Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Завьялов, К проблеме Ньютона–Вигнера в релятивистской квантовой механике свободных частиц, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 3, 348–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:19:24

© 2004 г.

О. И. Завьялов*

К ПРОБЛЕМЕ НЬЮТОНА–ВИГНЕРА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ

Обсуждается старая проблема Ньютона–Вигнера, которая понимается как проблема корректной координатной интерпретации релятивистской квантовой механики свободных частиц. Эта проблема актуальна и сейчас именно для квантовой теории поля, так как в S -матричном подходе к последней предполагается, что асимптотические поля описывают именно релятивистские свободные квантово-механические частицы. В свете современных воззрений оригинальное решение этой задачи, данное Ньютоном и Вигнером, не может уже восприниматься как достаточное, поскольку формально оно допускает расплывание волновых пакетов со сверхсветовой скоростью. Обсуждается возможность преодолеть эту трудность. Эта возможность связана с релятивистскими деформациями стандартной алгебры Гейзенберга. Продемонстрированы ситуации, когда при некоторых специальных деформациях возникает своего рода “десингуляризация” эффективного свободного гамильтониана, возможно, позволяющая сохранить в теории досветовую скорость.

Ключевые слова: оператор Ньютона–Вигнера, микроскопическая причинность.

1. ВВЕДЕНИЕ

В истории физики мы помним три великие революции: замену классической механики релятивистской механикой, замену классической нерелятивистской механики нерелятивистской же квантовой механикой и, наконец, появление квантовой теории поля, которая привычно рассматривается как венец интеллектуальных завоеваний человечества, сочетающий в единых рамках “истинной” (на этом этапе) теории как релятивистские, так и квантовые свойства Природы. Однако, как кажется, между этими первыми двумя и третьим историческими катаклизмами физики есть и существенная разница. В первых двух случаях основная философская парадигма – объект описания и термины этого описания – оставались неизменными. Традиционно считалось, что натуральная философия (как и старая ньютоновская механика) должна заниматься традиционным идеальным объектом – механической частицей, которая в каждый момент времени может быть обнаружена экспериментально в какой-то точке пространства. Основной ее характеристикой, таким образом, должна быть трехмерная координата этой точки $\mathbf{q}$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zavialov@mi.ras.ru

Разумеется, способ прогноза временной эволюции и, главным образом, способ формулировки закона преобразования этой величины при изменении инерциальной системы отсчета в теории относительности существенно иные, нежели в ньютоновской механике, однако сами исходные понятия частицы и ее координат остаются гносеологически и концептуально неизменными. Аналогично и в нерелятивистской квантовой механике, несмотря на радикальные отличия ее формализма, сохраняются эти базовые понятия частицы, понимаемой как “нечто”, что “где-то” находится (т.е. имеет координаты, быть может, ограниченные теми или иными условиями). Технически это проявляется в существовании оператора координаты $\hat{q}$ и пространственной плотности вероятности $\rho(\mathbf{q})$ обнаружить частицу в некоторой области, которая (вероятность), как известно, есть среднее значение (по состоянию частицы) характеристической функции (упомянутой области) от оператора координаты.

С другой стороны, квантовая теория поля имеет дело главным образом с полями, для которых проблема координатной локализации не стоит, например с электромагнитным полем. Однако считается, что она может описывать на тех же основаниях также и вполне несомненные частицы. В связи с этим следует подчеркнуть, что понятие координаты вообще отсутствует в рамках теоретического формализма квантовой теории поля даже и для свободных частиц. Величины типа координатной плотности вероятности появляются непротиворечиво только в низкоскоростном приближении. На это часто приводят следующие резоны. Говорят, что для фиксации координаты требуется очень быстрое (в пределе мгновенное) измерение. В силу соотношения неопределенности “энергия–время” возникающий при этом энергетический обмен становится неконтролируемым. Поэтому кажется понятным, что говорить о свободных частицах и их координатах не имеет большого смысла. Впрочем, эти аргументы отчасти обесцениваются тем обстоятельством, что они применимы, казалось бы, и к самой нерелятивистской квантовой механике, где координаты свободных (и не только свободных) частиц суть желанный элемент формализма. Так или иначе, мы обсудим подробно возможности координатной интерпретации квантовой теории поля хотя бы в случае свободных частиц.

Очень распространенная, хотя и несостоятельная, как мы увидим далее, точка зрения на этот предмет состоит в том, что вообще все хорошо и никакой проблемы нет, по крайней мере для свободных частиц. Поэтому мы начнем с критического разбора имеющихся в литературе суждений об операторе Ньютона–Вигнера. Мы надеемся, что этот разбор убедит читателя, что нетривиальная задача в этой связи все же возникает.

