Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Карасёв, Е. М. Новикова, Алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями для аксиально-возмущенного поля Кулона–Дирака, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 3, 424–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:44:39

© 2004 г.

М. В. Карасев*, Е. М. Новикова*

АЛГЕБРА С КВАДРАТИЧНЫМИ КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ ДЛЯ АКСИАЛЬНО-ВОЗМУЩЕННОГО ПОЛЯ КУЛОНА–ДИРАКА

Движение частицы в поле электромагнитного монополя (поле Кулона–Дирака), которое возмущено аксиально-симметричным потенциалом, после квантового усреднения описывается интегрируемой системой. Ее гамильтониан выражается через образующие алгебры с квадратичными коммутационными соотношениями. Строятся неприводимые представления этой алгебры дифференциальными операторами второго порядка, а также ее гипергеометрические когерентные состояния. С помощью таких состояний в первом приближении по возмущающему полю получено интегральное представление собственных функций исходной задачи через решения модельного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка типа Хейна и указана асимптотика соответствующих собственных значений.

Ключевые слова: интегрируемые системы, монополь Дирака, нелинейные коммутационные соотношения, когерентные состояния, спектральные асимптотики.

Эта статья открывает цикл работ, посвященных 30-летию выхода в свет книги В. П. Маслова “Операторные методы” [1], послужившей отправной точкой многих современных исследований в области некоммутативного анализа и квантовой геометрии

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о классическом движении, а также о квантовом спектре и собственных состояниях заряженной частицы в электрическом и магнитном полях различных конфигураций – это неисчерпаемая тема математической физики. Достаточно упомянуть, что при расширенном понимании электрического и магнитного полей (электрический потенциал – это гамильтониан, а тензор магнитной напряженности – симплектическая структура) данная задача содержит внутри себя, по существу, любую модель классической и квантовой механики.

*Московский государственный институт электроники и математики, Москва, Россия. E-mail: karasev@miem.edu.ru; novikova@miem.edu.ru

Такая неинтегрируемая система общего положения, однако, существенно упрощается для некоторых специальных конфигураций полей. Помимо тривиального варианта однородного поля, другие простейшие интегрируемые случаи (для трех степеней свободы) — это:

- а) кулоновское поле точечного электрического заряда,
- б) дираковское поле точечного магнитного заряда,
- в) поле Кулона–Дирака, комбинирующее случаи “а” и “б”.

Этим моделям отвечает одна и та же алгебра симметрий $so(4)$.

Если к центральному полю типа “а”, “б”, “в” добавить *возмущающее поле*, то система, вообще говоря, будет неинтегрируемой. С помощью метода усреднения ее можно асимптотически редуцировать к системе с фазовым пространством меньшей размерности (этим фазовым пространством служат орбиты коприсоединенного представления алгебры $so(4)$, т.е. прямое произведение двух сфер $S^2 \times S^2$). Новая система, вообще говоря, опять неинтегрируема. Однако для некоторых специальных конфигураций возмущающего поля она оказывается интегрируемой. Именно такие случаи интересуют нас в данной работе.

Наличие у усредненной системы дополнительного интеграла движения (что и приводит к интегрируемости) означает, что вместо алгебры $so(4)$ возникает иная алгебра, а именно алгебра $\mathcal{F}$ функций на $so(4)^*$, которые коммутируют с дополнительным интегралом движения.

Алгебра $\mathcal{F}$ — это та динамическая алгебра, через образующие которой записывается гамильтониан усредненной системы (см. [2], [3]). В квантовом случае образующие $N = (N_0, \dots, N_n)$ алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ подчинены некоторым коммутационным соотношениям

$$[N_j, N_k] = -i\hbar \Psi_{jk}(N). \quad (1.1)$$

Здесь в правой части компоненты (квантового) тензора Ψ_{jk} — функции от образующих алгебры.

Заметим, что получить в соотношениях (1.1) линейные функции Ψ_{jk} , т.е. свести задачу к случаю алгебр Ли, вообще говоря, не удастся (за исключением вырожденных вариантов). Соотношения (1.1), как правило, даже не алгебраические. Однако иногда, в некоторых координатах, удастся добиться факта полиномиальности функций Ψ_{jk} , например, добиться, чтобы они были квадратичными или кубическими функциями.

Конфигурации электрического и магнитного полей, для которых соотношения (1.1) *полиномиальны*, являются в своем роде замечательными. Дело в том, что в полиномиальном случае для соотношений вида (1.1) удастся построить неприводимые представления, реализованные обыкновенными дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами. Эти операторы действуют по комплексной координате на симплектических листах пуассоновой алгебры, отвечающей соотношениям (1.1).

В результате гамильтониан редуцированной системы в тех случаях, когда он тоже является полиномиальной функцией от образующих N_j , сводится (в неприводимом представлении) к некоторому обыкновенному дифференциальному оператору порядка 2 или выше с полиномиальными коэффициентами. В ряде случаев возникающий оператор —

это модельный, известный в теории специальных функций оператор, например, оператор типа Хейна. Действует он в конечномерном пространстве полиномов от комплексной координаты на симплектических листах. Его собственные функции – некоторые полиномы.

Возвращение в исходное представление осуществляется с помощью спаривания этих полиномов с когерентными состояниями¹⁾ и применения квантового усредняющего преобразования.

Таким образом, *асимптотика собственных функций исходной квантовой системы задается через модельные полиномы, а асимптотика спектра вычисляется явно с помощью квантовой геометрии [5], [6] симплектических листов алгебры (1.1).*

Реализация этой программы применительно к движению частицы в электромагнитных полях была осуществлена вначале для случая кулоновского центрального поля “а”, возмущенного однородным магнитным полем. В квантовой механике эта модель называется *эффектом Зеемана*. Соответствующая ей динамическая алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ была найдена в работе [7]. Коммутационные соотношения (1.1) в этом случае оказываются *квадратичными*. Они имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] &= \frac{i\hbar}{2}(\mathbf{N}_0\mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_3\mathbf{N}_0), & [\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1] &= 2i\hbar\mathbf{N}_2, \\ [\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3] &= -\frac{i\hbar}{2}(\mathbf{N}_0\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1\mathbf{N}_0), & [\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_2] &= -2i\hbar\mathbf{N}_1, \\ [\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1] &= -\frac{i\hbar}{2}(\mathbf{N}_0\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2\mathbf{N}_0), & [\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_3] &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В работах [7]–[9] были построены неприводимые представления и когерентные состояния этой квадратичной алгебры, а также найдена реализация редуцированного гамильтониана в виде модельного дифференциального оператора второго порядка типа Хейна в главном члене теории возмущений (и операторов более высокого порядка, четвертого и выше, в следующих приближениях). В итоге для исходного гамильтониана эффекта Зеемана был построен полный геометрически инвариантный и явный алгоритм приближенного вычисления спектра и собственных функций, который обобщил известные ранее результаты Аврона–Саймона, Соловьева, Херрика, Деланда–Гей.

Развитие использованной в [7]–[9] схемы построения неприводимых представлений и когерентных состояний для алгебр с более общими нелинейными коммутационными соотношениями содержится в работах [10]–[12].

Алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями (1.2) относится к типу алгебр, рассмотренных в работах [13]. Она напоминает алгебры, возникшие в исследованиях школы Фаддеева по бесконечномерным интегрируемым моделям (Замолотчиков, Кулиш, Решетихин, Склянин и др.; см., например, [14]). Алгебра (1.2) замечательна тем, что она возникает в элементарной трехмерной модели эффекта Зеемана, с которой, в известном смысле, началась история квантовой механики.

¹⁾Об общих свойствах когерентных состояний см. в работах [4].

В данном цикле статей мы указываем и исследуем другие алгебры с полиномиальными соотношениями (точнее, семейства алгебр), которые соответствуют другим конфигурациям электрического и магнитного полей.

Первое семейство алгебр связано с *монополем Дирака*. Точнее, мы рассматриваем точечный источник, который несет два типа заряда: электрический и магнитный. Возникает электромагнитный монополю – комбинация кулоновского электрического и дираковского магнитного полей. В указанном выше списке интегрируемых случаев это вариант “в”. Это комбинированное поле известно также как модель Макинтоша–Кизнелера [15]. Ее интегрируемость исследовалась в целом ряде работ, см. [16]–[19] и др.

Если к полю Кулона–Дирака добавлено возмущающее *аксиально-симметричное поле*, то эта конфигурация сама по себе дает неинтегрируемую систему, однако после усреднения здесь возникает интегрируемая система. Дополнительный интеграл движения – это третья компонента углового момента. Динамическая алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ в этом случае имеет пять образующих со следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [N_1, N_2] &= i\hbar(N_0 N_3 + \mu N_4), & [N_0, N_1] &= 2i\hbar N_2, \\ [N_2, N_3] &= -\frac{i\hbar}{2}(N_0 N_1 + N_1 N_0), & [N_0, N_2] &= -2i\hbar N_1, \\ [N_3, N_1] &= -\frac{i\hbar}{2}(N_0 N_2 + N_2 N_0), & [N_0, N_3] &= 0, \\ [N_4, N_j] &= 0, & j &= 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь параметр μ – магнитный заряд монополя, на который накладывается условие квантования (электрический заряд предполагается равным единице).

Алгебра (1.3) является деформацией алгебры (1.2), параметром деформации служит магнитный заряд μ . Для алгебры с соотношениями (1.3) может быть развита теория неприводимых представлений, аналогичная случаю (1.2).

Здесь образующие N_j в неприводимом представлении также реализуются обыкновенными дифференциальными операторами второго порядка. Если потенциал возмущающего аксиально-симметричного поля в декартовых координатах квадратичен, то после усреднения новый возмущающий гамильтониан будет линейной функцией от образующих N_j (в главном члене теории возмущений). В неприводимом представлении этот гамильтониан даст модельный дифференциальный оператор второго порядка, принадлежащий к классу операторов Хейна. Таким образом, для данной конфигурации – поле Кулона–Дирака + аксиально-симметричный квадратичный потенциал – оказывается возможным построить полный аналог теории возмущений и теории представлений, развитый в работах [7], [8] для эффекта Зеемана. Получающийся спектр и собственные функции можно рассматривать как деформацию соответствующих зеемановских величин по магнитному заряду μ .

Следующая модель, которая рассматривается в данном цикле статей, – поле Кулона–Дирака, возмущенное однородным магнитным и неоднородным электрическим полями. В качестве примера потенциал электрического поля выбран в виде

$$\mathcal{U}(q) = \gamma q_1 (q_2)^2, \quad (1.4)$$

где q_1, q_2, q_3 — декартовы координаты точки $q \in \mathbb{R}^3$.

Симплектические листы алгебры симметрий $so(4)$ частицы в поле Кулона–Дирака — произведение двух сфер $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, у которых радиусы подчинены условию квантования (они должны быть полуцелыми кратными $\hbar$). Разность радиусов этих сфер совпадает с магнитным зарядом μ . Представим отношение этих радиусов в виде несократимой дроби l/r . После применения метода усреднения, в том числе по магнитному полю, редуцированная система оказывается интегрируемой, и соответствующая динамическая алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ задается пятью образующими N_j со следующими полиномиальными соотношениями:

$$\begin{aligned} [N_1, N_2] &= i\hbar f^{l,r}(N_0, N_3, N_4), \\ [N_0, N_1] &= 2i\hbar N_2, \\ [N_0, N_2] &= -2i\hbar N_1, \\ [N_3, N_j] &= [N_4, N_j] = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $f^{l,r}$ — некоторый явно заданный полином степени $2l + 2r - 1$, коэффициенты которого определяются только числами l, r и параметром квантования $\hbar$.

