Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Полищук, Пропэгатор массивного поля спина $s = 2$ на пространстве анти-де Ситтера, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 81–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:07:28

© 2004 г.

А. В. Полищук*

ПРОПАГАТОР МАССИВНОГО ПОЛЯ СПИНА $s = 2$ НА ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ-ДЕ СИТТЕРА

Построен пропагатор массивного тензорного поля второго ранга на евклидовом продолжении пространства анти-де Ситтера (AdS). Найдено явное выражение для пропагатора в пределе, когда поле принимает значение на границе пространства AdS. Показано, что предельное выражение правильно воспроизводит функцию Грина и двухточечную корреляционную функцию граничной конформной теории поля, как и предсказывает гипотеза AdS/CFT-соответствия. Получено еще одно свидетельство в пользу интерпретации операторов граничной конформной теории поля как определенных пределов квантовых полей, распространяющихся в пространстве AdS.

Ключевые слова: функция Грина, конформная теория поля, AdS/CFT-соответствие.

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с предложенной недавно гипотезой AdS/CFT-соответствия, сопоставляющей теории супергравитации на пространстве анти-де Ситтера (AdS) некоторую конформную теорию поля (КТП) на его границе, развернулась активная деятельность по изучению теоретико-полевых аспектов пространства AdS (см. обзор [1]). В частности, значительные усилия были направлены на вычисление всевозможных корреляционных функций операторов, соответствующих полям, которые образуют полный спектр ПВ супергравитации, возмущенной относительно фонового пространства $AdS_5 \times S^5$. Вместе с тем многие результаты, касающиеся квантовой теории поля на пространствах анти-де Ситтера и де Ситтера, были получены много лет назад. Так, например, пропагаторы для скалярных [2]–[4], спинорных [5] и векторных [6] полей были построены при произвольных значениях масс, а пропагаторы для калибровочных бозонов и гравитонный пропагатор были найдены в ковариантных калибровках в работах [6]–[9]. С появлением гипотезы AdS/CFT-соответствия вновь были выведены пропагаторы для калибровочных бозонов и гравитонов, при этом в работе [10] была использована нековариантная калибровка, а ковариантное рассмотрение было представлено в работах [11], [12].

В настоящей статье мы продолжим исследование теории поля на пространстве AdS, вычислив пропагатор массивного тензорного поля второго ранга. Данное поле присутствует в свободном спектре ПВ супергравитации на пространстве $AdS_5 \times S^5$ с массой

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail: alexey@mi.ras.ru

$m^2 = k(k+4)e^2$, где $k = 1, 2, \dots$, а e – радиус AdS [13]. Наше вычисление основывается на методе битензорного разложения, впервые предложенном в работе [6], где были найдены пропагаторы для векторных и калибровочных полей. Данный метод основывается на том обстоятельстве, что любой пропагатор на пространстве AdS должен удовлетворять всем изометриям пространства и, таким образом, всегда может быть выражен через единственную переменную – хордовое расстояние в пространстве вложения. С геометрической точки зрения пропагатор есть битензор, т.е. тензор, который зависит от координат двух различных точек и несет тензорные индексы, отвечающие касательным пространствам в этих точках. Таким образом, пропагатор может быть представлен в виде разложения по базису максимально симметрических фундаментальных (МСФ) битензоров, возникающих в результате ковариантного дифференцирования хордового расстояния. Структура МСФ-битензоров, используемых в разложении, определяется симметриями соответствующего пропагатора. Заметим, что существование МСФ-битензоров является отличительной особенностью максимально симметрических пространств, т.е. пространств, обладающих максимальным числом векторов Киллинга. Подстановка пропагатора в виде разложения по МСФ-битензорам в уравнение движения дает систему обычных дифференциальных уравнений для скалярных функций. Решение такой системы определяется однозначно вследствие наложения граничных условий на больших и малых расстояниях. С помощью этой процедуры нам удастся построить пропагатор для массивного тензорного поля спина $s = 2$. Оказывается, что он может быть представлен в терминах единственной скалярной функции от хордового расстояния. Кроме того, при стремлении массы поля к нулю мы получаем калибровочно-инвариантный вклад в пропагатор гравитона, найденного в работе [12]. В пределе, когда массивное поле принимает значение на границе пространства AdS, полученный пропагатор правильно воспроизводит как функцию Грина, вычисленную ранее в работах [14], [15], так и двухточечную корреляционную функцию в граничной КТП. В результате нам удастся установить соотношение между массивным полем спина $s = 2$ в супергравитации на фоновом пространстве AdS и составным примарным киральным оператором в граничной КТП. Отметим, что полученное выражение для пропагатора справедливо при произвольных значениях размерности пространства AdS и массы поля.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 описывается стандартная параметризация евклидова продолжения пространства AdS и строится пропагатор для массивного симметрического тензорного поля. Раздел 3 посвящен анализу поведения полученного пропагатора в пределе, когда массивное поле принимает значение на границе пространства. Также здесь устанавливается соотношение между массивным симметрическим тензорным полем, распространяющимся на пространстве AdS, и оператором в граничной КТП. В разделе 4 обсуждаются полученные результаты.

