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha = 1, \dots, 2n. \quad (3.4)$$

Если правая часть уравнения (2.13) представляет собой рациональную функцию от p с полюсами только в точках μ_α , то $W_g(p)$ должна иметь следующую структуру:

$$W_g(p) = \sum_{k=1}^{3g-1} \sum_{\alpha=1}^{2n} A_{\alpha,g}^{(k)} \chi_\alpha^{(k)}(p), \quad g \geq 1. \quad (3.5)$$

Здесь $A_{\alpha,g}^{(k)}$ могут быть достаточно сложными функциями от μ_β и от моментов $M_\beta^{(k)}$. Так как порядок старшего полюса в $W_g(p)$ не зависит от числа разрезов, сама функция $W_g(p)$ будет зависеть не более чем от $2n(3g-1)$ моментов, так же как и в случае одnorазрезного решения [1].

Набор базисных функций, удовлетворяющих уравнению (3.4), имеет вид

$$\tilde{\chi}_\alpha^{(k)}(p) \equiv \frac{1}{M_\alpha^{(1)}} \left(\phi_\alpha^{(k)}(p) - \sum_{r=1}^{k-1} M_\alpha^{(k-r+1)} \tilde{\chi}_\alpha^{(r)}(p) \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

$$\alpha = 1, \dots, 2n,$$

что можно доказать по индукции. Однако это определение неоднозначно, так как ядро оператора $(\hat{\mathcal{K}} - 2W_0(p))$ непусто:

$$\text{Ker}(\hat{\mathcal{K}} - 2W_0(p)) = \text{Span}\{p^l \phi^{(0)}(p); l = 0, \dots, n\}. \quad (3.7)$$

Это сразу следует из граничных условий (2.22). Как это следует из асимптотического поведения (2.8), выражения для $W_g(p)$ при $g \geq 1$ имеют асимптотическое поведение $\sim \mathcal{O}(1/p^2)$ при больших p . Это требование уменьшает набор возможных нулевых мод до следующего:

$$\text{допустимые нулевые моды: } \{p^l \phi^{(0)}(p); l = 0, \dots, n-2\}. \quad (3.8)$$

В общем случае к функции $W_g(p)$ можно добавлять любую линейную комбинацию от этих $n-1$ функций. Но, помимо асимптотического поведения, выражение для $W_g(p)$ должно удовлетворять уравнению (2.9), что можно использовать для того, чтобы *однозначно* фиксировать базис. Зависимость функции $W_g(p)$ от переменной p должна полностью выражаться через производные $d/dV(p)$. Это возможно, только если базисные функции $\chi_\alpha^{(k)}(p)$ как функции от p могут быть полностью выражены в терминах производных $d\mu_\alpha/dV(p)$ и $dM_\alpha^{(k)}/dV(p)$. Поэтому величины $\tilde{\chi}_\alpha^{(k)}(p)$ в уравнении (3.6) следует переопределить в соответствии с этим требованием, что полностью фиксирует компоненты нулевых мод в этих величинах. Производные от точек ветвления μ_α и от моментов $M_\alpha^{(k)}$ можно получить, применяя оператор вставки петли к моментам (3.1) с использованием ограничений (2.24) и принимая во внимание то, что

$$\frac{d}{dV}(p) = \frac{\partial}{\partial V}(p) + \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) \frac{\partial}{\partial \mu_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dM_\alpha^{(k)}}{dV}(p) \frac{\partial}{\partial M_\alpha^{(k)}}. \quad (3.9)$$

Применяя тождество

$$\frac{\partial}{\partial V}(p) V'(\omega) = -\frac{1}{(p-\omega)^2}, \quad (3.10)$$