В частности, случай $l = r = 1$ соответствует нулевому магнитному заряду $\mu = 0$. В этом случае алгебра (1.5) эквивалентна алгебре (1.2) (после переобозначения образующих). В случае нетривиального магнитного заряда первый интересный случай возникает, когда $l = 2, r = 1$; здесь правая часть соотношений (1.5) имеет степень пять. Алгебра с соотношениями (1.5) в каком-то смысле может рассматриваться как деформация алгебры (1.2) по разности $l - r$.

Для алгебры с соотношениями (1.5) могут быть построены когерентные состояния и неприводимые представления. Образующие N_j реализуются в виде обыкновенных дифференциальных операторов порядка $l + r$.

В примере с потенциалом (1.4) редуцированный гамильтониан в неприводимом представлении реализуется как дифференциальный оператор порядка $l + r$ с полиномиальными коэффициентами. В частности, при $l = 2, r = 1$ это оператор третьего порядка. Его собственные функции — некоторые полиномы от комплексной координаты на симплектических листах алгебры (1.5). Квазиклассическая асимптотика коэффициентов этих полиномов и асимптотика собственных значений редуцированного гамильтониана вычисляется явно и геометрически инвариантно.

Еще одна конфигурация полей, которая рассматривается в данном цикле статей, — обычное кулоновское поле, возмущенное однородными магнитным и электрическим полями. Это классическая модель *атома водорода в скрещенных магнитном и электрическом полях*. Возможно также добавление неоднородного возмущающего поля, например, с потенциалом типа (1.4).

В этой модели магнитный заряд отсутствует: $\mu = 0$, и в прямом произведении $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ обе сферы имеют одинаковый радиус R , подчиненный условию квантования $R = n\hbar/2$. После применения метода усреднения, включая усреднение по однородному магнитному полю H и однородному электрическому полю E , получаем интегрируемую систему. Динамическая алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ этой редуцированной системы существенным образом зависит от соотношения между полями H и E .

А именно, если длины векторов $H + 3nE$ и $H - 3nE$ несоизмеримы, то алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ тривиальна (коммутативна). Если же длины указанных векторов соизмеримы:

$$\frac{|H - 3nE|}{|H + 3nE|} = \frac{l}{r}, \quad (1.6)$$

то динамическая алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ некоммутативна и задается соотношениями (1.5).

Таким образом, одна и та же алгебра (1.5) возникает в двух различных моделях:

- при наличии магнитного заряда μ и однородного магнитного поля;
- в отсутствие магнитного заряда $\mu = 0$ и в присутствии однородных магнитного и электрического полей с условием резонанса (1.6).

При этом дополнительное возмущающее поле в обеих моделях может, например, иметь вид (1.4) или аналогичный ему (последнее не влияет на структуру алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$, а лишь определяет конкретный вид редуцированного гамильтониана над этой алгеброй).

Хотя динамическая алгебра (1.5) является общей для двух перечисленных моделей, тем не менее конкретные неприводимые представления этой алгебры, которые используются в одной и в другой модели, совершенно разные (и не эквивалентные). На самом деле эти две реализации дополняют друг друга в смысле того набора неприводимых представлений, который присутствует в каждой из моделей.

Отметим, что спектр атома водорода в скрещенных магнитном и электрическом полях исследовался в литературе, однако общие условия резонанса (1.6) и соответствующая алгебра (1.5), по-видимому, не были известны.

Еще одно замечание: в этом цикле статей мы делаем акцент на самом факте возникновения интересных алгебр с полиномиальными коммутационными соотношениями в элементарных моделях квантовой механики. Конечно, каждая из выделенных алгебр заслуживает дальнейшего подробного изучения. Точно так же каждая из рассмотренных физических моделей также требует детального анализа. Например, интересен подсчет следующих членов теории возмущений, а также приближенное решение возникших модельных дифференциальных уравнений с применением квантовой геометрии [5], [6]. Мы сошлемся на работы [8], [9], где для модели, связанной с алгеброй (1.2) (эффект Зеемана), был произведен подсчет второго члена теории возмущений, а также указаны формулы квазиклассического приближения для собственных значений и собственных функций через гипергеометрические когерентные состояния и их деформации. То же самое может быть сделано и для всех моделей, связанных с алгебрами (1.3), (1.5).

Данная статья – первая работа цикла – посвящена первой из перечисленных выше моделей, связанной с алгеброй (1.3). Работа включает пять разделов и приложения.

Второй раздел носит вспомогательный характер. В нем рассматривается задача о заряженной частице в поле Кулона–Дирака (в отсутствие возмущающих полей). Задача сводится к изучению оператора “действие”, собственные числа которого целые, кратные постоянной Планка. Затем для оператора “действие” строится алгебра квантовых интегралов движения. И в заключение выписываются собственные функции оператора “действие”.

В начале третьего раздела для исходной задачи, где присутствует возмущающее аксиальное поле, гамильтониан приводится к виду “оператор “действие” + возмущение”.

Далее применяется метод квантового усреднения: строится унитарное отображение, преобразующее гамильтониан к сумме оператора “действие” и усредненного возмущения, коммутирующего с “действием”. Усредненный гамильтониан является элементом алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ совместных квантовых интегралов движения пары коммутирующих операторов – “действие” и вертикальной компоненты углового момента. Выписаны генераторы этой алгебры, подчиненные квадратичным коммутационным соотношениям вида (1.3). Старшая часть усредненного гамильтониана явно выписана в виде функции от этих генераторов.

Введенная алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями детально исследуется в четвертом разделе. Строятся ее неприводимые представления обыкновенными дифференциальными операторами второго порядка в пространстве полиномов; вычисляются соответствующие когерентные состояния и определяется когерентное преобразование, сплетающее любое заданное представление данной алгебры с неприводимыми представлениями.

В пятом разделе с помощью когерентного преобразования спектральная задача для усредненного гамильтониана сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве полиномов. Это уравнение второго порядка типа Хейна. Собственные числа усредненного гамильтониана выражаются через собственные числа этого дифференциального уравнения, а для собственных функций усредненного гамильтониана получается интегральное представление через когерентные состояния алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ и полиномиальные решения уравнения Хейна.

Переход к собственным функциям исходного гамильтониана осуществляется с помощью применения усредняющего преобразования. В результате в любом порядке по возмущающему полю может быть вычислена асимптотика собственных значений исходного гамильтониана, а также построена асимптотика соответствующих им собственных функций.

В приложении А приведена реализация гамильтониана с полем Кулона–Дирака в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$, выписаны генераторы алгебры квантовых интегралов движения для оператора “действие” и вычислены его собственные функции в этой реализации. В приложении Б, следуя работе [10], приведена краткая схема построения неприводимых представлений и когерентных состояний для класса алгебр с нелиевскими коммутационными соотношениями, показано, как эта схема применяется к алгебре $\mathcal{F}_{\text{quant}}$, а также приведены формулы для генераторов алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ и соответствующих когерентных состояний в $L^2(\mathbb{R}^4)$.

2. ЧАСТИЦА В ПОЛЕ КУЛОНА–ДИРАКА

2.1. Гамильтониан частицы в поле Кулона–Дирака. Электрический потенциал точечного заряда определяется законом Кулона. В то же время точечный магнитный заряд Дирака нельзя описать только с помощью потенциала; приходится изменять канонические коммутационные соотношения и вводить некоммутирующие импульсы (некоммутативность импульсов контролируется магнитным зарядом).

Предположим, что в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ операторы $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1,$

$\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$) и $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ задают неприводимое представление алгебры

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k] &= 0, \quad [\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_k] = -i\hbar \delta_{jk}, \quad [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar \mu \varepsilon_{jkl} \frac{\mathbf{q}_l}{|\mathbf{q}|^3}, \\ \mathbf{q}_j &= \mathbf{q}_j^*, \quad \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j^*, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где звездочка обозначает операторное сопряжение, $\hbar > 0$ и предполагается, что магнитный заряд μ подчинен условию квантования $\mu = \hbar k/2$, где k – некоторое целое число. Конкретная реализация алгебры (2.1) указана в приложении А.

Частица в поле Кулона–Дирака описывается гамильтонианом (см. [15]–[19])

$$\mathbf{H}_0 \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{p}|^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|} + \frac{\mu^2}{|\mathbf{q}|^2}. \quad (2.2)$$

2.2. Оператор “действие”. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}$ спектральную задачу

$$\mathbf{H}_0 \psi = -\frac{1}{4\lambda^2} \psi \quad (2.3)$$

на отрицательной части спектра. Для каждого $\lambda > 0$ определим оператор

$$\mathbf{S}_0 \stackrel{\text{def}}{=} s(\lambda, \frac{2}{\mathbf{q}}, \frac{1}{\mathbf{p}}), \quad s(\lambda, q, p) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda |q| |p|^2 + \frac{\mu^2 \lambda}{|q|} + \frac{|q|}{4\lambda}. \quad (2.4)$$

Оператор $\mathbf{S}_0$ эрмитов в пространстве $\mathcal{L}_-$ со скалярным произведением

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{4} \left\langle \frac{1}{|\mathbf{q}|} \psi_1, \psi_2 \right\rangle, \quad (2.5)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathcal{L}$.

Путем умножения на $\lambda |\mathbf{q}|$ спектральная задача (2.3) для оператора $\mathbf{H}_0$ в пространстве $\mathcal{L}$ сводится к спектральной задаче $\mathbf{S}_0 \psi = \lambda \psi$ в пространстве $\mathcal{L}_-$.

2.3. Алгебра квантовых интегралов движения. Определим вектор-операторы $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3)$ и $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3)$:

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{R}), \quad \mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{M} - \mathbf{R}), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - \mu \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}, \\ \mathbf{R} &\stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{p} - \lambda \mathbf{q} |\mathbf{p}|^2 + \frac{\mu^2 \lambda \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2} - \frac{2\mu \lambda}{|\mathbf{q}|} (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + \frac{1}{4\lambda} \mathbf{q} - 2i\hbar \lambda \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В случае, когда $\mu = 0$, вектор $\mathbf{M}$ – момент количества движения, а вектор $\mathbf{R}$ – модифицированный оператор Лапласа–Рунге–Ленца. Отметим, что все операторы $\mathbf{J}_j$, $\mathbf{K}_j$, $\mathbf{M}_j$ и $\mathbf{R}_j$ эрмитовы в пространстве $\mathcal{L}_-$.

ТЕОРЕМА 2.1 [17]. *Алгебра квантовых интегралов движения для гамильтониана $\mathbf{S}_0$ (т.е. алгебра операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$) порождается операторами $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ и $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$. Они образуют алгебру $so(4)$ и подчинены коммутационным соотношениям*

$$[\mathbf{J}_j, \mathbf{J}_l] = i\hbar \varepsilon_{jlm} \mathbf{J}_m, \quad [\mathbf{J}_j, \mathbf{K}_l] = 0, \quad [\mathbf{K}_j, \mathbf{K}_l] = i\hbar \varepsilon_{jlm} \mathbf{K}_m.$$

Операторы Казимира этой алгебры выражаются через $\mathbf{S}_0$ формулами

$$|\mathbf{J}|^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0 - \mu)^2 - \frac{\hbar^2}{4}, \quad |\mathbf{K}|^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0 + \mu)^2 - \frac{\hbar^2}{4}.$$

2.4. Собственные значения и собственные функции оператора “действие”. Наличие у оператора $\mathbf{S}_0$ полного набора интегралов движения приводит к вырождению его спектра. Приведем явные формулы для собственных значений и собственных функций. С этой целью вместо образующих $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ введем новые образующие $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\lambda}|\mathbf{q}| - \lambda|\mathbf{q}||\mathbf{p}|^2 - \frac{\mu^2\lambda}{|\mathbf{q}|} + i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \hbar, \\ \mathbf{V} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\lambda}\mathbf{q} - 2\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}|\mathbf{p}|^2 - \frac{\mu^2\lambda}{|\mathbf{q}|^2}\mathbf{q} + \frac{2\mu\lambda}{|\mathbf{q}|}(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + i|\mathbf{q}|\mathbf{p} + 2i\hbar\lambda\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

а также сопряженные к ним в пространстве $\mathcal{L}_-$ операторы $\mathbf{v}^*$ и $\mathbf{V}^* = (\mathbf{V}_1^*, \mathbf{V}_2^*, \mathbf{V}_3^*)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \frac{1}{4\lambda}|\mathbf{q}| - \lambda|\mathbf{q}||\mathbf{p}|^2 - \frac{\mu^2\lambda}{|\mathbf{q}|} - i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \hbar, \\ \mathbf{V}^* &= \frac{1}{4\lambda}\mathbf{q} - 2\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}|\mathbf{p}|^2 - \frac{\mu^2\lambda}{|\mathbf{q}|^2}\mathbf{q} + \frac{2\mu\lambda}{|\mathbf{q}|}(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - i|\mathbf{q}|\mathbf{p} + 2i\hbar\lambda\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Спектр оператора $\mathbf{S}_0$ в пространстве $\mathcal{L}_-$ состоит из чисел*

$$\lambda_n = \hbar \left(n + 1 + \frac{|k|}{2} \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.10)$$

Кратность собственного значения λ_n равна $(n+1)(n+1+|k|)$.