2. ПРОПАГАТОР МАССИВНОГО ПОЛЯ СПИНА $s = 2$

Евклидово продолжение пространства AdS_{d+1} можно представить как подпространство, где $Y_{-1} > 0$, гиперboloида:

$$Y^2 \equiv -(Y_{-1})^2 + (Y_0)^2 + \sum_{i=1}^d (Y_i)^2 = -\frac{1}{e^2},$$

где e – радиус AdS_{d+1} . Если ввести параметризацию Пуанкаре

$$x_i = \frac{Y_i}{e(Y_0 + Y_{-1})}, \quad x_0 = \frac{1}{e^2(Y_0 + Y_{-1})},$$

то индуцированная на гиперboloиде метрика совпадет с метрикой пространства Лобачевского

$$ds^2 = -(dY_{-1})^2 + (dY_0)^2 + \sum_{i=1}^d (dY_i)^2 = \frac{1}{e^2 x_0^2} \left(dx^0 dx^0 + \sum_{i=1}^d dx^i dx^i \right), \quad (1)$$

причем $x_0 \geq 0$. Граница пространства включает гиперплоскость $x_0 = 0$ и бесконечно удаленную точку $x_0 = \infty$. В дальнейшем мы положим радиус пространства AdS равным единице, так что скалярная кривизна пространства станет равной $\mathcal{R} = -d(d+1)$. Следуя методу, изложенному в работе [11], введем переменную u , отвечающую расстоянию между двумя произвольными точками $x(Y)$ и $y(Y')$ в пространстве вложения, следующим образом:

$$u \equiv \frac{1}{2}(Y - Y')^2 = \frac{(x - y)^2}{2x_0 y_0}, \quad (2)$$

где $(x - y)^2 = \delta_{\mu\nu}(x - y)_\mu(x - y)_\nu$. Частные производные от u равны

$$\begin{aligned} \partial_\mu u &= \frac{1}{x_0} \left[\frac{1}{y_0}(x - y)_\mu - u \delta_{\mu 0} \right], \\ \partial_{\nu'} u &= \frac{1}{y_0} \left[\frac{1}{x_0}(y - x)_{\nu'} - u \delta_{\nu' 0} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Как было отмечено во введении, все инвариантные функции на пространстве AdS могут быть представлены в терминах этой переменной и ее ковариантных производных. В дальнейшем мы воспользуемся некоторыми свойствами различных производных от u , которые мы приводим ниже [11]:

$$\begin{aligned} \square u &= D^\mu \partial_\mu u = (d+1)(1+u), \\ D^\mu u \partial_\mu u &= u(2+u), \\ D_\mu \partial_\nu u &= g_{\mu\nu}(1+u), \\ (D^\mu u)(D_\mu \partial_\nu \partial_{\nu'} u) &= \partial_\nu u \partial_{\nu'} u, \\ (D^\mu u)(\partial_\mu \partial_{\nu'} u) &= (1+u) \partial_{\nu'} u, \\ (D^\mu \partial_{\mu'} u)(\partial_\mu \partial_{\nu'} u) &= g_{\mu'\nu'} + \partial_{\mu'} u \partial_{\nu'} u, \\ D_\mu \partial_\nu \partial_{\nu'} u &= g_{\mu\nu} \partial_{\nu'} u. \end{aligned}$$

Свободные уравнения движения для массивного поля спина $s = 2$ на пространстве, являющемся пространством Эйнштейна, имеют следующий вид [13]:

$$D^\sigma D_\sigma \phi_{\mu\nu} + (2 - m^2) \phi_{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

$$D^\sigma \phi_{\sigma\mu} = 0, \quad \phi_\sigma^\sigma = 0. \quad (5)$$

Отметим, что уравнения (4), (5) могут быть получены из единого уравнения второго порядка [16]

$$D^\sigma D_\sigma \phi_{\mu\nu} + (2 - m^2) \phi_{\mu\nu} - D_\mu D^\sigma \phi_{\sigma\nu} - D_\nu D^\sigma \phi_{\sigma\mu} + D_\mu D_\nu \phi_\sigma^\sigma - 2g_{\mu\nu} \phi_\sigma^\sigma + g_{\mu\nu} (D^\sigma D^\rho \phi_{\sigma\rho} - D^\rho D_\rho \phi_\sigma^\sigma + d\phi_\sigma^\sigma + m^2 \phi_\sigma^\sigma) = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение содержит связи, отвечающие бесследовости и поперечности тензора $\phi_{\mu\nu}$, а однозначность его выбора обусловлена тем, что при $d = 4$ и $m^2 = k(k + 4)$ оно воспроизводит свободную часть уравнений теории ИВ супергравитации, компактифицированной на S^5 , для массивных мод метрики, возмущенной относительно метрики AdS_5 . Следуя работе [16], покажем, как из уравнения (6) получается система (4), (5). Обозначив левую часть уравнения (6) символом $E_{\mu\nu}$, получаем следующие тождества [16]:

$$\begin{aligned} 0 &= D^\mu E_{\mu\nu} = -m^2 D^\mu \phi_{\mu\nu} + m^2 D_\nu \phi_\sigma^\sigma, \\ 0 &= \frac{m^2}{d-1} g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} + D^\mu D^\nu E_{\mu\nu} = \frac{dm^2}{d-1} (m^2 - d - 1) \phi_\sigma^\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, видно, что уравнения (5) действительно содержатся в уравнении (6). Окончательно, подставляя (5) в (6), получаем уравнение (4).

Для вычисления пропагатора поля $\phi_{\mu\nu}$ мы добавляем в уравнения движения внешний источник $T_{\mu\nu}$. Для того чтобы выполнялись уравнения связи (5), нужно потребовать, чтобы тензор $T_{\mu\nu}$ был поперечным и бесследовым. Как обычно, представим решение уравнения (6) с внешним источником в правой части в виде

$$\phi_{\mu\nu}(x) = \int d^{d+1}y \sqrt{g} G_{\mu\nu;\mu'\nu'}(x, y) T^{\mu'\nu'}(y), \quad (7)$$

где $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}(x, y)$ является пропагатором поля $\phi_{\mu\nu}$ и, следовательно, удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &D^\sigma D_\sigma G_{\mu\nu;\mu'\nu'} + (2 - m^2) G_{\mu\nu;\mu'\nu'} - D_\mu D^\sigma G_{\sigma\nu;\mu'\nu'} - \\ &- D_\nu D^\sigma G_{\sigma\mu;\mu'\nu'} + D_\mu D_\nu G_{\sigma;\mu'\nu'}^\sigma - 2g_{\mu\nu} G_{\sigma;\mu'\nu'}^\sigma + \\ &+ g_{\mu\nu} (D^\sigma D^\rho G_{\sigma\rho;\mu'\nu'} - D^\rho D_\rho G_{\sigma;\mu'\nu'}^\sigma + dG_{\sigma;\mu'\nu'}^\sigma + m^2 G_{\sigma;\mu'\nu'}^\sigma) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} (g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} + g_{\mu\nu'} g_{\nu\mu'}) \delta(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}(x, y)$ является бесследовым поперечным тензором с точностью до локальных членов

$$G_{\sigma;\mu'\nu'}^\sigma = \frac{d-1}{dm^2(m^2-d-1)} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{2m^2}{d-1} g_{\mu'\nu'} + D_{\mu'} D_{\nu'} + D_{\nu'} D_{\mu'} \right) \delta(x, y), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D^\sigma G_{\sigma\nu;\mu'\nu'} &= \frac{d-1}{dm^2(m^2-d-1)} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{2m^2}{d-1} g_{\mu'\nu'} + D_{\mu'} D_{\nu'} + D_{\nu'} D_{\mu'} \right) D_\nu \delta(x, y) - \\ &- \frac{1}{m^2} \frac{1}{\sqrt{g}} (g_{\nu\mu'} D_{\nu'} + g_{\nu\nu'} D_{\mu'}) \delta(x, y). \end{aligned} \quad (10)$$

Однако следует отметить, что структура локальных членов и свойства тензора $T_{\mu'\nu'}$ приводят к тому, что выражение (7) действительно удовлетворяет уравнениям связи (5).

Представим пропагатор $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}(x, y)$ в виде разложения по МСФ-битензорам:

$$G_{\mu\nu;\mu'\nu'} = T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(1)} A(u) + T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(2)} B(u) + T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(3)} C(u) + \\ + T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(4)} D(u) + T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(5)} E(u), \quad (11)$$

где

$$T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(1)} = g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'}, \\ T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(2)} = \partial_\mu u \partial_\nu u \partial_{\mu'} u \partial_{\nu'} u, \\ T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(3)} = \partial_\mu \partial_{\mu'} u \partial_\nu \partial_{\nu'} u + \partial_\mu \partial_{\nu'} u \partial_\nu \partial_{\mu'} u, \\ T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(4)} = g_{\mu\nu} \partial_{\mu'} u \partial_{\nu'} u + g_{\mu'\nu'} \partial_\mu u \partial_\nu u, \\ T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(5)} = \partial_\mu \partial_{\mu'} u \partial_\nu u \partial_{\nu'} u + \partial_\nu \partial_{\mu'} u \partial_\mu u \partial_{\nu'} u + (\mu' \leftrightarrow \nu'). \quad (12)$$