Как мы уже отмечали, корректное разрешение этой задачи необходимо даже и для самой квантовой теории поля, в которой свободные релятивистские частицы появляются через асимптотические поля.

В стандартной квантовой механике операторы, действующие в асимптотическом пространстве (в том числе и асимптотический оператор координаты), связаны унитарным образом (посредством волновых матриц Мёллера) с операторами, которые представляют свободную систему, так что в асимптотическом пространстве есть все аналоги векторов, отвечающих свободным частицам, и S -матричное описание процессов с изменением локализации последних вполне законно. В релятивистской квантовой теории поля асимптотические поля определяются с помощью несколько более сложной процедуры (например, посредством решения перенормированных уравнений Липпмана–Швингера),

не обязательно гарантирующей унитарную связь между асимптотическими и интерполирующими полями. Однако при этом, конечно же, предполагается, что структуры асимптотического пространства и пространства свободных частиц совпадают. Поэтому координатная интерпретация может быть органично включена в S -матричный формализм, и лишь ее внутреннее (на современном этапе) несовершенство препятствует ее востребованности.

Возможно, если удастся преодолеть эти внутренние трудности, в конечном счете в научный обиход можно будет ввести новый класс S -матричных процессов, который пока вынужденно игнорировался: процессы, в которых за счет взаимодействия меняется локализация частиц.

В этой статье мы рассмотрим специальный механизм, позволяющий обеспечить выполнение разумного условия микроскопической причинности, связанный, по существу, именно с эффектом десингуляризации свободного гамильтониана частиц.

2. ОПЕРАТОР НЬЮТОНА–ВИГНЕРА

Вокруг релятивистского квантово-механического оператора координаты, впервые построенного для свободных частиц в 1949 году Ньютоном и Вигнером [1], сложились многочисленные легенды. Эти легенды чаще всего скороговоркой и, как правило, во вспомогательном эвристическом материале, посвященном истории уравнения Клейна–Гордона, охотно повторяют учебники по квантовой теории поля, особенно вышедшие еще в те ранние годы. Большинство же современных монографий об операторе Ньютона–Вигнера и вообще о проблемах с координатной интерпретацией квантовой теории поля попросту умалчивают. И на это есть причины. Дело в том, что в том же 1949 году фон Нейман опубликовал статью [2], в которой доказал, что с точностью до унитарной эквивалентности существует только одно приемлемое (в частности, неприводимое) представление канонических перестановочных соотношений самосопряженными операторами. К сожалению, Вигнер и Ньютон, видимо, не прочитали эту статью или не придали значения “математическим умствованиям” ее автора. Между тем корень трудностей с координатной интерпретацией релятивистской теории лежит именно в теореме фон Неймана. Так или иначе, но первоначальная идея Ньютона и Вигнера продолжала интенсивно развиваться и получила многочисленных сторонников (см. [3]). Естественно, что ставшая уже привычной соответствующая мифология проникла и во многие вполне успешные и достаточно современные монографии (см., например, во всех иных отношениях превосходные книги [4] или [5]).

Ниже мы попытаемся в нескольких формулах (лишенных нумерации в данной статье, поскольку мы считаем, что в ряде случаев эти формулы неверны) резюмировать подобные, так сказать, “фольклорные” воззрения на эту тему, присутствующие в литературе.

Часто предлагается считать, что законными релятивистскими наследниками волновой функции $\tilde{\Psi}_t(\mathbf{x})$ в момент времени t и уравнения Шредингера являются соответственно комплексное скалярное поле $\varphi(x)$, подчиненное уравнению Клейна–Гордона $\varphi(x) = \varphi(t, \mathbf{x})$, и само уравнение Клейна–Гордона. При этом в качестве допустимых волновых функций используются только положительно-частотные решения уравнения, т.е. в момент времени $t = 0$ гильбертов представитель $\tilde{\Psi}_0(\mathbf{x})$ каждого решения определяется через сужение фурье-преобразования поля на верхнюю полу-массового гиперболоида.