Следующие функции образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $\mathcal{L}_-[n]$ оператора $\mathbf{S}_0$, отвечающем собственному значению λ_n :

$$\begin{aligned} \psi_{j_1, j_2}^n &= c_{j_1, j_2}^n (\mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2)^{j_1} (-\mathbf{K}_1 - i\mathbf{K}_2)^{j_2} (\mathbf{v}^* + \mathbf{V}_3^*)^n \psi_{0,0}^0, \\ 0 \leq j_1 \leq n + \frac{|k|}{2} - \frac{k}{2}, \quad 0 \leq j_2 \leq n + \frac{|k|}{2} + \frac{k}{2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $\psi_{0,0}^0$ – нижняя собственная функция оператора $\mathbf{S}_0$ (т.е. $\mathbf{S}_0\psi_{0,0}^0 = \lambda_0\psi_{0,0}^0$), удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2)\psi_{0,0}^0 &= 0, & \mathbf{J}_3\psi_{0,0}^0 &= \frac{\hbar(|k| - k)}{4}\psi_{0,0}^0, \\ (-\mathbf{K}_1 + i\mathbf{K}_2)\psi_{0,0}^0 &= 0, & -\mathbf{K}_3\psi_{0,0}^0 &= \frac{\hbar(|k| + k)}{4}\psi_{0,0}^0, \\ \|\psi_{0,0}^0\| &= 1, \end{aligned}$$

а c_{j_1, j_2}^n – нормировочная константа:

$$c_{j_1, j_2}^n = \frac{1}{n!(n + |k|)! 2^n \hbar^{n+j_1+j_2}} \sqrt{\frac{|k|! \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{k}{2} - j_1\right)! \left(n + \frac{|k|}{2} + \frac{k}{2} - j_2\right)!}{j_1! j_2!}}.$$

В связи с тем, что собственные числа (2.10) образуют арифметическую прогрессию, оператор $\mathbf{S}_0$ действительно корректно называть оператором “действие”.

В приложении А приводится реализация рассмотренной спектральной задачи в некотором подпространстве пространства $L^2(\mathbb{R}^4)$. В этой реализации оператор “действие” $\mathbf{S}_0$, его квантовые интегралы движения $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$, а также вспомогательные операторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{V}^*$ являются дифференциальными операторами не выше второго порядка. Для собственных функций ψ_{j_1, j_2}^n (2.11) в $L^2(\mathbb{R}^4)$ в приложении А выписаны явные формулы через полиномы Лагерра.

3. КВАНТОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Гамильтониан частицы в поле Кулона–Дирака, возмущенном аксиально-симметричным потенциалом, имеет вид $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \varepsilon\mathcal{U}(|\mathbf{q}|, \mathbf{q}_3)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ представления алгебры (2.1). Здесь $\mathbf{H}_0$ – гамильтониан (2.2), функция $\mathcal{U}(|\mathbf{q}|, \mathbf{q}_3)$ задает форму потенциала электрического поля, а ε – параметр, характеризующий напряженность поля и заряд частицы. Мы предполагаем, что $\varepsilon \ll 1$.

Наша цель – найти асимптотику по ε решений спектральной задачи

$$\mathbf{H}\psi = \mathcal{E}\psi, \quad \psi \in \mathcal{L}, \quad (3.1)$$

в области отрицательных энергий $\mathcal{E} < 0$. Полагая $\mathcal{E} = -1/(4\lambda^2)$, мы сведем (3.1) к спектральной задаче

$$(\mathbf{S}_0 + \varepsilon\mathbf{S}_1)\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in \mathcal{L}_-, \quad (3.2)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_-$ со скалярным произведением (2.5). Здесь $\mathbf{S}_0$ – оператор “действие” (2.4), а $\mathbf{S}_1$ задается формулой

$$\mathbf{S}_1 = \lambda|\mathbf{q}|\mathcal{U}(|\mathbf{q}|, \mathbf{q}_3). \quad (3.3)$$

3.1. Квантовое усреднение. Будем следовать схеме квантового усреднения, развитой в работах [2], [3] (см. также библиографию в работах [3]). С любой степенной точностью $O(\varepsilon^{N+1})$ можно построить обратимый оператор $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\varepsilon)$ и операторы $\underline{\mathbf{S}}_j$, удовлетворяющие тождествам

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{S}_0 + \varepsilon \mathbf{S}_1)\mathbf{U} = \mathbf{S}_0 + \varepsilon \underline{\mathbf{S}}_1 + \varepsilon^2 \underline{\mathbf{S}}_2 + \cdots + \varepsilon^N \underline{\mathbf{S}}_N + O(\varepsilon^{N+1}), \quad [\underline{\mathbf{S}}_j, \mathbf{S}_0] = 0. \quad (3.4)$$

Новый возмущающий оператор $\underline{\mathbf{T}} = \varepsilon \underline{\mathbf{S}}_1 + \varepsilon^2 \underline{\mathbf{S}}_2 + \cdots + \varepsilon^N \underline{\mathbf{S}}_N$ называется *усредненным оператором*. Поскольку он уже коммутирует со старшей частью $\mathbf{S}_0$, то решение спектральной задачи для оператора $\mathbf{S}_0 + \varepsilon \mathbf{S}_1$ с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$ сводится к решению спектральной задачи для оператора $\underline{\mathbf{T}}$ на собственных подпространствах оператора $\mathbf{S}_0$. Явные формулы (во всех порядках по ε) для усредненного оператора $\underline{\mathbf{T}}$ и преобразования $\mathbf{U}$ приведены, например, в работах [8], [9].

В первом приближении по ε тождества (3.4) имеют вид

$$e^{(i\varepsilon/\hbar)\mathbf{S}_1^\#}(\mathbf{S}_0 + \varepsilon \mathbf{S}_1)e^{-(i\varepsilon/\hbar)\mathbf{S}_1^\#} = \mathbf{S}_0 + \varepsilon \underline{\mathbf{S}}_1 + O(\varepsilon^2), \quad [\underline{\mathbf{S}}_1, \mathbf{S}_0] = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} \mathbf{S}_1 e^{(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} d\tau, \\ \mathbf{S}_1^\# &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \tau) e^{-(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} \mathbf{S}_1 e^{(i\tau/\hbar)\mathbf{S}_0} d\tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, с точностью $O(\varepsilon^2)$ спектральная задача (3.2) сводится к новой спектральной задаче

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0 \varphi = \lambda_n \varphi, \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \varphi = \zeta \varphi. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь $\lambda_n = \hbar(n + 1 + |k|/2)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. (2.10)). Собственные значения задачи (3.2) имеют вид $\lambda = \lambda_n + \varepsilon \zeta + O(\varepsilon^2)$, а ее собственные функции ψ связаны с собственными функциями φ задачи (3.6) следующим образом:

$$\psi = e^{-(i\varepsilon/\hbar)\mathbf{S}_1^\#} \varphi + O(\varepsilon^2) = \varphi + O(\varepsilon).$$

3.2. Усредненный оператор. Усредненный оператор $\underline{\mathbf{S}}_1$ (3.5) для нашей конкретной модели задается формулой

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}_1 &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\mathbf{S}_0 + \mathbf{v}e^{i\tau} + \mathbf{v}^*e^{-i\tau}) \times \\ &\quad \times \mathcal{U}(\lambda(2\mathbf{S}_0 + \mathbf{v}e^{i\tau} + \mathbf{v}^*e^{-i\tau}), \lambda(2(\mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_3) + \mathbf{V}_3e^{i\tau} + \mathbf{V}_3^*e^{-i\tau})) d\tau, \end{aligned}$$

где операторы $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{V}^*$ определены в (2.6), (2.8), (2.9).

3.3. Усредненный оператор как элемент алгебры совместных интегралов движения действия и углового момента. Отметим, что по построению оператор $\underline{\mathbf{S}}_1$ коммутирует с $\mathbf{S}_0$. Кроме того, оба оператора $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{S}_1$ (3.3) коммутируют с $\mathbf{M}_3 = \mathbf{q}_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \mathbf{p}_1 - \mu \mathbf{q}_3 / |\mathbf{q}|$, а значит, и оператор $\underline{\mathbf{S}}_1$ (3.5) коммутирует с $\mathbf{M}_3$.

Таким образом, приходим к задаче об описании алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{M}_3$.

ТЕОРЕМА 3.1.

1. Алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ операторов, коммутирующих с $\mathbf{S}_0$ и с $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3$, порождается следующими эрмитовыми генераторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_3, & \mathbf{B}_1 &= \mathbf{J}_1 \mathbf{K}_2 - \mathbf{J}_2 \mathbf{K}_1, & \mathbf{B}_2 &= \mathbf{J}_1 \mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{K}_2, \\ \mathbf{B}_3 &= \mathbf{J}_3 \mathbf{K}_3 + \frac{1}{2}(|\mathbf{J}|^2 + |\mathbf{K}|^2), & \mathbf{B}_4 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{|\mathbf{J}|^2 + \frac{\hbar^2}{4}} + \sqrt{|\mathbf{K}|^2 + \frac{\hbar^2}{4}} \right) (\mathbf{J}_3 + \mathbf{K}_3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

2. Операторы $\mathbf{B}_j$ подчинены квадратичным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] &= i\hbar(\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_3 + \mu \mathbf{B}_4), & [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1] &= 2i\hbar \mathbf{B}_2, \\ [\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3] &= -\frac{i\hbar}{2}(\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_0), & [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_2] &= -2i\hbar \mathbf{B}_1, \\ [\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_1] &= -\frac{i\hbar}{2}(\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_0), & [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_3] &= 0, \\ [\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_0] &= [\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_1] = [\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_2] = [\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_3] = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти соотношения имеют три элемента Казимира:

$$\mathbf{B}_3^2 - \mathbf{B}_1^2 - \mathbf{B}_2^2 - \mu \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_4 - \hbar^2 \mathbf{B}_3, \quad \mathbf{B}_0^2 + 4\mathbf{B}_3, \quad \mathbf{B}_4.$$

3. В представлении (3.7) элементы Казимира выражаются через $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{M}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3^2 - \mathbf{B}_1^2 - \mathbf{B}_2^2 - \mu \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_4 - \hbar^2 \mathbf{B}_3 &= \frac{1}{4}(\mathbf{M}_3^2 + \mu^2 - \hbar^2)(\mathbf{S}_0^2 + \mu^2 - \hbar^2) - \frac{1}{4}\mu^2(\mu^2 - \hbar^2), \\ \mathbf{B}_0^2 + 4\mathbf{B}_3 &= \mathbf{M}_3^2 + \mathbf{S}_0^2 + \mu^2 - \hbar^2, & \mathbf{B}_4 &= \frac{1}{2}\mathbf{M}_3 \mathbf{S}_0. \end{aligned}$$

Теорема 3.1 доказывается путем непосредственной проверки с помощью соотношений из теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Усредненный оператор $\underline{\mathbf{S}}_1$ представим в виде функции от образующих $\mathbf{B}_j$ (3.7) алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$.