Все выписанные битензоры симметричны относительно замены $\mu \leftrightarrow \nu$, $\mu' \leftrightarrow \nu'$, а также относительно перестановки $(\mu\nu) \leftrightarrow (\mu'\nu')$, что отвечает симметриям тензора $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}$. Для удобства дальнейших вычислений перегруппируем члены в выражении (11) таким образом, чтобы выделить полные производные:

$$G_{\mu\nu;\mu'\nu'} = (\partial_\mu \partial_{\mu'} u \partial_\nu \partial_{\nu'} u + \partial_\mu \partial_{\nu'} u \partial_\nu \partial_{\mu'} u) G(u) + g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} H(u) + \\ + D_{(\mu} [\partial_{\nu)} \partial_{\mu'} u \partial_{\nu'} u X(u)] + D_{(\mu'} [\partial_{\nu')} \partial_\mu u \partial_\nu u X(u)] + \\ + D_{(\mu} [\partial_{\nu)} u \partial_{\mu'} u \partial_{\nu'} u Y(u)] + D_{(\mu'} [\partial_{\nu')} u \partial_\mu u \partial_\nu u Y(u)] + \\ + D_\mu [\partial_\nu u Z(u)] g_{\mu'\nu'} + D_{\mu'} [\partial_{\nu'} u Z(u)] g_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Представления (11) и (13) для $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}$ являются эквивалентными, поскольку фигурирующие в них скалярные функции связаны друг с другом простым преобразованием:

$$A = H + 2(1 + u)Z, \quad B = 2Y', \quad C = G + 2X, \\ D = 2X + (1 + u)Y + Z', \quad E = X' + Y, \quad (14)$$

которое, очевидно, обратимо. Таким образом, решение уравнения (8) может быть выписано в любом из двух базисов (11), (13).

Подстановка тензора $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}$ в форму (13) в уравнение (8) и приравнивание нулю выражений, возникающих перед каждым независимым МСФ-битензором, приводит к следующей системе дифференциальных уравнений на коэффициентные функции G , H , X , Y и Z :

$$2G'' - (1 + u)(d - 1)Y'' - 2(d - 1 + m^2)Y' - 2(d - 1)X'' + (d - 1)Z''' = 0, \quad (15)$$

$$2G'' + (d - 1)H'' + (d - 1)(1 + u)Z'' - 2(d - 1)(1 + u)X' - (d - 1)(1 + u)^2 Y' + \\ + (2d - 2 - m^2)Z' - 2(2d - 2 + m^2)X - (3d - 3 + m^2)(1 + u)Y = 0, \quad (16)$$

$$(1 + u)G'' + (d - 1)G' + (2d - 2 + m^2)X' + (d - 1)(1 + u)Y' + \\ + (d - 1 + m^2)Y - (d - 1)Z'' = 0, \quad (17)$$

$$u(2 + u)G'' + (d - 1)(1 + u)G' + (2 - 2d - m^2)G + (d - 1)Z' - (d - 1)(1 + u)Y + \\ + 2(1 - d - m^2)X = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(x, y). \quad (18)$$

Сделаем некоторые замечания относительно выписанной системы. Уравнения (15)–(18) соответствуют битензорам $T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(2)}$, $T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(3)}$, $T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(4)}$ и $T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(5)}$, в то время как уравнения, соответствующие битензорам $T_{\mu\nu;\mu'\nu'}^{(1)}$ и $g_{\mu\nu}\partial_{\mu'}u\partial_{\nu'}u$, являются зависимыми и, следовательно, не будут участвовать в последующих рассмотрениях. Интегрируя уравнение (15), получаем

$$2G' - (1+u)(d-1)Y' - (d-1+2m^2)Y - 2(d-1)X' + (d-1)Z'' = 0. \quad (19)$$

Складывая (17) и (19), находим

$$(1+u)G'' + (d+1)G' + m^2X' - m^2Y = 0. \quad (20)$$

Далее, интегрирование (17) с использованием (20) дает

$$2(1+u)G' + 2(d-1)G + 2(d-1+m^2)X + (d-1)(1+u)Y - (d-1)Z' = 0. \quad (21)$$

Складывая теперь (18) и (21), получаем уравнение второго порядка на функцию G :

$$u(2+u)G'' + (d+1)(1+u)G' - m^2G = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta(x, y). \quad (22)$$

Решение этого уравнения однозначно определяется тем условием, что сингулярность при $u \rightarrow 0$ должна совпадать с сингулярностью в случае плоского пространства, а также требованием быстрого убывания на бесконечности ($u \rightarrow \infty$). В результате решение для функции $G(u)$ дается формулой

$$G(u) = \frac{\Gamma(\Delta)}{2^{\Delta+1}\pi^{d/2}\Gamma(\Delta-d/2+1)}z^{-\Delta}{}_2F_1\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta+1}{2}; \Delta - \frac{d}{2} + 1; z^{-2}\right), \quad (23)$$