можно записать результат для моментов в виде

$$\begin{aligned} \frac{dM_\alpha^{(k)}}{dV}(p) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(M_\alpha^{(k+1)} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) - \phi_\alpha^{(k+1)}(p)\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{2n} \sum_{l=1}^k \frac{1}{(\mu_\beta - \mu_\alpha)^{k-l+1}} \left(\phi_\alpha^{(l)}(p) - M_\alpha^{(l)} \frac{d\mu_\beta}{dV}(p)\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{2n} \frac{1}{(\mu_\beta - \mu_\alpha)^k} \left(M_\beta^{(1)} \frac{d\mu_\beta}{dV}(p) - \phi_\beta^{(1)}(p)\right), \\ &\alpha = 1, \dots, 2n, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Величины $d\mu_\alpha/dV(p)$ при этом определяются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha=1}^{2n} \left(\mu_\alpha^k M_\alpha^{(1)} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) - p^k \phi_\alpha^{(1)}(p) \right) + 2kp^{k-1} \phi^{(0)}(p), \quad k = 0, \dots, n, \\ 0 &= \sum_{\alpha=1}^{2n} \left(M_\alpha^{(1)} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) - \phi_\alpha^{(1)}(p) \right) K_{\alpha,j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ K_{\alpha,j} &\equiv \oint_{A_j} d\lambda \frac{\tilde{y}(\lambda)}{\lambda - \mu_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

которая может быть получена с помощью применения оператора $d/dV(p)$ к (2.22) с использованием (2.24). В то время как первые соотношения получаются достаточно просто, вывод последних соотношений производится весьма изящным способом, впервые предложенным Акеманом. В самом деле,

$$\frac{d}{dV}(p)y(\omega) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2n} M(\omega) \tilde{y}(\omega) \frac{1}{\omega - \mu_\alpha} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) + \tilde{y}(\omega) \frac{d}{dV}(p)M(\omega). \quad (3.13)$$

Вычисляя второе слагаемое, получим из условия (2.19), что

$$\frac{d}{dV}(p)M(\omega) = \oint_{C_{\infty,p}} \frac{d\xi}{2\pi i} \left[\frac{V'(\xi)}{(\xi - \omega)\tilde{y}(\xi)} \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{1}{\xi - \mu_\alpha} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) \right) - \frac{1}{(p - \xi)^2(\xi - \omega)\tilde{y}(\xi)} \right],$$

и первый член в этой формуле вычисляется взятием вычета на бесконечности с одновременной подстановкой $M(\xi)\tilde{y}(\xi)$ вместо $V'(\xi)$, а второй задается вычетом в точке $\xi = p$ (поскольку контур интегрирования должен охватывать и бесконечность, и p). Первый член при этом дает

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{M(\omega) - M(\mu_\alpha)}{\omega - \mu_\alpha} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p), \quad (3.14)$$

и он частично сокращает первый член в выражении (3.13); разность между ними в точности равна выражению, пропорциональному $M(\mu_\alpha) = M_\alpha^{(1)}$. Второе слагаемое при подстановке его в интеграл в формуле (2.24) может быть вычислено путем интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \oint_{A_j} d\omega \frac{1}{p - \omega} \frac{\tilde{y}(\omega)}{\tilde{y}(p)} &= \frac{1}{2} \oint_{A_j} d\omega \frac{1}{p - \omega} \sum_{\alpha=1}^{2n} \left(\frac{1}{\omega - \mu_\alpha} - \frac{1}{p - \mu_\alpha} \right) \frac{\tilde{y}(\omega)}{\tilde{y}(p)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2n} K_{\alpha,j} \phi_\alpha^{(1)}(p), \end{aligned} \quad (3.15)$$

что окончательно дает (3.12) с учетом (3.13) и (3.14).