Именно, в стандартной интерпретационной схеме предполагается, что

$$\frac{\Psi(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}^2 + 1)^{1/4}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \tilde{\Psi}_0(\mathbf{x})$$

есть амплитуда вероятности найти частицу с импульсом в интервале $d\mathbf{p}$. При этом считается, что исходное поле Клейна–Гордона равно

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2(\mathbf{p}^2 + 1)}} e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} + i\mathbf{p}\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{p}).$$

Предполагается также, что координатная плотность вероятности обнаружить частицу в той или иной области пространства есть

$$\rho(t, \mathbf{q}) = \frac{i}{2} \left[\varphi^* \frac{d}{dt} \varphi(t, \mathbf{q}) - \frac{d}{dt} \varphi^*(t, \mathbf{q}) \varphi \right].$$

Это первая из формул, которые представляются нам некорректными. Позднее мы вернемся еще к критике подобных наивных представлений.

Положительно-частотные решения уравнения Клейна–Гордона образуют релятивистски-инвариантное линейное множество. Его можно превратить в гильбертово пространство, определив скалярное произведение $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$ для каждой пары $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ положительно-частотных решений по правилу

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = i \int_{t=\text{const}} d\mathbf{x} \left\{ \varphi_1^*(t, \mathbf{x}) \frac{d}{dt} \varphi_2(t, \mathbf{x}) - \frac{d}{dt} \varphi_1^*(t, \mathbf{x}) \varphi_2(t, \mathbf{x}) \right\}.$$

Выразим величину $\rho(0, \mathbf{q})$, отвечающую стандартным наивным представлениям, через импульсную волновую функцию $\Psi(\mathbf{p})$. Находим

$$\rho(0, \mathbf{q}) = \frac{1}{2(2\pi^3)} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \Psi^*(\mathbf{p}_1) \Psi(\mathbf{p}_2) e^{i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\mathbf{q}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + 1}} \right\}.$$

В модельном случае двумерного пространства-времени аналогом этой формулы будет соотношение

$$\rho(0, q) = \frac{1}{2(2\pi)} \int dp_1 dp_2 \Psi^*(p_1) \Psi(p_2) e^{i(p_2 - p_1)q} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{p_2^2 + 1}} \right\}.$$

В этом случае импульсный аргумент волновой функции можно выбрать как новую переменную γ таким образом, чтобы

$$p = \text{sh } \gamma, \quad \omega(p) = \sqrt{p^2 + 1} = \text{ch } \gamma \quad (1)$$

(масса частицы предполагается здесь единичной). Соответственно волновую функцию в двумерной ситуации будем обозначать (допуская некоторую вольность) просто как $\psi(\gamma)$, а гильбертово скалярное произведение двух таких волновых функций ψ_1 и ψ_2 определим следующим образом:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d\gamma \psi_1^*(\gamma) \psi_2(\gamma). \quad (2)$$

Оператор импульса $\hat{p}$, действующий на волновую функцию, равен

$$\hat{p}\psi(\gamma) = (\text{sh } \gamma)\psi(\gamma). \quad (3)$$

Зависимость волновой функции свободной частицы от времени стандартна:

$$\psi_t(t, \gamma) = e^{-it \text{ch } \gamma} \psi(\gamma). \quad (4)$$

Чтобы ввести оператор координаты $\hat{q}$ (оператор Ньютона–Вигнера), определим сначала величину $\widehat{Q'}$ равенством

$$\widehat{Q'}\psi(\gamma) = \frac{i}{\text{ch } \gamma} \frac{d}{d\gamma} \psi(\gamma). \quad (5)$$

Как видно, операторы $\widehat{Q'}$ и $\hat{p}$ уже имеют перестановочные соотношения

$$[\widehat{Q'}, \hat{p}] = i, \quad (6)$$

характерные для координаты и импульса. Однако оператор $\widehat{Q'}$ неэрмитов. Идея Ньютона и Вигнера состояла в том, чтобы определить $\hat{q}$ как эрмитову часть только что построенной величины $\widehat{Q'}$. Именно, пусть

$$\hat{q} = \frac{\widehat{Q'} + \widehat{Q'}^+}{2} = i \frac{1}{2 \text{ch } \gamma} \frac{d}{d\gamma} + i \frac{d}{d\gamma} \frac{1}{2 \text{ch } \gamma} = i \frac{1}{\text{ch } \gamma} \left\{ \frac{d}{d\gamma} - \frac{\text{th } \gamma}{2} \right\}. \quad (7)$$

Во-первых, видно, что этот оператор по-прежнему подчиняется правильным перестановочным соотношениям. Во-вторых, по построению он является эрмитовым. Далее, нетрудно убедиться, что область определения можно выбрать так, что оператор $\hat{q}$, формально заданный правилом (7), окажется в существенном самосопряженным, так что проблема его самосопряженного расширения решается тривиальным образом.