где $z = 1 + u$ и

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m^2}.$$

Сконцентрируем наше внимание на функциях X , Y , Z и H . С этой целью воспользуемся соотношением (9) и разложим $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}$ по базису фундаментальных битензоров, приравнивая выражение, стоящее перед структурой $\partial_{\mu'}u\partial_{\nu'}u$, к нулю:

$$2G + 4(1+u)X' + 2(d+3)X + 2u(2+u)Y' + (d+5)(1+u)Y + (d+1)Z' = \mathcal{F}. \quad (24)$$

Здесь $\mathcal{F}(u)$ обозначает функцию, возникающую перед $\partial_{\mu'}u\partial_{\nu'}u$ в разложении правой части (9) по битензорам. Аналогично, раскладывая $G_{\mu\nu;\mu'\nu'}$ и подставляя в соотношение (10), находим

$$2u(2+u)Y'' + (2d+11)(1+u)Y' + (2d+7)Y + 2(1+u)X'' + 2(d+4)X' + Z'' = \mathcal{F}'. \quad (25)$$

В данном случае мы ограничились рассмотрением фундаментального битензора $\partial_\nu u \partial_{\mu'} u \partial_{\nu'} u$. Далее, разрешая уравнения (18) и (24) относительно Z' и принимая во внимание (22), получаем

$$\begin{aligned} & (d+1)(1+u)G' + (d+2)(d-1)G + 2(d-1)(1+u)X' + \\ & + (2(d+2)(d-1) + m^2(d+1))X + \\ & + (d-1)u(2+u)Y' + (d+3)(d-1)(1+u)Y = \frac{d-1}{2}\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (26)$$

Дифференцирование уравнения (21), а затем использование (25) с последующим интегрированием по переменной u дает

$$\begin{aligned} & (d-1)(u(2+u)Y' + (d+4)(1+u)Y + (1+u)X' + (d+4)X) + \\ & + m^2X + (1+u)G' + (d-1)G = \frac{d-1}{2}\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычитая (25) из (27) и принимая во внимание (20), находим следующее выражение для функции X :

$$X = \frac{1}{dm^2(d-1+m^2)} [(d-1)(1+u)^2G'' + (d^2-1-dm^2)(1+u)G' - m^2(d^2-1)G]. \quad (28)$$

Повторное использование уравнения (20) приводит к выражению для Y :

$$\begin{aligned} Y = & \frac{1}{dm^2(d-1+m^2)} \times \\ & \times [(d-1)(1+u)^2G''' + (2d^2+d-3)(1+u)G'' + ((d^2-1)(d+1) + m^2)G']. \end{aligned} \quad (29)$$

Дважды интегрируя (15) с учетом (20), получаем

$$\begin{aligned} (d-1)Z' = & \frac{d-1}{m^2}(1+u)^2G'' + \frac{d^2-1+2m^2}{m^2}(1+u)G' + \\ & + 2(d-1)G + (d-1)(1+u)X' + 2(d-1+m^2)X. \end{aligned} \quad (30)$$

После подстановки найденного решения для X и последующего интегрирования мы приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{dm^2(d-1+m^2)} [(d-1)(1+u)^3G'' + 2(d^2-1+m^2)(1+u)^2G' + \\ & + ((d-1)(d^2-1) + m^2(2d-1))((1+u)G - q')] - \frac{2}{d}q', \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$q''(u) = G(u), \quad q(\infty) = q'(\infty) = 0.$$

Объединяя уравнения (15), (16) и (18) и принимая во внимание (19), находим

$$\begin{aligned} & (1+u)^2G'' + (d+3)(1+u)G' + 2G'' + 4(d-1)G + \\ & + m^2(1+u)X' + 2m^2X + (d-1)H'' - m^2Z' = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Разрешая уравнения (30) и (32) относительно Z' , можно выразить H'' через G и X следующим образом:

$$H'' = \frac{2m^4}{(d-1)^2}X - \frac{2}{(d-1)^2} \times \\ \times [(d-1)G'' + (d-1-m^2)(1+u)G' + (d-1)(2(d-1)-m^2)G]. \quad (33)$$

Наконец, подставляя выражение (28) в (33) и выполняя интегрирование, получаем

$$H = \frac{2}{d(d-1)(d-1+m^2)} [m^2(1+u)^2G - d(d-1+m^2)G + \\ + ((d-3)m^2 - d(d-1))(1+u)q' + \\ + (2d(d-1)(2-d) - m^2(d+d^2+m^2-4))q]. \quad (34)$$

Таким образом, полное решение для пропагатора массивного тензорного поля дается соотношением (13), где скалярные функции G , X , Y , Z и H определяются формулами (23), (28), (29), (31) и (34), соответственно. Заметим, что в пределе $m^2 \rightarrow 0$ функции G и H совпадают с калибровочно-инвариантной частью гравитонного пропагатора [12], в то время как функции X , Y , Z сингулярны в этом пределе.