Из линейной системы уравнений (3.12) следует, что решение всегда представимо в виде

$$M_\alpha^{(1)} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) = \phi_\alpha^{(1)}(p) + \sum_{l=0}^{n-2} \mathcal{L}_{\alpha,l} p^l \phi^{(0)}(p), \quad \alpha = 1, \dots, 2n. \quad (3.16)$$

Величины $\mathcal{L}_{\alpha,l}$, $\alpha = 1, \dots, 2n$, $l = 0, \dots, n-2$, при этом определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{l=0}^{n-2} \mathcal{L}_{\alpha,l} \mu_\alpha^k p^l - \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{l=0}^{k-1} \mu_\alpha^{k-l-1} p^l + 2kp^{k-1}, \quad k = 0, \dots, n, \\ 0 &= \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{l=0}^{n-2} \mathcal{L}_{\alpha,l} K_{\alpha,j} p^l, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Теперь удобно переопределить базис (3.6) в терминах полных производных. Разрешая уравнение (3.11) для $\phi_\alpha^{(k+1)}(p)$ и выражая зависимость от переменной p в этом уравнении через производные $d/dV(p)$ и нулевые моды, можно получить однозначное представление для базиса индуктивно, начиная с уравнения (3.6) и вычитая правильным образом нулевые моды. При этом получим

$$\chi_\alpha^{(k)}(p) \equiv \frac{1}{M_\alpha^{(1)}} \left(\phi_\alpha^{(k)}(p) \Big|_{\frac{d}{dV}\text{-part}} - \sum_{r=1}^{k-1} M_\alpha^{(k-r+1)} \chi_\alpha^{(r)}(p) \right), \quad (3.18)$$

$$\alpha = 1, \dots, 2n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Несколько первых базисных функций имеют вид

$$\chi_\alpha^{(1)}(p) = \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p), \quad \alpha = 1, \dots, 2n,$$

$$\chi_\alpha^{(2)}(p) = -\frac{2}{3} \frac{d}{dV}(p) \ln |M_\alpha^{(1)}| - \frac{1}{3} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{2n} \frac{d}{dV}(p) \ln |\mu_\alpha - \mu_\beta|. \quad (3.19)$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЯ В РОДЕ ОДИН

4.1. Свободная энергия в роде один. После того как задан базис, можно обратиться петлевое уравнение шаг за шагом в разложении по родам. В роде $g = 1$ уравнение (2.13) дает

$$(\widehat{\mathcal{K}} - 2W_0(p))W_1(p) = \frac{d}{dV}(p)W_0(p). \quad (4.1)$$

При заданном $W_0(p)$ (2.20) и операторе вставки петли (3.9) правая часть уравнения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV}(p)W_0(p) &= -\frac{3}{16} \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{1}{(p - \mu_\alpha)^2} - \frac{1}{8} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^{2n} \frac{1}{(p - \mu_\alpha)(p - \mu_\beta)} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{\phi^{(0)}(p)} \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{1}{p - \mu_\alpha} M_\alpha^{(1)} \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) = \\ &= \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{1}{(p - \mu_\alpha)^2} - \frac{1}{8} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^{2n} \frac{1}{\mu_\alpha - \mu_\beta} \left(\frac{1}{p - \mu_\alpha} - \frac{1}{p - \mu_\beta} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{l=0}^{n-2} \frac{\mathcal{L}_{\alpha, l} \mu_\alpha^l}{p - \mu_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь было учтено, что регулярные части, получаемые из выражений $p^l/(p - \mu_\alpha)$, $l = 1, \dots, n - 2$, должны обращаться в нуль вследствие уравнения (3.17) с тем, чтобы выражение для $W_0(p, p) = dW_0(p)/dV(p)$ имело правильное асимптотическое поведение.