В случае обычного четырехмерного пространства-времени скалярное произведение двух волновых функций $\Psi_1(\mathbf{p})$ и $\Psi_2(\mathbf{p})$ равно

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \frac{d\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})} \Psi_1^*(\mathbf{p}) \Psi_2(\mathbf{p}), \quad (8)$$

где $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}$.

Оператор импульса $\hat{\mathbf{p}}$ при этом задан соотношением

$$(\hat{\mathbf{p}}\Psi)(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\Psi(\mathbf{p}), \quad (9)$$

а оператор координаты $\hat{\mathbf{q}}$ — соотношением Ньютона–Вигнера

$$(\hat{\mathbf{q}}\Psi)(\mathbf{p}) = \left\{ i \frac{d}{d\mathbf{p}} - \frac{i\mathbf{p}}{2(\mathbf{p}^2 + 1)} \right\} \Psi(\mathbf{p}).$$

Зависимость релятивистской волновой функции от времени определяется, как всегда, равенством

$$\Psi_t(t, \mathbf{p}) = e^{-it\omega(\mathbf{p})} \Psi(\mathbf{p}). \quad (10)$$

В дальнейших рассуждениях мы будем для простоты выкладок всегда пользоваться именно моделью двумерного пространства-времени и соответственно формулой (7) для оператора координаты.

Пусть $\Delta_q(x)$ — характеристическая функция интервала $(0, q)$, т.е. $\Delta_q(x) = 1$, если $0 < x < q$, и $\Delta_q(x) = 0$, если $x < 0$ или $x > q$. Фурье-преобразование этой функции есть

$$\tilde{\Delta}_q(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \Delta_q(x) e^{-iax} = \frac{i}{a\sqrt{2\pi}} (e^{-iaq} - 1). \quad (11)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\Psi(p)$ – гладкая (нормированная) волновая функция из $L_2(p)$, рассматриваемая поточечно, а $\hat{q}$ – оператор координаты, заданный формулой (7). Тогда для плотности вероятности $\rho(q)$ обнаружить частицу в некотором интервале координат dq , содержащем точку q , верна формула

$$\begin{aligned}\rho(q) &= \frac{d}{dq} \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1}} \Psi^*(p) [\Delta_q(\hat{q}) \Psi](p) = \\ &= \int dp \frac{\Psi^*(p)}{\sqrt{\omega(p)}} dp' \frac{\Psi(p')}{\sqrt{\omega(p')}} \frac{1}{2\pi} e^{-iqp + iq p'}.\end{aligned}\quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с проверки того факта, что формула (12), примененная в нерелятивистской ситуации, когда сделаны соответствующие предположения о малости импульса p , приводит к обычному ответу, а именно к выражению

$$\rho_{\text{нер}}(q) = \tilde{\Psi}_{\text{нер}}^*(q) \tilde{\Psi}_{\text{нер}}(q), \quad (13)$$

где

$$\tilde{\Psi}_{\text{нер}}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{iqp} \Psi(p)$$

есть волновая функция в координатном представлении в нерелятивистском пределе.

В самом деле, из первого равенства (12) следует, что нерелятивистское приближение для величины $\rho(q)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\rho_{\text{нер}}(q) &= \int dp da \Psi^*(p) \Psi(p-a) \frac{1}{2\pi} e^{-iaq} = \int dp da \Psi^*(p) \Psi(p-a) \frac{1}{2\pi} e^{-iaq} = \\ &= \int dp da \Psi^*(p) \Psi(p-a) \frac{1}{2\pi} e^{+i(p-a)q} e^{-ipq} = \\ &= \int dp dp' \Psi^*(p) \Psi(p') \frac{1}{2\pi} e^{+ip'q} e^{-ipq} = \tilde{\Psi}_{\text{нер}}^*(q) \tilde{\Psi}_{\text{нер}}(q),\end{aligned}\quad (14)$$

что и требовалось установить.