3. СТРУКТУРА ПРОПАГАТОРА НА ГРАНИЦЕ ПРОСТРАНСТВА AdS

Полученное выражение для пропагатора массивного тензорного поля позволяет проанализировать его связь с функцией Грина данного поля, а также с двухточечной корреляционной функцией соответствующего оператора в граничной КТП. Напомним, что, как было замечено в работе [17], существует довольно простая связь между пропагатором скалярного поля $G(x_1, x_2)$ на пространстве AdS и функцией Грина $K(x_1, \vec{x}_2)$:

$$K(x_1, \vec{x}_2) = \lim_{x_{20} \rightarrow 0} C x_{20}^{-\Delta} G(x_1, x_2).$$

Здесь $C = 2\Delta - d$ и $\Delta = d/2 + \sqrt{(d/2)^2 + m^2}$ [18]. Таким образом, возникает возможность извлечения n -точечной корреляционной функции в граничной КТП исходя из соответствующего пропагатора, вычисленного на пространстве AdS. Для этого следует умножить пропагатор на подходящую степень x_{i0} и взять предел, при котором x_{i0} стремится к нулю:

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}(\vec{x}_n) \rangle = C_1 \dots C_n \lim_{x_{i0} \rightarrow 0} \left(\prod_{i=1}^n x_{i0}^{-\Delta_i} \right) G(x_1, \dots, x_n). \quad (35)$$

Данное соотношение предполагает естественную идентификацию между квантовым полем $\hat{\phi}(x)$ на пространстве AdS и соответствующим ему оператором $\mathcal{O}(\vec{x})$ в граничной КТП [19]. А именно, мы имеем

$$\mathcal{O}(\vec{x}) = C \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{-\Delta} \hat{\phi}(x). \quad (36)$$

Происхождение множителя $x_0^{-\Delta}$ в формуле (36) имеет следующее объяснение. Поле $\hat{\phi}(x)$ инвариантно относительно преобразований изометрий пространства AdS, в то время как оператор $\mathcal{O}(\vec{x})$ преобразуется как примарное поле конформной размерности Δ . Заметим, что преобразование $\mathcal{O}(\vec{x})$ индуцируется изометриями пространства AdS в пределе $x_0 \rightarrow 0$. Используя параметризацию (1), отмеченные изометрии приводим к следующему виду:

$$\delta x^i = -\xi^i - x_0^2 \Lambda_K^i, \quad (37)$$

$$\delta x_0 = x_0 (2x_j \Lambda_K^j - \lambda_D) \equiv x_0 \Lambda_D, \quad (38)$$

где

$$\xi^i = a^i + \lambda_M^{ij} x_j + \lambda_D x^i + (\vec{x}^2 \Lambda_K^i - 2x^i x_j \Lambda_K^j).$$

Здесь параметры a^i , λ_M^{ij} , λ_D и Λ_K^i соответствуют сдвигам, лоренцевым вращениям и бустам, дилатациям и специальным конформным преобразованиям, соответственно. Скалярное поле инвариантно относительно перечисленных преобразований, т.е. $\delta \hat{\phi}(x) = 0$, в то время как поле $x_0^{-\Delta} \hat{\phi}(x)$ преобразуется по правилу

$$\delta(x_0^{-\Delta} \hat{\phi}(x)) = \delta(x_0^{-\Delta}) \hat{\phi}(x) + x_0^{-\Delta} \delta \hat{\phi}(x) = -\Delta \Lambda_D x_0^{-\Delta} \hat{\phi}(x).$$

Таким образом, мы установили, что $x_0^{-\Delta} \hat{\phi}(x)$ является примарным полем конформной размерности Δ . В пределе $x_0 \rightarrow 0$ преобразования (37) сводятся к обычным конформным отображениям плоского пространства и $x_0^{-\Delta} \hat{\phi}(x)$ становится оператором конформной размерности Δ .

Идентификация (36) незначительно модифицируется в случае, когда рассматриваются поля ϕ_s с ненулевым спином s , и принимает форму

$$\mathcal{O}_s(\vec{x}) = C \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{-(\Delta - [s])} \hat{\phi}_s(x), \quad (39)$$

где $[n]$ обозначает целую часть числа n . Данное обстоятельство подсказывает следующую модификацию соотношения (35):

$$\langle \mathcal{O}_{s_1}(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}_{s_n}(\vec{x}_n) \rangle = C_1 \dots C_n \lim_{x_{i0} \rightarrow 0} \left(\prod_{i=1}^n x_{i0}^{-\Delta_i + [s_i]} \right) G_{\{s_i\}}(x_1, \dots, x_n). \quad (40)$$

Покажем теперь, как реализуется данная формула в случае массивного тензорного поля, рассмотренного ранее.