Кроме того, можно заменять члены p^l на μ_α^l в числителях этих выражений. Теперь ответ для однопетлевой корреляционной функции в приближении рода один с n разрезами легко получается с использованием выражений (3.19):

$$\begin{aligned}
W_1(p) &= \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^{2n} \chi_\alpha^{(2)}(p) - \frac{1}{8} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2n} \frac{1}{\mu_\alpha - \mu_\beta} (\chi_\alpha^{(1)}(p) - \chi_\beta^{(1)}(p)) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{l=0}^{n-2} \mathcal{L}_{\alpha,l} \mu_\alpha^l \chi_\alpha^{(1)}(p) = \\
&= \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^{2n} \chi_\alpha^{(2)}(p) - \frac{1}{8} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2n} \frac{1}{\mu_\alpha - \mu_\beta} (\chi_\alpha^{(1)}(p) - \chi_\beta^{(1)}(p)) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{l=0}^{n-2} \mathcal{L}_{\alpha,l} \mu_\alpha^l \chi_\alpha^{(1)}(p) = \\
&= \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^{2n} \left(-\frac{2}{3} \frac{d}{dV}(p) \ln |M_\alpha^{(1)}| - \frac{1}{3} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{2n} \frac{d}{dV}(p) \ln |\mu_\alpha - \mu_\beta| \right) - \\
&\quad - \frac{1}{8} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^{2n} \frac{1}{\mu_\alpha - \mu_\beta} \left(\frac{d\mu_\alpha}{dV}(p) - \frac{d\mu_\beta}{dV}(p) \right) + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{2n} \mathcal{L}_\alpha(\mu_\alpha) \frac{d\mu_\alpha}{dV}(p), \quad (4.3)
\end{aligned}$$

где многочлены $\mathcal{L}_\alpha(p)$ по определению равны $\sum_{l=0}^{n-2} \mathcal{L}_{\alpha,l} p^l$.

Чтобы получить F_1 , надо теперь проинтегрировать выражение (4.3). В то время как интегрирование первых двух слагаемых производится довольно просто, интегрирование члена с нулевыми модами затруднено. Даже для того чтобы представить результат, требуется ввести еще несколько обозначений. Введем величины

$$Q_{j,i} \equiv \oint_{A_j} \frac{\lambda^{i-1}}{\tilde{y}(\lambda)} d\lambda, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

(часть из них составляет матрицу $\mathcal{A}$ [8], [10]) и (полиномиальный) базис голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической римановой поверхности:

$$\hat{H}_k(\lambda) \equiv \sum_{l=1}^{n-1} \hat{H}_{l,k} \lambda^{l-1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (4.5)$$

таких, что

$$\oint_{A_j} \frac{\hat{H}_k(\lambda)}{\tilde{y}(\lambda)} d\lambda = \delta_{k,j}, \quad (4.6)$$

откуда имеем

$$\sum_{l=1}^{n-1} Q_{j,l} \hat{H}_{l,k} = \delta_{j,k} \quad \text{при } j, k = 1, \dots, n-1. \quad (4.7)$$

Следующая лемма, доказательство которой содержится в п. 4.2, устанавливает соответствие между нулевыми модами $\mathcal{L}_{\alpha,l}$ и величинами $Q_{j,i}$.

ЛЕММА. Для переменных $\mathcal{L}_{\alpha,l}$, задаваемых системой (3.7), и величин (4.4) и (4.5) имеет место соотношение

$$\sum_{l=0}^{n-2} \mathcal{L}_{\alpha,l} \mu_{\alpha}^l = - \sum_{j=1}^{n-1} \oint_{A_j} \frac{\hat{H}_j(\lambda)}{\tilde{y}(\lambda)(\lambda - \mu_{\alpha})} d\lambda, \quad \alpha = 1, \dots, 2n. \quad (4.8)$$

Из леммы следует, что последний член в формуле (4.3) есть

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial \mu_{\alpha}} \left(\ln_{i,j=1,\dots,n-1}^{\det} Q_{j,i} \right) \frac{d\mu_{\alpha}}{dV}(p),$$

т. е.

$$F_1 = -\frac{1}{24} \ln \left(\prod_{\alpha=1}^{2n} M_{\alpha}^{(1)} \cdot \Delta^4 \cdot \left(\ln_{i,j=1,\dots,n-1}^{\det} Q_{j,i} \right)^{12} \right), \quad (4.9)$$

где $\Delta = \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2n} (\mu_{\alpha} - \mu_{\beta})$ — определитель Вандермонда. Это и есть окончательный ответ для свободной энергии в роде один.