3.4. Пример. Пусть

$$\mathcal{U}(|q|, q_3) = \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2). \quad (3.9)$$

В этом случае возмущающий оператор (3.3) имеет вид

$$\mathbf{S}_1 = \frac{\lambda}{4} |\mathbf{q}| (\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть возмущающий потенциал $\mathcal{U}$ имеет вид (3.9). Тогда усредненный оператор $\underline{\mathbf{S}}_1$ задается формулой

$$\underline{\mathbf{S}}_1 = \lambda^4 (12\mathbf{S}_0\mathbf{B}_3 - 8\mathbf{S}_0\mathbf{B}_2 - 4\mathbf{S}_0\mathbf{M}_3^2 - 2\mu\mathbf{M}_3\mathbf{B}_0 - 4\mu^2\mathbf{S}_0 + 4\hbar^2\mathbf{S}_0), \quad (3.10)$$

где $\mathbf{B}_j$ — образующие (3.7) алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$.

3.5. Спектральная задача на совместных собственных подпространствах. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ реализуются на совместных собственных подпространствах операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{M}_3$. Собственные подпространства $\mathcal{L}_-[n]$ оператора $\mathbf{S}_0$ описаны выше (в теореме 2.2). Опишем собственные подпространства оператора $\mathbf{M}_3$ в $\mathcal{L}_-[n]$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Спектр оператора $\mathbf{M}_3 = \mathbf{q}_1\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2\mathbf{p}_1 - \mu\mathbf{q}_3/|\mathbf{q}|$ в подпространстве $\mathcal{L}_-[n]$ состоит из чисел $\hbar(m - k/2)$, где $m \in \mathbb{Z}$, $|m - k/2| \leq n + |k|/2$. Размерность m -го собственного подпространства $\mathcal{L}_-[n, m] \subset \mathcal{L}_-[n]$ равна $N_m = n + |k|/2 - |m|/2 - |m - k|/2 + 1$.

Функции $\psi_{|m|/2 - m/2 + j, |m|/2 + m/2 + j}^n$, где $0 \leq j \leq N_m - 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathcal{L}_-[n, m]$. Здесь функции ψ_{j_1, j_2}^n определены формулой (2.11).

Используя следствие 3.1, задачу (3.6) можно упростить, а именно, ее можно решать отдельно на каждом собственном подпространстве $\mathcal{L}_-[n, m]$ операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{M}_3$:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0\varphi = \hbar\left(n + 1 + \frac{|k|}{2}\right)\varphi, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ \mathbf{M}_3\varphi = \hbar\left(m - \frac{k}{2}\right)\varphi, & m \in \mathbb{Z}, \quad \left|m - \frac{k}{2}\right| \leq n + \frac{|k|}{2}, \\ \underline{\mathbf{S}}_1\varphi = \zeta\varphi. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ниже строятся неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ обыкновенными дифференциальными операторами в гильбертовых пространствах полиномов и соответствующие когерентные состояния. С их помощью можно вычислить собственные функции и собственные числа усредненного оператора $\underline{\mathbf{S}}_1$ в каждом из подпространств $\mathcal{L}_-[n, m]$, а значит, и решить в первом (и в более высоких) приближении по ε исходную спектральную задачу (3.1).

4. ПУАССОНОВА СТРУКТУРА И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{F}$

4.1. Алгебра $\mathcal{F}$ (классическая версия). В пределе $\hbar \rightarrow 0$ соотношениям (2.1) отвечают следующие скобки Пуассона между координатами $q \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$, $p \in \mathbb{R}^3$:

$$\{q_j, q_k\} = 0, \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad \{p_j, p_k\} = -\mu \varepsilon_{jkl} \frac{q_l}{|q|^3},$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ – константа (не обязательно принимающая дискретные значения). Соответствующий пуассонов тензор задает фазовое пространство $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ с симплектической формой [19]

$$\sum_{j=1}^3 dp_j \wedge dq_j + \frac{\mu}{|q|^3} (q_1 dq_2 \wedge dq_3 + q_2 dq_3 \wedge dq_1 + q_3 dq_1 \wedge dq_2).$$

На этом фазовом пространстве символ оператора $\mathbf{S}_0$ (2.4) имеет вид $S_0 = \lambda|q||p|^2 + \mu^2\lambda/|q| + |q|/(4\lambda)$. Эта функция находится в инволюции с компонентами векторов

$$M = (q \times p) - \mu \frac{q}{|q|}, \quad R = 2\lambda(q, p)p - \lambda q|p|^2 + \frac{\mu^2\lambda q}{|q|^2} - \frac{2\mu\lambda}{|q|}(q \times p) + \frac{1}{4\lambda}q$$

(символами операторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{R}$ (2.7)).

Вместо векторов M и R удобно ввести два новых вектора: $J = (M + R)/2$ и $K = (M - R)/2$ (это символы операторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$ (2.6)). Компоненты векторов J и K порождают алгебру $so(4)$ относительно скобки Пуассона: $\{J_j, J_k\} = -\varepsilon_{jkl}J_l$, $\{J_j, K_k\} = 0$, $\{K_j, K_k\} = -\varepsilon_{jkl}K_l$. В этой алгебре имеются два элемента Казимира: $|J|^2$ и $|K|^2$. Они выражаются через функцию S_0 как $|J|^2 = (S_0 - \mu)^2/4$, $|K|^2 = (S_0 + \mu)^2/4$.

ТЕОРЕМА 4.1. 1. *Алгебра $\mathcal{F}$ функций на $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$, находящаяся в инволюции с S_0 и M_3 , порождается образующими*

$$\begin{aligned} B_0 &= J_3 - K_3, & B_1 &= J_1K_2 - J_2K_1, & B_2 &= J_1K_1 + J_2K_2, \\ B_3 &= J_3K_3 + \frac{1}{2}(|J|^2 + |K|^2), & B_4 &= \frac{1}{2}(|J| + |K|)(J_3 + K_3). \end{aligned} \quad (4.1)$$

2. *Образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{F}$ подчинены квадратичным соотношениям*

$$\begin{aligned} \{B_1, B_2\} &= -B_0B_3 - \mu B_4, & \{B_0, B_1\} &= -2B_2, \\ \{B_2, B_3\} &= B_0B_1, & \{B_0, B_2\} &= 2B_1, \\ \{B_3, B_1\} &= B_0B_2, & \{B_0, B_3\} &= 0, \\ \{B_4, B_0\} &= \{B_4, B_1\} = \{B_4, B_2\} = \{B_4, B_3\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

со структурной константой $\mu \in \mathbb{R}$.

3. *Алгебра $\mathcal{F}$ может рассматриваться как пуассонова алгебра функций на $\mathbb{R}^5$ с соотношениями (4.2). Ее симплектические листы $\Omega \subset \mathbb{R}^5$ задаются тремя функциями Казимира:*

$$\varkappa_1 = b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - \mu b_0 b_4, \quad \varkappa_2 = b_0^2 + 4b_3, \quad \varkappa_3 = b_4$$

(здесь b_j – декартовы координаты на $\mathbb{R}^5$). Реализации $b = B$ (4.1) соответствует область, где функции Казимира удовлетворяют условиям

$$\varkappa_1 - \frac{\mu^2}{4}\varkappa_2 - \varkappa_3^2 + \frac{\mu^4}{4} = 0, \quad \varkappa_2 \geq \mu^2 + 4\varkappa_3,$$

а $b_3 \geq \mu^2/2$. В этой области симплектические листы параметризуются двумя константами s и c , причем $s \geq (|c + \mu| + |c - \mu|)/2$; замыкание листа задается уравнениями

$$\overline{\Omega} = \left\{ b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - \mu b_0 b_4 = \frac{c^2 s^2 + \mu^2 c^2 + \mu^2 s^2}{4}, \quad b_0^2 + 4b_3 = c^2 + s^2 + \mu^2, \quad b_4 = \frac{cs}{2} \right\}, \quad (4.3)$$

причем в реализации (4.1) $M_3|_{\Omega} = c$, $S_0|_{\Omega} = s$. Если $s = (|c + \mu| + |c - \mu|)/2$, то листы Ω нульмерны и состоят из одной точки

$$(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = \left(\frac{|c - \mu| - |c + \mu|}{2}, 0, 0, \frac{\mu^2 + c^2 + |\mu^2 - c^2|}{4}, \frac{cs}{2} \right).$$

Если $s > (|c + \mu| + |c - \mu|)/2$, то геометрия листов зависит от c . В случае $|c| \neq |\mu|$ листы Ω диффеоморфны сфере $\mathbb{S}^2$. В случае $c = \pm\mu \neq 0$ листы диффеоморфны плоскости $\mathbb{R}^2$ и получаются из замыкания (4.3) выкидыванием точки $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = (\mp s, 0, 0, \mu^2/2, cs/2)$. В случае $c = \mu = 0$ листы диффеоморфны цилиндру и получаются из $\overline{\Omega}$ выкидыванием двух точек: $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = (\mp s, 0, 0, 0, 0)$. В случаях $c = \pm\mu \neq 0$ и $c = \mu = 0$ выброшенные точки сами являются нульмерными симплектическими листами.

4. Кэлерова структура на листах Ω вводится с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{2(b_2 - ib_1)}{s^2 + \mu c - 2b_3 + sb_0}.$$

Образующие $b_j|_{\Omega}$ выражаются через z следующим образом:

$$\begin{aligned} b_0 &= s - |\mu + c| - 2|z|^2 \kappa(|z|^2), \\ b_1 &= \frac{i}{2}(s^2 - s|\mu + c| + \mu c - 2s|z|^2 \kappa(|z|^2)) \frac{z - \bar{z}}{1 - |z|^2}, \\ b_2 &= \frac{1}{2}(s^2 - s|\mu + c| + \mu c - 2s|z|^2 \kappa(|z|^2)) \frac{z + \bar{z}}{1 - |z|^2}, \\ b_3 &= \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}(s^2 - s|\mu + c| + \mu c - 2s|z|^2 \kappa(|z|^2)) \frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 - 1}, \\ b_4 &= \frac{1}{2}cs, \end{aligned}$$

где

$$\kappa(x) = \frac{2sx - |\mu + c|(x - 1) - \sqrt{4s^2x - 4\mu c(x - 1) + (\mu - c)^2(x - 1)^2}}{2x(x - 1)}.$$

Симплектическая структура на листах Ω , соответствующая скобкам (4.2), имеет вид $\varpi = \partial_{\bar{z}}\theta$, $\theta = i\kappa(|z|^2)\bar{z}dz$. Симплектическая площадь листа равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \varpi = s - \frac{1}{2}(|\mu + c| + |\mu - c|).$$

4.2. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ операторами второго порядка. Алгоритм построения неприводимых представлений алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ (3.8) в гильбертовых пространствах полиномов описывается в приложении Б, следуя общей схеме [10]. Здесь мы формулируем лишь итоговый результат.