Из формулы (2) следует, что хордовое расстояние u расходится в пределе $y_0 \rightarrow 0$, так что для вычисления правой части соотношения (40), где $G_{\{s_i\}}(x_1, x_2)$ было найдено в предыдущем разделе, необходимо знать поведение функции $G(u)$ в пределе, когда аргумент стремится к бесконечности. Принимая во внимание разложение Тейлора для гипергеометрической функции [20], находим

$$G = \frac{1}{2\pi^{d/2}} \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta - d/2 + 1)} \left(\frac{2}{z} \right)^\Delta + \frac{\Gamma(\Delta + 2)}{\Gamma(\Delta - d/2 + 2)} \left(\frac{2}{z} \right)^{\Delta+2} \right) + O\left(\frac{1}{z} \right)^{\Delta+4}. \quad (41)$$

Теперь воспользуемся формулами (14), а также зависимостью X , Y , Z и H от функции G и разложим последнюю в ряд Тейлора, принимая во внимание (41). В результате получим

$$\begin{aligned} A(u) &= -\frac{(\Delta+1)}{2^\Delta \pi^{d/2} d} \frac{\Gamma(\Delta-1)}{\Gamma(\Delta-d/2+1)} z^{-\Delta} + O(z^{-\Delta-2}), \\ B(u) &= \frac{\Delta+1}{2^\Delta \pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta-1)}{\Gamma(\Delta-d/2+1)} z^{-\Delta-2} + O(z^{-\Delta-4}), \\ C(u) &= \frac{\Delta+1}{2^{\Delta+1} \pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta-1)}{\Gamma(\Delta-d/2+1)} z^{-\Delta} + O(z^{-\Delta-2}), \\ D(u) &= \frac{(\Delta+1)}{2^\Delta \pi^{d/2} d} \frac{\Gamma(\Delta-1)}{\Gamma(\Delta-d/2+1)} z^{-\Delta-2} + O(z^{-\Delta-4}), \\ E(u) &= -\frac{(\Delta+1)}{2^{\Delta+1} \pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta-1)}{\Gamma(\Delta-d/2+1)} z^{-\Delta-1} + O(z^{-\Delta-3}). \end{aligned}$$

Напомним, что $z = 1 + u$. Подставляя полученные разложения в формулу (11) и используя явные выражения для битензоров (12), а также соотношения (3), находим

$$\begin{aligned} \lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0^{-(\Delta-2)} G_{\mu\nu; i'j'}(x, y) &= \frac{1}{\Delta-d/2} \frac{\Delta+1}{\Delta-1} \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta-d/2)} \times \\ &\times \frac{x_0^{\Delta-2}}{(x_0^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2)^\Delta} J_{\mu k}(x_0, \vec{x} - \vec{y}) J_{\nu l}(x_0, \vec{x} - \vec{y}) P_{kl; i'j'}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}(x) &= \delta_{\mu\nu} - \frac{2x_\mu x_\nu}{x^2}, \\ P_{kl; i'j'} &= \frac{1}{2} \delta_{ki'} \delta_{lj'} + \frac{1}{2} \delta_{kj'} \delta_{li'} - \frac{1}{d} \delta_{kl} \delta_{i'j'}. \end{aligned}$$

Сравнивая выражение (42) с соответствующей функцией Грина для массивного тензорного поля, полученной в импульсном представлении в работе [14], приходим к следующему соотношению:

$$K_{\mu\nu; i'j'}(x, \vec{y}) = \left(\Delta - \frac{d}{2} \right) \lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0^{-(\Delta-2)} G_{\mu\nu; i'j'}(x, y). \quad (43)$$

Следует отметить, что функция Грина $K_{\mu\nu; i'j'}(x, \vec{y})$ может быть независимо получена путем решения уравнения (6) с внешним источником $T_{ij}(\vec{x})$, зависящим от координаты $\vec{x}$ границы пространства AdS. Таким образом, соотношение (43) есть не что иное, как пропагатор поля спина $s = 2$ с граничным условием Дирихле. В пределе $x_0 \rightarrow 0$ тензор $G_{\mu\nu; \mu'0}$ стремится к нулю быстрее, чем $G_{\mu\nu; i'j'}$. Наконец, для того чтобы установить соответствие с формулой (40), рассмотрим предел при $x_0 \rightarrow 0$ функции $K_{\mu\nu; i'j'}$. Данный предел, определяющий двухточечную корреляционную функцию, равен

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{d}{2} \right) \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{-(\Delta-2)} K_{ij; i'j'}(x, \vec{y}) &= \\ &= \frac{(\Delta-d/2)(\Delta+1)\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}(\Delta-1)\Gamma(\Delta-d/2)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\Delta}} J_{ik}(\vec{x} - \vec{y}) J_{jl}(\vec{x} - \vec{y}) P_{kl; i'j'}. \end{aligned}$$

Полученное выражение полностью воспроизводит результат работы [14]. Используя формулу (43), находим

$$\langle \mathcal{O}_{ij}(\vec{x}) \mathcal{O}_{i'j'}(\vec{y}) \rangle = \left(\Delta - \frac{d}{2} \right)^2 \lim_{x_0, y_0 \rightarrow 0} x_0^{-\Delta+2} y_0^{-\Delta+2} G_{ij;i'j'}(x, y).$$