4.2. Доказательство леммы. Сразу отметим, что все величины $Q_{j,i}$, хотя и зависят только от $2n$ модулей μ_{α} , тем не менее представляют собой алгебраически независимые величины при всех j и при всех $i < 2n$ (в том смысле, что при $i < 2n$ не существует рациональных функций от μ_{α} и $Q_{j,i}$, которые бы обращались в нуль тождественно при всех μ_{α}). Поэтому с комбинаторной точки зрения все величины $Q_{j,i}$ могут рассматриваться как независимые. Кроме того, будем доказывать соотношение (4.8) не для собственно переменных $\mathcal{L}_{\alpha,l}$, а для специальных сумм от этих переменных:

$$R_{k,i} \equiv \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_{\alpha}^k \mathcal{L}_{\alpha,i}. \quad (4.10)$$

Если вычислить все $R_{k,i}$ при $k = 0, \dots, 2n-1$, то все $\mathcal{L}_{\alpha,i}$ автоматически находятся с помощью обратного преобразования Вандермонда. Докажем теперь формулу (4.8), применяя суммирование с весами μ_{α}^k к обеим частям этой формулы. Если при этом получатся тождества при всех k , то лемма будет доказана.

Для сокращения обозначений удобно ввести величины

$$T_{l,m} \equiv \sum_{j=1}^{n-1} Q_{l,j}^{-1} Q_{j,m}, \quad l = 1, \dots, n-1, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (4.11)$$

Очевидно, что $T_{l,m} = \delta_{l,m}$ при $1 \leq m \leq n-1$.

В левой части (4.8) при этом получим

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_{\alpha}^k \mathcal{L}_{\alpha}(\mu_{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n-2} R_{k+i,i}, \quad (4.12)$$

в то время как в правой части появится выражение

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \oint_{A_j} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Q_{i,j}^{-1} x^{i-1} \mu_{\alpha}^k}{\tilde{y}(x)(x - \mu_{\alpha})} dx = \\
& = - \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \oint_{A_j} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Q_{i,j}^{-1} x^{i-1} (\mu_{\alpha}^k - x^k)}{\tilde{y}(x)(x - \mu_{\alpha})} - \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \oint_{A_j} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Q_{i,j}^{-1} x^{i+k-1}}{\tilde{y}(x)(x - \mu_{\alpha})} = \\
& = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-1} T_{i,i+s} \left(\sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_{\alpha}^{k-s-1} \right) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} (i+k-1) T_{i,i+k-1}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

где во втором слагаемом было произведено интегрирование по частям. Таким образом, надо доказать совпадение (4.12) и (4.13) при всех k .

Прежде всего, можно непосредственно найти выражения для $R_{k,i}$ с $k = 0, \dots, n$ из первого соотношения в системе (3.17):

$$R_{k,i} = \theta(k-1-i) \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{k-i-1} - 2k \delta_{k-i-1,0}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \tag{4.14}$$

где $\theta(n) = 1$ при $n \geq 0$ и $\theta(n) = 0$ при $n < 0$. Дополнительный набор соотношений можно получить из вторых условий в системе (3.17). Введем стандартные симметрические функции:

$$\begin{aligned}
\text{Sym}_k & \equiv \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2n} \mu_{i_1} \mu_{i_2} \dots \mu_{i_k}, \quad k \leq 2n, \\
\text{Sym}(\mu_{\alpha})_k & \equiv \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2n \\ i_s \neq \alpha}} \mu_{i_1} \mu_{i_2} \dots \mu_{i_k}, \quad k \leq 2n-1,
\end{aligned}$$