Пусть k, n, m целые, $n + |k|/2 - |m|/2 - |m - k|/2 \geq 0$, и пусть $\hbar > 0$. Введем функцию

$$\rho(x) = \gamma x^{|m|} F\left(n + \frac{|k|}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} + 2, n + \frac{|k|}{2} + \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} + 2; 2n + |k| + 4; 1 - x\right),$$

где F – гипергеометрический ряд [20]

$$F(a, b; c; y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} y^j,$$

операция $(\alpha)_j$ определяется формулой $(\alpha)_j \equiv \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + j - 1)$, $(\alpha)_0 \equiv 1$, а γ – нормировочная константа:

$$\gamma = \hbar \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} + 1 \right) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} + 1 \right) \times \\ \times \frac{\left(n + \frac{|k|}{2} + \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} + 1 \right)! \left(n + \frac{|k|}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} + 1 \right)!}{|m|! (2n + |k| + 3)!}.$$

Отметим, что функция $\rho(x)$ является решением следующей задачи для гипергеометрического уравнения:

$$\begin{cases} x(1-x)\rho'' + ((1-|m|) - (2n - |m| + |k| + 5)x)\rho' - \\ - \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} + 2 \right) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} + 2 \right) \rho = 0, \\ \frac{1}{\hbar} \int_0^1 \rho(x) dx = 1, \quad \rho(x) > 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{P}[n, m]$ пространство полиномов над $\mathbb{C}$ степени не выше $n + |k|/2 - |m|/2 - |m - k|/2$, наделенное нормой

$$\|g\|_{n,m} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int |g(\bar{z})|^2 d\sigma_{n,m}(z) \right)^{1/2}, \quad d\sigma_{n,m}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(|z|^2) d\bar{z} dz. \quad (4.4)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть k, n, m целые, $n + |k|/2 - |m|/2 - |m - k|/2 \geq 0$, и пусть $\hbar > 0$. Операторы второго порядка в пространстве $\mathcal{P}[n, m]$

$$\begin{aligned} \mathring{B}_0 &= \hbar \left(n - |m| + \frac{|k|}{2} - 2\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\ \mathring{B}_1 &= \frac{i\hbar^2}{2} \left(\bar{z}(1 - \bar{z}^2) \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + (|m| + 1 + (2n - |m| + |k| - 1)\bar{z}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \right. \\ &\quad \left. - \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} \right) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} \right) \bar{z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathring{B}_2 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(\bar{z}(1 + \bar{z}^2) \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + (|m| + 1 - (2n - |m| + |k| - 1)\bar{z}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m-k|}{2} \right) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2} \right) \bar{z} \right), \\
\mathring{B}_3 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(\left(n + \frac{|k|}{2} \right) (|m| + 1) + \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - m \right) + 2 \left(n - |m| + \frac{|k|}{2} - 1 \right) \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2\bar{z}^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right), \\
\mathring{B}_4 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(n + 1 + \frac{|k|}{2} \right) \left(m - \frac{k}{2} \right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

задают неприводимое эрмитово представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ (3.8) со структурной константой $\mu = \hbar k/2$, соответствующее симплектическому листу Ω (4.3) с параметрами $s = \hbar(n + 1 + |k|/2)$, $c = \hbar(m - k/2)$.

Это неприводимое представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ мы называем *гипергеометрическим*.

4.3. Гипергеометрические когерентные состояния. Пусть задано произвольное эрмитово представление соотношений (3.8) со структурной константой $\mu = \hbar k/2$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_-$. Генераторы этого представления обозначим через $\mathbb{B}_j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Определим операторы

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_2 + i\mathbb{B}_1, \quad \mathbb{C} = \mathbb{B}_2 - i\mathbb{B}_1, \quad \mathbb{A}_1 = \mathbb{B}_0, \quad \mathbb{A}_2 = \mathbb{B}_3, \quad \mathbb{A}_3 = \mathbb{B}_4.$$

Пусть $\chi_0 \in \mathbb{L}_-$ — нормированный “вакуумный” вектор, подчиненный уравнениям

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\chi_0 &= 0, \\
\mathbb{A}_1\chi_0 &= \hbar \left(n + \frac{|k|}{2} - |m| \right) \chi_0, \\
\mathbb{A}_2\chi_0 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(\left(n + \frac{|k|}{2} \right) (1 + |m|) + \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - m \right) \right) \chi_0, \\
\mathbb{A}_3\chi_0 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(n + 1 + \frac{|k|}{2} \right) \left(m - \frac{k}{2} \right) \chi_0.
\end{aligned}$$

Положим

$$\mathfrak{H}_z \stackrel{\text{def}}{=} I_{|m|} \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{z\mathbb{B}} \right) \chi_0, \tag{4.6}$$

где функция

$$I_\nu(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{j! \Gamma(j+\nu+1)!} \left(\frac{y}{2} \right)^{2j}, \quad \nu > 0,$$

отличается от стандартной функции Бесселя мнимого аргумента [21] дополнительным множителем $y^{-\nu}$ и нормировкой, так что $I_\nu(y) \rightarrow 1$ при $y \rightarrow 0$.

Заметим, что в пространстве полиномов $\mathcal{P}[n, m]$ с нормой (4.4) можно ввести ортонормированный базис, состоящий из мономов

$$g_j(\bar{z}) = \sqrt{\kappa_j} (-\bar{z})^j, \quad 0 \leq j \leq n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}. \tag{4.7}$$

Здесь нормировочные константы κ_j заданы как

$$\kappa_j = \frac{\left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}\right)! \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m-k|}{2}\right)! |m|!}{\left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2} - j\right)! \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m-k|}{2} - j\right)! j! (|m| + j)!}. \quad (4.8)$$

Аналогично в $\mathbb{L}_-$ можно ввести систему ортонормированных векторов

$$\chi_j = \frac{1}{\sqrt{\kappa_j}} \frac{m!}{j! (|m| + j)!} \frac{(-1)^j}{\hbar^{2j}} \mathbb{B}^j \chi_0. \quad (4.9)$$

Их линейную оболочку обозначим через $\mathbb{L}_-[n, m]$. На подпространстве $\mathbb{L}_-[n, m] \subset \mathbb{L}_-$ реализуется неприводимое представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$.

Тогда семейство векторов (4.6) можно представить в виде

$$\mathfrak{H}_z = \sum_{j=0}^{n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}} \overline{g_j(\bar{z})} \chi_j. \quad (4.10)$$

Скалярное произведение двух векторов вида (4.6) задается формулой

$$\langle \mathfrak{H}_{z'}, \mathfrak{H}_{z''} \rangle_{\mathbb{L}_-} = \mathfrak{K}(z' \overline{z''}), \quad \mathfrak{K}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}} \kappa_j x^j.$$

Полином $\mathfrak{K}(x)$ является единственным решением следующей краевой задачи для g -гипергеометрического уравнения:

$$\begin{cases} x(1-x)\mathfrak{K}'' + (|m| + 1 + (2n + |k| - |m| - 1)x)\mathfrak{K}' - \\ - \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}\right) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m-k|}{2}\right) \mathfrak{K} = 0, \\ \mathfrak{K}(0) = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{K}(x) = F\left(-n - \frac{|k|}{2} + \frac{|m|}{2} + \frac{|m-k|}{2}, -n - \frac{|k|}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}; |m| + 1, x\right), \quad (4.11)$$

где F – гипергеометрический ряд.

ЛЕММА 4.1. *Полиномы $\mathfrak{K}(x)$ обладают воспроизводящим свойством:*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int \mathfrak{K}(z' \bar{z}) \mathfrak{K}(z \overline{z''}) d\sigma_{n,m}(z) = \mathfrak{K}(z' \overline{z''}).$$

Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 4.3. Семейство векторов $\{\mathfrak{H}_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ является семейством когерентных состояний в $\mathbb{L}_-[n, m]$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int \mathfrak{H}_z \otimes \overline{\mathfrak{H}_z} d\sigma_{n,m}(z) = \mathbb{I}$$

(единичный оператор в $\mathbb{L}_-[n, m]$).

Назовем $\mathfrak{H}_z$ гипергеометрическими когерентными состояниями алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$.

В частности, если представление $\mathbb{B} = \mathbf{B}$ (3.7) реализовано в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_-$, то векторы χ_j имеют вид

$$\chi_j \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\frac{|m|}{2} - \frac{m}{2} + j, \frac{|m|}{2} + \frac{m}{2} + j}^n, \quad (4.12)$$

где ψ_{j_1, j_2}^n — функции (2.11). Векторы χ_j , $0 \leq j \leq n + |k|/2 - |m|/2 - |m - k|/2$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{L}_-[n, m] \in \mathcal{L}_-$, где реализуется неприводимая компонента представления (3.7). Это совместное собственное подпространство операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{M}_3$:

$$\mathcal{L}_-[n, m] = \left\{ \chi \in \mathcal{L}_- \mid \mathbf{S}_0 \chi = \hbar \left(n + 1 + \frac{|k|}{2} \right) \chi, \mathbf{M}_3 \chi = \hbar \left(m - \frac{k}{2} \right) \chi \right\} \quad (4.13)$$

(см. лемму 3.1).

В приложении Б приведен алгоритм построения когерентных состояний (4.6). Там же описана реализация операторов (3.7) в пространстве $\mathcal{L}_- = L^2(\mathbb{R}^4)$ и выписаны гипергеометрические когерентные состояния в этой реализации.

4.4. Когерентное преобразование. Когерентные состояния $\mathfrak{H}_z$ обладают важным свойством: $\mathbb{B}_j \mathfrak{H}_z = \overset{\circ}{B}_j \mathfrak{H}_z$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Здесь $\mathbb{B}_j$ — операторы представления алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ в пространстве $\mathbb{L}_-$, а операторы $\overset{\circ}{B}_j$ действуют по переменной z и получаются комплексным сопряжением из операторов $\overset{\circ}{B}_j$, заданных формулами (4.5).

Определим когерентное преобразование

$$\mathfrak{h}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\hbar} \int g(\bar{z}) \mathfrak{H}_z d\sigma_{n,m}(z), \quad g \in \mathcal{P}[n, m]. \quad (4.14)$$

ТЕОРЕМА 4.4. Когерентное преобразование $\mathfrak{h}: \mathcal{P}[n, m] \rightarrow \mathbb{L}_-[n, m]$, заданное формулой (4.14), унитарно. Обратное преобразование задается формулой

$$(\mathfrak{h}^{-1} \chi)(\bar{z}) = \langle \chi, \mathfrak{H}_z \rangle_{\mathbb{L}_-}$$

для всех $\chi \in \mathbb{L}_-[n, m]$.

Для любого фиксированного $w \in \mathbb{C}$ преобразование $\mathfrak{h}$ переводит гипергеометрический полином $\mathfrak{K}(w\bar{z})$ в гипергеометрическое когерентное состояние $\mathfrak{H}_w$.

Кроме того, выполнены формулы коммутации

$$\mathbb{B}_j \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \overset{\circ}{B}_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

т.е. $\mathfrak{h}$ сплетает абстрактное представление $\mathbb{B}$ алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ (3.8) в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_-$ с гипергеометрическим (неприводимым) представлением $\overset{\circ}{B}$ этой алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{P}[n, m]$.

5. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В АКСИАЛЬНО-ВОЗМУЩЕННОМ ПОЛЕ КУЛОНА–ДИРАКА

5.1. Когерентное преобразование усредненной задачи. Унитарное преобразование (4.14) сводит спектральную задачу в любом представлении алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ к спектральной задаче в пространстве полиномов. Рассмотрим нашу конкретную спектральную задачу (3.11). Для наглядности остановимся на модельном примере из п. 3.5, в котором усредненный гамильтониан $\underline{\mathbf{S}}_1$ задается явной формулой (3.10). Заметим, что интегральное представление

$$\varphi = \mathfrak{h}(\Phi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} \Phi(\bar{z}) \mathfrak{H}_z d\sigma_{n,m}(z)$$

автоматически дает точные решения первых двух уравнений (3.11) при любых амплитудах Φ . Далее, третье уравнение (3.11) в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_- = \mathcal{L}_-$ использует представление $\mathbb{B} = \mathbf{B}$ и в силу формулы (3.10) имеет вид

$$\lambda_n^4 \left[\lambda_n \left(12\mathbf{B}_3 - 8\mathbf{B}_2 - 4\hbar^2 \left(m - \frac{k}{2} \right)^2 - \hbar^2 k^2 + 4\hbar^2 \right) - \hbar^2 k \left(m - \frac{k}{2} \right) \mathbf{B}_0 \right] \varphi = \zeta \varphi.$$

Соответствующее уравнение для полинома Φ использует вместо $\mathbf{B}$ операторы $\overset{\circ}{B}$ (4.5). Возникает следующее уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} & \bar{z}(\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1) \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} - \left((2n + |k| - |m| - 1)\bar{z}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(3 \left(n + \frac{|k|}{2} - |m| - 1 \right) + \frac{\frac{k}{2} \left(m - \frac{k}{2} \right)}{n + 1 + \frac{|k|}{2}} \right) \bar{z} - |m| - 1 \right) \frac{d\Phi}{d\bar{z}} + \\ & \quad + \left(\left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m-k|}{2} \right) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2} \right) \bar{z} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}(|m| + 1) \left(3 \left(n + \frac{|k|}{2} \right) + 2 - 2|m| + \frac{\frac{k}{2} \left(m - \frac{k}{2} \right)}{n + 1 + \frac{|k|}{2}} \right) + \eta \right) \Phi = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь вместо ζ введено новое число η с помощью формулы $\zeta = 4\hbar^2 \lambda_n^5 \eta$.

5.2. Асимптотика спектра и собственных функций. Уравнение (5.1) – известное уравнение Хейна. Точнее, оригинальное уравнение Хейна [22] получается из (5.1) после линейной замены переменной $\bar{z} \rightarrow -(3 + \sqrt{5})\bar{z}/2$. Его решение обязательно есть полином из пространства $\mathcal{P}[n, m]$. Обозначим через η_j собственные числа, а через Φ_j – независимые полиномы Хейна ($j = 0, 1, \dots, n + |k|/2 - |m|/2 - |m - k|/2$). Если мы разложим их по базису мономов (4.7):

$$\Phi_j(\bar{z}) = \sum_{l=0}^{n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}} \Phi_j^l g_l(\bar{z}), \quad (5.2)$$

то собственные функции $\varphi = \varphi_j$ задачи (3.11) получим с помощью формулы $\varphi_j = \sum_l \Phi_j^l \chi_l$, где $\{\chi_l\}$ – базис (4.9) в $\mathbb{L}_-[n, m]$. Возвращение к собственным функциям исходной задачи (3.1) происходит с помощью усредняющего преобразования (см. п. 3.1).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\varepsilon \ll 1$. Асимптотика решения спектральной задачи (3.1) для частицы в поле Кулона–Дирака, возмущенном потенциалом $(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2)/4$, задается формулами

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4\lambda_n^2} + 2\varepsilon\hbar^2\lambda_n^2\eta_j + O(\varepsilon^2),$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} \Phi_j(\bar{z}) \mathfrak{H}_z d\sigma_{n,m}(z) + O(\varepsilon) = \sum_{l=0}^{n+\frac{|k|}{2}-\frac{|m|}{2}-\frac{|m-k|}{2}} \Phi_j^l \chi_l + O(\varepsilon). \quad (5.3)$$

Здесь λ_n – собственные значения (2.10) оператора “действие”, η_j – собственные числа уравнения Хейна (5.1); гипергеометрические когерентные состояния $\mathfrak{H}_z$, отвечающие представлению алгебры (3.8) в $\mathcal{L}_-$, определены в (4.6); χ_j – функции (4.12); Φ_j^l – коэффициенты разложения (5.2) полиномов Хейна Φ_j , а остаток оценивается в норме $\mathcal{L}_-$. В формулах (5.3), хотя это явно не отражено в обозначениях, числа η_j и Φ_j^l зависят от главных квантовых чисел n и m ; при этом n, m, j изменяются в интервалах

$$n = 1, 2, \dots, \quad \left| m - \frac{k}{2} \right| \leq n + \frac{|k|}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m-k|}{2}.$$

Таким образом, развита схема теории возмущений для гамильтониана частицы в поле электромагнитного монополя в предположении, что возмущающий потенциал аксиально-симметричен. Показано, что снятие вырождения старшей части спектра управляется динамической алгеброй с квадратичными коммутационными соотношениями (3.8). Для этой алгебры построены неприводимые представления (4.5). Они порождают модельные дифференциальные уравнения типа Хейна (5.1), через полиномиальные решения которых задается главный член асимптотики собственных функций исходного гамильтониана.

Дополнительная квазиклассическая асимптотика построенных решений (5.3) при больших квантовых числах $n, k \sim 1/\hbar$ может быть получена с помощью гипергеометрических когерентных состояний динамической алгебры (3.8) по общей схеме [5], как это было сделано в работах [8], [9] для случая нулевого магнитного заряда ($k = 0$).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Реализация гамильтониана частицы в поле Кулона–Дирака через гейзенберговскую алгебру

Покажем, как реализовать коммутационные соотношения (2.1), гамильтониан (2.2), оператор “действие” (2.4) и интегралы движения (2.7) с помощью обычной гейзенберговской алгебры. Используем спинорную процедуру Кустаанхеймо–Штифеля [23].

В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$ рассмотрим операторы умножения на координатные функции $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ и соответствующие им гейзенберговские импульсы $\hat{w} = -i\hbar\partial/\partial u$. Образует вектор-операторы

$$\hat{q} = \sigma u, \quad \hat{p} = \frac{1}{2|u|^2} D(u) \hat{w}, \quad (A.1)$$

где

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} 2(u_1 u_3 + u_2 u_4) \\ 2(u_1 u_4 - u_2 u_3) \\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 \end{pmatrix}, \quad D(u) = \begin{pmatrix} u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & -u_2 & u_1 \\ u_1 & u_2 & -u_3 & -u_4 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, введем вспомогательный оператор

$$\widehat{D}_0 = D_0(u)\widehat{w}, \quad D_0(u) \stackrel{\text{def}}{=} (-u_2, u_1, -u_4, u_3).$$

Заметим, что спектр $\widehat{D}_0$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$ состоит из чисел $\hbar k$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathfrak{L}_- \subset L^2(\mathbb{R}^4)$ его k -е собственное подпространство. Пусть также

$$\mathfrak{L} = \left\{ \psi \in \mathfrak{L}_- \mid \|\psi\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{\pi} \langle |\hat{q}| \psi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} < \infty \right\}.$$

ТЕОРЕМА А.1. 1. Операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ (А.1) задают представление алгебры (2.1) в пространстве $\mathfrak{L}$. В этом представлении гамильтониан (2.2) имеет вид

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{4|u|^2} |\widehat{w}|^2 - \frac{1}{|u|^2}.$$

2. Оператор “действие” (2.4) в пространстве $\mathcal{L}_- = \mathfrak{L}_-$ совпадает с гамильтонианом гармонического осциллятора $\widehat{S}_0 = (|\widehat{w}|^2 + \omega^2 |u|^2) / (4\omega)$ с частотой $\omega \stackrel{\text{def}}{=} 1/\lambda$.

3. Квантовые интегралы движения (2.7) оператора $\mathbf{S}_0$ в $\mathfrak{L}_-$ задаются формулами

$$\widehat{M} = \frac{1}{2} C(u) \widehat{w}, \quad \widehat{R} = \frac{1}{4\omega} (\sigma \widehat{w} + \omega^2 \sigma u), \quad (\text{А.2})$$

где $C(u)$ – матрица

$$C(u) = \begin{pmatrix} u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_4 & u_3 \end{pmatrix}.$$

4. Образующие (2.8), (2.9) в пространстве $\mathfrak{L}_-$ имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \frac{1}{4\omega} (\omega u + i \widehat{w})^2, & \widehat{V} &= \frac{1}{4\omega} \sigma (\omega u + i \widehat{w}), \\ \hat{v}^* &= \frac{1}{4\omega} (\omega u - i \widehat{w})^2, & \widehat{V}^* &= \frac{1}{4\omega} \sigma (\omega u - i \widehat{w}). \end{aligned}$$

Опишем теперь подпространство $\mathfrak{L}_-$ явными формулами. Введем вакуумный вектор $\rho_0 \in L^2(\mathbb{R}^4)$ с помощью уравнений

$$\hat{c} \rho_0 = 0, \quad \|\rho_0\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} = 1.$$

Здесь $\hat{c} = \sqrt{\omega} u + i \widehat{w} / \sqrt{\omega}$. Пусть также $\hat{b} = \hat{c}^*$.

ЛЕММА А.1. *Функции*

$$\rho_{l_1, l_2, j_1, j_2}(u) = \gamma (\widehat{b}_1 - i\widehat{b}_2)^{l_1} (\widehat{b}_1 + i\widehat{b}_2)^{l_2} (\widehat{b}_3 - i\widehat{b}_4)^{j_1} (\widehat{b}_3 + i\widehat{b}_4)^{j_2} \rho_0(u), \quad (\text{A.3})$$

$$j_1, j_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+, \quad l_2 - l_1 + j_2 - j_1 = k,$$

где $\gamma = (j_1! j_2! l_1! l_2! (4\hbar)^{j_1+j_2+l_1+l_2})^{-1/2}$, образуют ортонормированный базис в k -м собственном подпространстве $\mathfrak{L}_- \subset L^2(\mathbb{R}^4)$ оператора $\widehat{D}_0$.

Явные формулы для функций $\rho_{l_1, l_2, j_1, j_2}$ имеют вид

$$\rho_0(u) = \frac{\omega}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{\omega|u|^2}{2\hbar}\right),$$

$$\rho_{l_1, l_2, j_1, j_2}(u) = \left(\frac{\sqrt{\omega}(u_1 + i \operatorname{sgn}(l_2 - l_1)u_2)}{\sqrt{\hbar}}\right)^{|l_1 - l_2|} \left(\frac{\sqrt{\omega}(u_3 + i \operatorname{sgn}(j_2 - j_1)u_4)}{\sqrt{\hbar}}\right)^{|j_1 - j_2|} \times$$

$$\times L_{\min\{l_1, l_2\}}^{|l_1 - l_2|} \left(\frac{\omega(u_1^2 + u_2^2)}{\hbar}\right) L_{\min\{j_1, j_2\}}^{|j_1 - j_2|} \left(\frac{\omega(u_3^2 + u_4^2)}{\hbar}\right) \rho_0(u), \quad (\text{A.4})$$

где

$$L_N^s(y) = \sum_{j=0}^N \frac{\sqrt{N! \Gamma(N+s+1)}}{(N-j)! j! \Gamma(j+s+1)} (-1)^{N-j} y^j$$

— нормированные обобщенные полиномы Лагерра [21].