Таким образом, идентификация между массивным тензорным полем, распространяющимся на пространстве AdS, и примарным киральным оператором $\mathcal{O}_{ij}(\vec{x})$ принимает следующий вид:

$$\mathcal{O}_{ij}(\vec{x}) = \left(\Delta - \frac{d}{2} \right) \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{-\Delta+2} \phi_{ij}(x). \quad (44)$$

Наиболее изученным примером AdS/CFT-соответствия является случай, когда фоновым пространством служит $AdS_5 \times S^5$. Тогда $d = 4$ и $m^2 = k(k+4)$, а выражение (44) правильно воспроизводит двухточечный коррелятор примарного кирального поля спина $s = 2$ и конформной размерности $k+4$ в $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ -суперсимметричной теории Янга–Миллса.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы построили пропагатор массивного симметрического тензорного поля ранга 2 на евклидовом продолжении пространства AdS. В вычислениях использовался тот факт, что пропагатор на пространстве AdS инвариантен относительно изометрий пространства и, следовательно, зависит только от одной скалярной переменной – хордового расстояния в пространстве вложения.

Также мы рассмотрели поведение пропагатора в пределе, когда тензорное поле принимает значение на границе пространства AdS. Мы показали, что полученные в этом пределе выражения совпадают с функцией Грина и двухточечной корреляционной функцией в граничной КТП. Данное обстоятельство предоставляет еще одно свидетельство в пользу того, чтобы рассматривать операторы граничной КТП как некоторые пределы квантовых полей, определенных на пространстве AdS.

Процедура нахождения двухточечной корреляционной функции в граничной КТП, использованная в настоящей работе, представляется более естественной, нежели стандартная процедура, требующая решения граничной задачи Дирихле с последующим вычислением гравитационного действия на массовой поверхности. Наш подход позволяет избежать как проблемы расходимостей, так и сложности нахождения граничных членов в некоторых случаях. Также нам не пришлось прибегать к так называемой ϵ -регуляризации, которая явно нарушает конформную инвариантность и значительно усложняет вычисления. Полученный с помощью нашей процедуры коррелятор автоматически удовлетворяет конформным тождествам Уорда.

В заключение заметим, что полученный пропагатор может быть использован для исследований в области AdS/CFT-соответствия. В частности, для определения n -точечной корреляционной функции, построенной из операторов $\mathcal{O}_{ij}(\vec{x})$ в граничной КТП, требуется использование пропагатора массивного симметрического тензорного поля.

Благодарности. Автор благодарит Г.Э. Арутюнова и С.А. Фролова за помощь при постановке задачи, а также О.А. Рычкова за ценные обсуждения во время работы над статьей. Эта работа была частично поддержана грантами РФФИ № 99-01-00193 и 01-01-06093.

Список литературы

- [1] *O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz.* Phys. Rep. 2000. V. 323. P. 183; hep-th/9905111.
- [2] *C. Fronsdal.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 589.
- [3] *C. P. Burgess, C. A. Lutken.* Phys. Lett. B. 1985. V. 153. P. 137.
- [4] *C. Dullemond, E. van Beveren.* J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 2050.
- [5] *C. P. Burges, D. Z. Freedman, S. Davis, G. W. Gibbons.* Ann. Phys. 1986. V. 167. P. 285.
- [6] *B. Allen, T. Jacobson.* Commun. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 669.
- [7] *B. Allen, M. Turyn.* Nucl. Phys. B. 1987. V. 292. P. 813.
- [8] *M. Turyn.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 669.
- [9] *I. Antoniadis, E. Mottola.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 1037.
- [10] *A. A. Tseytlin, Hong Liu.* Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 086002; hep-th/9807097.
- [11] *E. D'Hoker, D. Z. Freedman.* Gauge boson exchange in AdS_{d+1} . hep-th/9809179.
- [12] *E. D'Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 544. P. 612; hep-th/9902042.
- [13] *H. J. Kim, L. J. Romans, P. van Nieuwenhuizen.* Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 389.
- [14] *A. Polishchuk.* JHEP. 1999. V. 9907. P. 007; hep-th/9905048.
- [15] *W. Mück, K. S. Viswanathan.* Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 106006; hep-th/9805145.
- [16] *I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, V. D. Pershin.* Phys. Lett. B. 1999. V. 466. P. 216; hep-th/9908028.
- [17] *T. Banks, M. Douglas, G. Horowitz, E. Martinec.* AdS dynamics from conformal field theory. hep-th/9808016; U. Chicago preprint EFI-98-30. Chicago: Chicago Univ., 1998.
- [18] *I. R. Klebanov, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 556. P. 89; hep-th/9905104.
- [19] *J. Polchinski.* S-matrices from AdS spacetime. hep-th/9901076.
- [20] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. М.: Наука, 1973, 1974.

Поступила в редакцию 15.XI.2002 г.