с очевидными рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}
\text{Sym}(\mu_{\alpha})_k & = \text{Sym}_k - \mu_{\alpha} \text{Sym}(\mu_{\alpha})_{k-1}, \\
\text{Sym}_0 & = \text{Sym}(\mu_{\alpha})_0 = 1, \quad \text{Sym}_{-1} = \text{Sym}(\mu_{\alpha})_{-1} = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned}
\text{Sym}(\mu_{\alpha})_k & = \text{Sym}_k - \mu_{\alpha} \text{Sym}_{k-1} + \dots + (-\mu_{\alpha})^s \text{Sym}_{k-s} + \\
& + (-\mu_{\alpha})^{s+1} \text{Sym}(\mu_{\alpha})_{k-s-1}, \quad s = 0, \dots, k,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

и

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \text{Sym}(\mu_{\alpha})_s = (2n-s) \text{Sym}_s, \quad 0 \leq s \leq 2n. \tag{4.17}$$

Применяя преобразование

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}(x)}{x - \mu_\alpha} &= \frac{1}{\tilde{y}(x)} \prod_{\beta \neq \alpha}^{2n} (x - \mu_\beta) = \frac{1}{\tilde{y}(x)} \sum_{l=0}^{2n-1} x^{2n-l-1} (-1)^l \text{Sym}(\mu_\alpha)_l = \\ &= \frac{1}{\tilde{y}(x)} \sum_{l=0}^{2n-1} \sum_{s=0}^l x^{2n-l-1} \mu_\alpha^{l-s} (-1)^s \text{Sym}_s, \end{aligned} \quad (4.18)$$

получим систему связей:

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{s=1}^{2n-k-1} Q_{j,2n-k-s} R_{s,i} \text{Sym}_k (-1)^k = 0. \quad (4.19)$$

Применяя уже полученные формулы и свертывая результат с $Q_{p,j}^{-1}$, $p = 1, \dots, n-1$, после некоторых вычислений с использованием формул (4.14), (4.16) и (4.17), получим, что

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_\alpha^{n-i} (-1)^{p+n} \text{Sym}(\mu_\alpha)_{n-p-1} + (p-i-1) (-1)^{p-i-1} \text{Sym}_{2n-1-p-i} + \\ &+ \sum_{s=0}^{n-p-1} R_{n+s+1,i} (-1)^{p+n+s+1} \text{Sym}_{n-1-p-s} + \\ &+ \sum_{r=n}^{2n-1} T_{p,r} (-1)^{r+i+1} (r-1-i) \text{Sym}_{2n-1-r-i}, \quad p = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Теперь все оставшиеся величины $R_{n+1+s,i}$ при $s = 0, \dots, n-2$ могут быть получены путем обращения нижнетреугольной матрицы, стоящей при этих величинах во второй строке формулы (4.20). А именно, введем переменные q_s , $s = 0, 1, \dots$, с определяющим соотношением

$$\sum_{s=0}^p q_s \text{Sym}_{p-s} (-1)^{p-s} = \delta_{p,0} \quad \text{при } p = 0, 1, \dots \quad (4.21)$$

Несколько первых переменных q_s имеют следующий вид: $q_0 = 1$, $q_1 = \text{Sym}_1$, $q_2 = (\text{Sym}_1)^2 - \text{Sym}_2$ и т.д. Помимо формулы (4.21), потребуется еще одно комбинаторное тождество на переменные q_s , которое вытекает из соотношений (4.21) и (4.15). Умножая (4.21) на $\text{Sym}_1 \equiv \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_\alpha$, получим

$$\begin{aligned} \delta_{p,0} &= \sum_{s=0}^p (s+1) \text{Sym}_{s+1} (-1)^s q_{p-s} + \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_\alpha^2 \sum_{s=0}^p \text{Sym}(\mu_\alpha)_{s-1} (-1)^s q_{p-s} = \\ &= \sum_{s=0}^p (s+1) \text{Sym}_{s+1} (-1)^s q_{p-s} - \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{q=2}^{p+1} \mu_\alpha^q \left(\sum_{s=0}^{p+1-q} \text{Sym}_s (-1)^s q_{p+1-q-s} \right) = \\ &= \sum_{s=0}^p (s+1) \text{Sym}_{s+1} (-1)^s q_{p-s} - \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_\alpha^{p+1}, \end{aligned}$$