СЛЕДСТВИЕ А.1. В n -м собственном подпространстве

$$\mathfrak{L}_-[n] = \{\psi \in \mathfrak{L}_- \mid \widehat{S}_0 \psi = \lambda_n \psi\}$$

оператора $\widehat{S}_0$ имеется ортонормированный базис

$$\psi_{j_1, j_2}^n(u) = \rho_{n + \frac{|k|}{2} - \frac{k}{2} - j_1, n + \frac{|k|}{2} + \frac{k}{2} - j_2, j_1, j_2}(u),$$

$$0 \leq j_1 \leq n + \frac{|k|}{2} - \frac{k}{2}, \quad 0 \leq j_2 \leq n + \frac{|k|}{2} + \frac{k}{2}, \quad (\text{A.5})$$

где $\rho_{l_1, l_2, j_1, j_2}$ задаются формулой (А.3) или явной формулой (А.4).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Гипергеометрические представления

Б.1. Схема построения неприводимых представлений и когерентных состояний для класса алгебр с нелинейными перестановочными соотношениями. В этом пункте мы кратко излагаем некоторые результаты работы [10] (там же см. подробности и ссылки на литературу). Рассмотрим нелинейные перестановочные соотношения вида

$$[\mathbb{C}, \mathbb{B}] = f(\mathbb{A}), \quad \mathbb{C}\mathbb{A} = \theta(\mathbb{A})\mathbb{C}, \quad \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\theta(\mathbb{A}), \quad (\text{Б.1})$$

где $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_p)$ – набор коммутирующих генераторов

$$[\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_l] = 0, \quad j, l = 1, \dots, p. \quad (\text{Б.2})$$

Второе и третье соотношения в (Б.1) – векторные, т.е. $\mathbb{A}$ и $\theta(\mathbb{A})$ векторнозначны. Функция f в (Б.1) – скалярная. Для простоты будем предполагать, что функции f и θ_j являются полиномами.

Предположим, что в некотором гильбертовом пространстве задано представление алгебры (Б.1), (Б.2). Единичный вектор $\mathfrak{P}_0$ (из совместной области определения всех генераторов) назовем *вакуумным*, если он является собственным вектором для всех операторов $\mathbb{A}_j$ и аннулируется оператором уничтожения $\mathbb{C}$, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathfrak{P}_0 &= a\mathfrak{P}_0, & \mathbb{C}\mathfrak{P}_0 &= 0, \\ a &= (a_1, \dots, a_p), & \|\mathfrak{P}_0\| &= 1. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Будем рассматривать только *эрмитовы представления*

$$\mathbb{B}^* = \mathbb{C}, \quad \mathbb{A}_j^* = \mathbb{A}_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Тогда вектор a из (Б.3) – вещественный, $a \in \mathbb{R}^p$, и структурные функции f и θ в (Б.1) тоже вещественны:

$$f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Введем базисную функцию

$$\mathcal{F}_a: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_a(j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{j+1} \sum_{l=0}^j f(\mathcal{A}_a(l)), \quad (\text{Б.4})$$

где

$$\mathcal{A}_a(j) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\theta(\dots \theta(\theta(a)))}_j \quad (\text{Б.5})$$

– это композиция j экземпляров отображения θ .

Далее, определим подмножество $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^p$ следующим образом: будем говорить, что вектор a принадлежит подмножеству $\mathcal{R}$, если $\mathcal{F}_a(j) > 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, или если существует целое число $N \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$\mathcal{F}_a(j) > 0, \quad 0 \leq j < N, \quad \mathcal{F}_a(N) = 0. \quad (\text{Б.6})$$

В первом случае (когда $\mathcal{F}_a$ положительна всюду на $\mathbb{Z}_+$) положим $N = \infty$.

Заметим, что если $f(a) = 0$, то $a \in \mathcal{R}$ и $N = 0$, но если $f(a) < 0$, то $a \notin \mathcal{R}$. Кроме того, заметим, что число $N \leq \infty$ зависит от a : $N = N_a$.

Для каждого $a \in \mathcal{R}$ разложим функцию $\mathcal{F}_a$ на два сомножителя (вещественных или комплексных):

$$\mathcal{F}_a(j) = \mathcal{B}_a(j)\mathcal{C}_a(j), \quad j \geq 0, \quad (\text{Б.7})$$

с единственным условием $\mathcal{B}_a(N) = 0$ в случае (Б.6). Отметим, что в этом случае оба сомножителя $\mathcal{B}_a(j)$ и $\mathcal{C}_a(j)$ отличны от нуля при $0 \leq j \leq N-1$.

Наконец, определим положительные числа

$$\begin{aligned} s_0(a) &= 1, \\ s_j(a) &= \frac{j! \mathcal{F}_a(j-1) \dots \mathcal{F}_a(0)}{|\mathcal{B}_a(j-1)|^2 \dots |\mathcal{B}_a(0)|^2}, \quad 1 \leq j \leq N, \\ s_j(a) &= \infty, \quad j \geq N+1, \end{aligned}$$

где $N = N_a$ — число из условия (Б.6).

Используя числа $s_j(a)$, введем гильбертово пространство обобщенных функций над $\mathbb{R}^2$. Эти обобщенные функции антиголоморфны, т.е. аннулируются оператором $\partial/\partial z$, где z — стандартная комплексная координата на плоскости $\mathbb{R}^2$. Точнее, будем рассматривать обобщенные функции f над $\mathbb{R}^2$, представимые в виде степенного ряда

$$f(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \bar{z}^j.$$

Здесь $\bar{z}$ обозначает комплексное сопряжение. Через $\mathcal{P}_{s(a)}$ обозначим пространство таких рядов, которые удовлетворяют условию

$$\|f\|_{\mathcal{P}_{s(a)}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j(a) |f_j|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{P}_{s(a)}$ определим формулой

$$\langle f, f' \rangle_{\mathcal{P}_{s(a)}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} s_j(a) f_j \overline{f'_j}.$$

В случае (Б.6) пространство $\mathcal{P}_{s(a)}$ конечномерно и состоит из полиномов степени не больше N . В любом случае множество полиномов плотно в $\mathcal{P}_{s(a)}$, единичная функция 1 принадлежит $\mathcal{P}_{s(a)}$, и базисные мономы $\{\bar{z}^n\}$ порождаются из 1 степенями оператора умножения, который действует в $\mathcal{P}_{s(a)}$ следующим образом:

$$\bar{z}: \mathcal{P}_{s(a)} \rightarrow \mathcal{P}_{s(a)}, \quad \bar{z} \left(\sum_{j=0}^N f_j \bar{z}^j \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N f_{j-1} \bar{z}^j.$$

Здесь $N \leq \infty$, N конечно в случае (Б.6).

Очевидно, различным факторизациям (Б.7) соответствуют изоморфные гильбертовы пространства, а именно если $\mathcal{P}_{s(a)}$ и $\mathcal{P}_{s'(a)}$ — два таких пространства, то изоморфизм между ними задается формулой

$$\sum_j f_j \bar{z}^j \rightarrow \sum_j f'_j \bar{z}^j, \quad f'_j = \sqrt{\frac{s_j(a)}{s'_j(a)}} f_j. \quad (\text{Б.8})$$

Пусть H – абстрактное гильбертово пространство, $\mathcal{P}$ – гильбертово пространство антиголоморфных обобщенных функций и существует мономорфизм $\mathfrak{p}: \mathcal{P} \rightarrow H$.

“Интегральное ядро” $\mathfrak{P}$ этого мономорфизма – это по определению H -значная голоморфная обобщенная функция такая, что

$$\langle \psi, \mathfrak{p}(f) \rangle_H = \langle \langle \psi, \mathfrak{P} \rangle_H, f \rangle_{\mathcal{P}}$$

для всех $f \in \mathcal{P}$, $\psi \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мономорфизм $\mathfrak{p}: \mathcal{P} \rightarrow H$ назовем *когерентным преобразованием*, а его интегральное ядро $\mathfrak{P} \in H \otimes \overline{\mathcal{P}}$ – *семейством обобщенных когерентных состояний*.

Когерентное преобразование унитарно; обратное отображение задается формулой

$$\mathfrak{p}^{-1}(\psi) = \langle \psi, \mathfrak{P} \rangle_H$$

для всех $\psi \in H$.

Опишем теперь неприводимые представления алгебры (Б.1), (Б.2) и объекты, связанные с ними.

ТЕОРЕМА Б.1. 1. *Имеет место взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{R}$ и множеством неприводимых эрмитовых представлений алгебры (Б.1), (Б.2) с вакуумным вектором (Б.3). Представление, соответствующее $a \in \mathcal{R}$, конечномерно тогда и только тогда, когда существует целое $N = N_a$, удовлетворяющее условию (Б.6); в этом случае размерность представления равна $N + 1$.*

2. *При любом $a \in \mathcal{R}$ и любой факторизации (Б.7) операторы*

$$\mathring{B} = \bar{z} \mathcal{B}_a \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad \mathring{C} = C_a \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right) \frac{d}{d\bar{z}}, \quad \mathring{A} = \mathcal{A}_a \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right) \quad (\text{Б.9})$$

задают неприводимое эрмитово представление алгебры (Б.1), (Б.2) в гильбертовом пространстве $\mathcal{P}_{s(a)}$ с вакуумным вектором²⁾ 1.

3. *Представления (Б.9), отвечающие разным векторам $a \in \mathcal{R}$, не эквивалентны, но для каждого фиксированного $a \in \mathcal{R}$ представления, отвечающие разным факторизациям (Б.7), напротив, являются эквивалентными (их сплетает изоморфизм (Б.8)).*

4. *Абстрактное эрмитово представление алгебры (Б.1), (Б.2) в гильбертовом пространстве H_a с вакуумным вектором $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(a)$, подчиненным условиям (Б.3) с некоторым $a \in \mathbb{R}^p$, сплетается с представлением (Б.9) с помощью следующих обобщенных когерентных состояний:*

$$\mathfrak{P}_z = \mathfrak{P}_0 + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j! \overline{C_a}(j-1) \dots \overline{C_a}(0)} (z\mathbb{B})^j \mathfrak{P}_0. \quad (\text{Б.10})$$

²⁾Неприводимые эрмитовы представления в гильбертовых пространствах антиголоморфных функций без вакуумного вектора построены в работе [11].

В случае (Б.6) сумма по j в (Б.10) автоматически обрывается на $j = N$ (поскольку $\mathbb{B}^{N+1}\mathfrak{P}_0 = 0$).

Обобщенное воспроизводящее ядро

$$\mathfrak{K}_{s(a)}(z, \bar{w}) = \langle \mathfrak{P}_z, \mathfrak{P}_w \rangle_H,$$

соответствующее состояниям (Б.10), является ядром единичного оператора в $\mathcal{P}_{s(a)}$ и представимо в виде следующей обобщенной функции над $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$\mathfrak{K}_{s(a)}(z, \bar{w}) = \sum_{j \geq 0} \frac{(z\bar{w})^j}{s_j(a)}.$$

Эта обобщенная функция удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} z \overline{\mathcal{B}_a} \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathfrak{K}_{s(a)} &= \mathcal{C}_a \left(\bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \mathfrak{K}_{s(a)}, \\ \mathcal{A}_a \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathfrak{K}_{s(a)} &= \mathcal{A}_a \left(\bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \mathfrak{K}_{s(a)}. \end{aligned}$$

5. Предположим, что существует гладкая положительная функция ρ , удовлетворяющая уравнению

$$\overline{\mathcal{C}_a} \left(-x \frac{d}{dx} - 2 \right) \frac{d}{dx} \rho + \mathcal{B}_a \left(-x \frac{d}{dx} - 2 \right) \rho = 0, \quad x > 0,$$

и условиям

$$\int_0^\infty x^j |\rho(x)| dx < \infty, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Нормируем ρ следующим образом:

$$\int_0^\infty \rho(x) dx = 1.$$

Тогда

$$\int_0^\infty x^j \rho(x) dx = j! \prod_{l=0}^{j-1} \frac{\overline{\mathcal{C}_a}(l)}{\mathcal{B}_a(l)}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

и для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{P}_{s(a)}$

$$\|f\|_{\mathcal{P}_{s(a)}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(\bar{z})|^2 \rho(|z|^2) d\bar{z} dz.$$

Здесь $d\bar{z} dz = dx d\vartheta$, $z = \sqrt{x} e^{i\vartheta}$. В этом случае все элементы из $\mathcal{P}_{s(a)}$ являются регулярными L^2 -функциями на плоскости.

Подробное доказательство всех утверждений теоремы Б.1 приведено в работе [10], там же даны подробные ссылки на литературу.