т.е. имеет место формула

$$\sum_{s=0}^{p+1} s \cdot \text{Sym}_s(-1)^s q_{p+1-s} = - \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_{\alpha}^{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (4.22)$$

и такая сумма равна нулю при $p = -1$.

Из (4.20), (4.21) получим для $R_{p,i}$ при $p > n$:

$$\begin{aligned} R_{n+1+k,i} = & - \sum_{r=0}^k q_r \sum_{s=1+i}^n T_{2n-s, 2n-1-k+r} (2n-s-i-1) (-1)^{s-i-1} \text{Sym}_{s-i-1} + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_{\alpha}^{n+k-i} - \sum_{r=0}^k q_r (-1)^{i+k-r+n} \text{Sym}_{n+k-r-i} (n-2-k+r-1), \\ & k = 0, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Два последних члена в (4.23) относятся к “регулярным” частям формул (4.12) и (4.13), т.е. к тем их частям, которые не содержат $T_{p,i}$ при $p > n-1$. Можно непосредственно убедиться в том, что эти регулярные части совпадают. Единственной нетривиальной проверкой остается сравнение “нерегулярных” частей. Для краткости будем обозначать многоточиями опущенные “регулярные” части. Тогда при $k = 0, \dots, n-2$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2} R_{i+k,i} &= \sum_{i=0}^{n-k} \dots + \sum_{p=0}^{k-3} R_{n+1+p, n+1+p-k} = \\ &= (\dots) + \sum_{p=0}^{k-3} \left(- \sum_{r=0}^p q_r \sum_{s=n+2+p-k}^n T_{2n-s, 2n-1-p+r} \times \right. \\ &\quad \times (2n-s-(n+1+p-k)-1) (-1)^{s-n+p+k} \text{Sym}_{s-n-1-p+k-1} \Big) = \\ &= (\dots) - \sum_{0 \leq r \leq s \leq k-2} T_{n-2+k-s, 2n-1-r} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{p=r}^s (2k-p-s-4) (-1)^{s-p} \text{Sym}_{s-p} q_{p-r} \right) = \\ &= (\dots) - \sum_{0 \leq r \leq s \leq k-2} T_{n-2+k-s, 2n-1-r} \times \\ &\quad \times \left([2k-2s-4] \delta_{r,s} + \left(- \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_{\alpha}^{s-r} + 2n \delta_{r,s} \right) \right) = \\ &= (\dots) + \sum_{0 \leq r \leq s \leq k-2} T_{n-2+k-s, 2n-1-r} \sum_{\alpha=1}^{2n} \mu_{\alpha}^{s-r} - \\ &\quad - \sum_{0 \leq r \leq k-2} 2[n+k-r-2] T_{n-2+k-r, 2n-1-r}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

что в точности дает “нерегулярную” часть выражения (4.13). Лемма тем самым доказана.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученный ответ (4.9) допускает красивую геометрическую интерпретацию в терминах G -функций и изомонодромных деформаций (см. [10], [15], [16]). Интересно отметить связь между этим ответом и ответом в планарном пределе, представляющем собой суперпотенциал. Эти геометрические соотношения открывают простор для дальнейших исследований. Также интересно найти все еще отсутствующее геометрическое объяснение комбинаторных тождеств вида (4.8).