Б.2. Алгебра $\mathcal{F}_{\text{quant}}$: неприводимые представления и когерентные состояния. Введем обозначения

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 + i\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}_2 - i\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_3, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{B}_4.$$

Тогда соотношения (3.8) и условие эрмитовости $\mathbf{B}_j^* = \mathbf{B}_j$ примут вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}, \mathbf{B}] &= 2\hbar(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mu\mathbf{A}_3), & [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] &= [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = [\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1] = 0, \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_1 - 2\hbar), & \mathbf{C}\mathbf{A}_1 &= (\mathbf{A}_1 - 2\hbar)\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{A}_2 + \hbar\mathbf{A}_1 - \hbar^2), & \mathbf{C}\mathbf{A}_2 &= (\mathbf{A}_2 + \hbar\mathbf{A}_1 - \hbar^2)\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B} &= \mathbf{B}\mathbf{A}_3, & \mathbf{C}\mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_3\mathbf{C}, \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{C}, & \mathbf{A}_j^* &= \mathbf{A}_j. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Это частный случай перестановочных соотношений (Б.1), (Б.2). Сравнивая (Б.11) с общими соотношениями (Б.1), (Б.2), находим

$$\begin{aligned} p &= 3, \\ f(A_1, A_2, A_3) &= 2\hbar(A_1A_2 + \mu A_3), \\ \theta(A_1, A_2, A_3) &= (A_1 - 2\hbar, A_2 + \hbar A_1 - \hbar^2, A_3). \end{aligned}$$

Следовательно, функции (Б.4), (Б.5) задаются формулами

$$\mathcal{F}_a(j) = \hbar(h^3j^3 - (2a_1 - \hbar)\hbar^2j^2 + (a_1^2 - 2a_2 - \hbar a_1)\hbar j + 2(a_1a_2 + \mu a_3)), \quad (\text{Б.12})$$

$$\mathcal{A}_a(j) = (a_1 - 2\hbar j, a_2 + a_1\hbar j - \hbar^2j^2, a_3). \quad (\text{Б.13})$$

В качестве a_1, a_2, a_3 выберем значения операторов $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0, \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_3, \mathbf{A}_3 = \mathbf{B}_4$ на вакуумном векторе в представлении (3.7).

ЛЕММА Б.1. Вектор $\chi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\frac{|m|}{2} - \frac{m}{2}, \frac{|m|}{2} + \frac{m}{2}}^n$ (2.11) является вакуумным вектором в представлении алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ операторами (3.7) в пространстве $\mathcal{L}_-[n, m]$ (4.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\chi_0 &= 0, \\ \mathbf{A}_1\chi_0 &= \hbar\left(n + \frac{|k|}{2} - |m|\right)\chi_0, \\ \mathbf{A}_2\chi_0 &= \frac{\hbar^2}{2}\left(\left(n + \frac{|k|}{2}\right)(1 + |m|) + \frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - m\right)\right)\chi_0, \\ \mathbf{A}_3\chi_0 &= \frac{\hbar^2}{2}\left(n + 1 + \frac{|k|}{2}\right)\left(m - \frac{k}{2}\right)\chi_0, \\ \|\chi_0\|_- &= 1. \end{aligned}$$

Итак, положим

$$\begin{aligned} a_1 &= \hbar \left(n + \frac{|k|}{2} - |m| \right), \\ a_2 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(\left(n + \frac{|k|}{2} \right) (1 + |m|) + \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - m \right) \right), \\ a_3 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(n + 1 + \frac{|k|}{2} \right) \left(m - \frac{k}{2} \right). \end{aligned}$$

При таких значениях a_j функции (Б.12), (Б.13) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a(j) &= \hbar^4 (j + 1 + |m|) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} - j \right) \times \\ &\quad \times \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} - j \right), \\ (\mathcal{A}_a(j))_1 &= \hbar \left(n + \frac{|k|}{2} - |m| - 2j \right), \\ (\mathcal{A}_a(j))_2 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(\left(n + \frac{|k|}{2} \right) (1 + |m|) + \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - m \right) + 2 \left(n + \frac{|k|}{2} - |m| \right) j - 2j^2 \right), \\ (\mathcal{A}_a(j))_3 &= \frac{\hbar^2}{2} \left(n + 1 + \frac{|k|}{2} \right) \left(m - \frac{k}{2} \right). \end{aligned} \tag{Б.14}$$

Число N из условия (Б.6) равно $N = n + |k|/2 - |m|/2 - |m - k|/2$.

Чтобы получить представление алгебры (Б.11) не псевдодифференциальными операторами общего положения, а дифференциальными операторами (см. [12]), функцию $\mathcal{F}_a$ следует разлагать на полиномиальные сомножители $\mathcal{B}_a$ и $\mathcal{C}_a$. В силу условия (Б.6) последний сомножитель из правой части формулы (Б.14) необходимо отнести к $\mathcal{B}_a$. Остается “распределить” первые два сомножителя из правой части (Б.14). Это можно сделать (с точностью до умножения на константу) четырьмя способами:

1. $\mathcal{B}_a(j) = \hbar^3 (j + 1 + |m|) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} - j \right) \times$
 $\times \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} - j \right),$
 $\mathcal{C}_a(j) = \hbar;$
2. $\mathcal{B}_a(j) = \hbar^2 \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} - j \right) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} - j \right),$
 $\mathcal{C}_a(j) = \hbar^2 (j + 1 + |m|);$
3. $\mathcal{B}_a(j) = \hbar^2 (j + 1 + |m|) \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} - j \right),$
 $\mathcal{C}_a(j) = \hbar^2 \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m - k|}{2} - j \right);$
4. $\mathcal{B}_a(j) = \hbar \left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} - \frac{|m - k|}{2} - j \right),$

$$\mathcal{C}_a(j) = \hbar^3(j+1+|m|)\left(n + \frac{|k|}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{|m-k|}{2} - j\right).$$

Согласно формулам (Б.9), вариантам 1 и 4 соответствуют представления дифференциальными операторами третьего порядка, а вариантам 2 и 3 – представления операторами второго порядка (все четыре представления эквивалентны друг другу). Остановимся на варианте 2.

Тогда с помощью теоремы Б.1 получим гипергеометрическое представление (4.5) алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{P}[n, m]$ со скалярным произведением (4.4), семейство когерентных состояний (4.6) и воспроизводящее ядро (4.11).

Б.3. Представление алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ и когерентные состояния в $L^2(\mathbb{R}^4)$. Представление $\mathbf{B}_j$ (3.7) алгебры $\mathcal{F}_{\text{quant}}$ можно реализовать в пространстве $L^2(\mathbb{R}^4)$. Тогда $\mathbf{B}_j$ – дифференциальные операторы четвертого порядка, действующие по переменным $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0 &= \widehat{B}_0 = \widehat{J}_3 - \widehat{K}_3, & \mathbf{B}_1 &= \widehat{B}_1 = \widehat{J}_1 \widehat{K}_2 - \widehat{J}_2 \widehat{K}_1, & \mathbf{B}_2 &= \widehat{B}_2 = \widehat{J}_1 \widehat{K}_1 + \widehat{J}_2 \widehat{K}_2, \\ \mathbf{B}_3 &= \widehat{B}_3 = \widehat{J}_3 \widehat{K}_3 + \frac{1}{2}(|\widehat{J}|^2 + |\widehat{K}|^2), \\ \mathbf{B}_4 &= \widehat{B}_4 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{|\widehat{J}|^2 + \frac{\hbar^2}{4}} + \sqrt{|\widehat{K}|^2 + \frac{\hbar^2}{4}}\right)(\widehat{J}_3 + \widehat{K}_3),\end{aligned}$$

где

$$\widehat{J} = \frac{1}{2}(\widehat{M} + \widehat{R}), \quad \widehat{K} = \frac{1}{2}(\widehat{M} - \widehat{R}),$$

а $\widehat{M}, \widehat{R}$ задаются формулами (А.2).

В этом случае гипергеометрические когерентные состояния (4.6) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_z &= \frac{\omega}{\pi \hbar} \left(\frac{\sqrt{\omega}(u_1 - i \operatorname{sgn}(m-k)u_2)}{\sqrt{\hbar}} \right)^{|m-k|} \left(\frac{\sqrt{\omega}(u_3 + i \operatorname{sgn}(m)u_4)}{\sqrt{\hbar}} \right)^{|m|} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{\omega|u|^2}{2\hbar}\right\} \sum_{j=0}^{n+\frac{|k|}{2}-\frac{|m|}{2}-\frac{|m-k|}{2}} \sqrt{\kappa_j} (-z)^j L_{n+\frac{|k|}{2}-\frac{|m|}{2}-\frac{|m-k|}{2}-j}^{|m-k|} \left(\frac{\omega(u_1^2 + u_2^2)}{\hbar} \right) \times \\ &\times L_j^{|m|} \left(\frac{\omega(u_3^2 + u_4^2)}{\hbar} \right),\end{aligned}\tag{Б.15}$$

где κ_j – коэффициенты (4.8), а L_N^s – нормированные обобщенные полиномы Лагерра [21]:

$$L_N^s(y) = \sum_{j=0}^N \frac{\sqrt{N!} \Gamma(N+s+1)}{(N-j)! j! \Gamma(j+s+1)} (-1)^{N-j} y^j.$$

Формула (Б.15) вытекает из (4.10), (4.12), (А.5) и (А.3).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-00952) и INTAS (грант № 00-257).

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [2] М. В. Карасев. Функци. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 2. С. 65–66.
- [3] М. В. Карасев, В. П. Маслов. УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 115–173; М. В. Карасев. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста. Препринт ИТФ-87-157Р. Киев: ИТФ АН УССР, 1987.
- [4] J. R. Klauder, B. S. Skagerstam. Coherent States. Applications in Physics and Mathematics. Singapore: World Scientific, 1985; А. М. Переломов. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
- [5] М. Karasev. Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. P. 393–400.
- [6] М. V. Karasev. Lett. Math. Phys. 2001. V. 56. P. 229–269.
- [7] М. В. Карасев, Е. М. Новикова. УМН. 1994. Т. 49. № 5. С. 169–170.
- [8] М. В. Карасев, Е. М. Новикова. ТМФ. 1996. Т. 108. № 3. С. 339–387.
- [9] М. V. Karasev, E. M. Novikova. J. Math. Sci., New York. 1999. V. 95. № 6. P. 2703–2798.
- [10] М. V. Karasev, E. M. Novikova. Adapted connections, Hamilton dynamics, geometric phases and quantization over isotropic submanifolds. In: Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry. Ed. M. V. Karasev. Providence, RI: AMS, 1998. P. 1–202.
- [11] М. В. Карасев, Е. М. Новикова. Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 6. С. 854–874.
- [12] М. В. Карасев, Е. М. Новикова. Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 1. С. 54–73.
- [13] В. П. Маслов. ТМФ. 1977. Т. 33. № 2. С. 185–209; М. В. Карасев, В. П. Маслов. УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 41–79; Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [14] Е. К. Склянин. Функци. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34; 1983. Т. 17. № 4. С. 34–48.
- [15] H. V. McIntosh, A. Cisneros. J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 3. P. 896–916.
- [16] I. Mladenov, V. Tsanov. J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 5865–5871.
- [17] T. Iwai, Y. Uwano. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 4083–4104.
- [18] I. Mladenov. Ann. Inst. H. Poincare. 1989. V. 50. № 2. P. 219–227.
- [19] A. Yoshioka, K. Ii. J. Math. Phys. 1990. V. 31. № 6. P. 1388–1394.
- [20] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [21] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [22] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
- [23] P. Kustaanheimo. Ann. Univ. Turku. A. 1964. V. 73. № 1. P. 3–7; P. Kustaanheimo, E. Stiefel. J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.

Поступила в редакцию 12.IV.2004 г.