Что было бы ответом для F_1 в “старом” подходе матричных моделей, в котором приравниваются нулю разности химических потенциалов между всеми интервалами распределения собственных значений? Легко видеть, что соответствующий ответ также будет иметь вид (4.9) с тем единственным отличием, что вместо интегрирования по A -циклам в матрице $Q_{i,j}$ необходимо интегрировать по B -циклам. В частном случае двухразрезного решения при этом воспроизводится ответ Акемана.

Другой вопрос связан с зависимостью F_1 от параметров S . Петлевое уравнение по определению фиксирует только ту часть F_1 , которая зависит от потенциала; в принципе можно ожидать, что имеется и часть, которая зависит только от чисел заполнения, и эта зависимость не может быть найдена, если использовать одну только инвариантность интеграла матричной модели относительно преобразований Вирасоро; тем не менее есть основания полагать, что эта зависимость полностью задается планарным пределом интеграла матричной модели. Интересно вычислить S -производные от F_1 .

После завершения этой работы появилась статья Эйнара, Кокотова и Короткина [17], в которой поправки рода один были найдены в двуматричной модели с помощью изящного геометрического анализа. Авторы [17] воспроизвели результат (4.9) в частном случае, когда двуматричная модель сводится к одноматричной. Они также обсудили некоторые из вышеприведенных вопросов.

Благодарности. Автор выражает благодарность Б. Дубровину, Т. Граве, Д. Короткину, А. Маршакову и А. Забродину за многочисленные обсуждения матричных моделей и связанной с ними геометрии. Автор благодарен за гостеприимность SISSA, Триест, где эта работа была начата. Работа частично поддержана грантами РФФИ № 02-01-00484, НШ-2052.2003.1 и 03-01-22000-НЦНИ-а и Программой “Математические методы в нелинейной динамике”.

Список литературы

- [1] *J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, Yu. Makeenko.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 127.
- [2] *G. Akemann.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 482. P. 403; hep-th/9606004.
- [3] *J. Ambjørn, G. Akemann.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. L555; cond-mat/9606129.
- [4] *N. Seiberg, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19; Erratum. V. 430. P. 485; hep-th/9407087.

- [5] *F. Cachazo, K. Intriligator, C. Vafa.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 603. P. 3; hep-th/0103067;
F. Cachazo, C. Vafa. $N = 1$ and $N = 2$ geometry from fluxes. hep-th/0206017.
- [6] *R. Dijkgraaf, C. Vafa.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 644. P. 3; hep-th/0206255; P. 21;
hep-th/0207106; A perturbative window into non-perturbative physics. hep-th/0208048.
- [7] *A. Klemm, M. Mariño, S. Theisen.* JHEP. 2003. V. 0303. P. 051; hep-th/0211216.
- [8] *I. K. Kostov.* Conformal field theory techniques in random matrix models. hep-th/9907060.
- [9] *G. W. Moore.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1990. V. 102. P. 255.
- [10] *R. Dijkgraaf, A. Sinkovics, M. Temürhan.* Adv. Theor. Math. Phys. 2004. V. 7. P. 1155;
hep-th/0211241.
- [11] *L. Chekhov, A. Mironov.* Phys. Lett. B. 2003. V. 552. P. 293; hep-th/0209085.
- [12] *L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev.* Phys. Lett. B. 2003. V. 562. P. 323;
hep-th/0301071.
- [13] *Yu. Makeenko.* Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 1901.
- [14] *J. Jurkiewicz.* Phys. Lett. B. 1990. V. 245. P. 178.
- [15] *B. Dubrovin, Y. Zhang.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 198. P. 311; hep-th/9712232.
- [16] *A. Kokotov, D. Korotkin.* Bergmann tau-fucntion on Hurwitz spaces and its applications.
math-ph/0310008.
- [17] *B. Eynard, A. Kokotov, D. Korotkin.* Nucl. Phys. B. 2004. V. 694. P. 443; hep-th/0401166.

Поступила в редакцию 1.IV.2004 г.