Обратимся теперь к релятивистскому аналогу формулы (13). Прежде всего, в целях последующей унификации двумерных и четырехмерных рассмотрений перейдем к аналогам формул (9) и (10) для величин (2) и (7). Рассмотрим изоморфизм

$$\psi(\gamma) \rightarrow \Psi(p) \quad (15)$$

пространства $L_2[d\gamma]$ функций $\psi(\gamma)$, квадратично суммируемых по лебеговой мере $d\gamma$, в пространство $L_2[dp/\sqrt{p^2 + 1}]$ квадратично суммируемых по лоренц-инвариантной мере $dp/\sqrt{p^2 + 1}$ функций $\Psi(p)$. Пусть этот изоморфизм задан правилом

$$\Psi(p) = \psi(\text{arcsinh } p). \quad (16)$$

При этом изоморфизме в новом гильбертовом пространстве будем иметь скалярное произведение

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1}} \Psi_1^*(p) \Psi_2(p) \quad (17)$$

для любых двух векторов $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$. Что же касается оператора $\hat{q}$, заданного формулой (7), то в результате отображения (16) в новом пространстве он приобретет вид

$$\hat{q} = i \frac{d}{dp} - i \frac{p}{2(p^2 + 1)}. \quad (18)$$

Теперь заметим, что для любой гладкой функции $F(p)$ справедливо равенство (в смысле поточечной сходимости)

$$e^{i^2 a \frac{d}{dp}} F(p) = F(p - a). \quad (19)$$

Справедливо также равенство

$$\sqrt{\omega(p)} i \frac{d}{dp} (\sqrt{\omega(p)})^{-1} = \hat{q},$$

где оператор $\hat{q}$ задан соотношением (18), так что

$$\sqrt{\omega(p)} e^{-a \frac{d}{dp}} (\sqrt{\omega(p)})^{-1} = e^{ia\hat{q}}. \quad (20)$$

Таким образом, имеем

$$\rho(q) = \frac{d}{dq} \langle \Psi | \Delta_q(\hat{q}) | \Psi \rangle = \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{da}{2\pi} \Psi^*(p) [e^{ia\hat{q}} \Psi](p) e^{-iaq}. \quad (21)$$

Пользуясь равенством (20), находим

$$\rho(q) = \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{da}{2\pi} \Psi^*(p) e^{-iaq} \sqrt{\omega(p)} e^{-a \frac{d}{dp}} (\sqrt{\omega(p)})^{-1} \Psi(p).$$

Учтем теперь еще равенство (19) и запишем

$$\begin{aligned} \rho(q) &= \int \frac{dp da}{2\pi} \frac{\Psi^*(p)}{\sqrt{\omega(p)}} \frac{\Psi(p-a)}{\sqrt{\omega(p-a)}} e^{-ipq + i(p-a)q} = \\ &= \int \frac{dp dp'}{2\pi} \frac{\Psi^*(p)}{\sqrt{\omega(p)}} e^{-ipq} \frac{\Psi(p')}{\sqrt{\omega(p')}} e^{ip'q} = \tilde{\Psi}_{\text{рел}}^*(q) \tilde{\Psi}_{\text{рел}}(q), \end{aligned} \quad (22)$$

что и доказывает соотношение (12).

Таким образом, в релятивистском двумерном случае амплитуда плотности вероятности $\tilde{\Psi}_{\text{рел}}(q)$ обнаружить частицу в окрестности точки q отличается от $\tilde{\Psi}_{\text{нер}}(q)$ наличием в ее фурье-преобразовании дополнительного фактора $(p^2 + 1)^{-1/4}$ (если строить ее на основе оператора Ньютона–Вигнера). Так или иначе, формула (12) имеет существенно другую структуру, нежели процитированное ранее стандартное “фольклорное” соотношение. На самом деле все, что здесь поддается прямому пониманию, заключено в знаменитой теореме фон Неймана [2]. Согласно этой теореме существует каноническая неприводимая пара Шредингера операторов импульса $\hat{P}$: $\hat{P}\Psi'(p) = p\Psi'(p)$ и координаты $\hat{X}$: $\hat{X}\Psi'(p) = i d/dp(\Psi'(p))$, и она единственна в том смысле, что все другие вейлевские неприводимые самосопряженные реализации импульса и координаты в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентны конструкции Шредингера. Эта теорема

показывает, что конструкция Ньютона–Вигнера – это просто другая реализация гильбертова пространства. Как известно, такая новая реализация не может повлиять на физическое существо теории.

Чтобы еще раз убедиться в этом, рассмотрим изометрическое отображение $\hat{V}$ пространства $S[dp]$ (буква S символизирует здесь схему Шредингера) квадратично суммируемых (по лебеговой мере dp) функций $\Psi'(p)$ в пространство $L_2[dp/\sqrt{p^2+1}]$ функций $\Psi(p)$, квадратично суммируемых по мере $dp/\sqrt{p^2+1}$. Это изометрическое отображение задано соотношением

$$\hat{V}\Psi'(p) = \Psi(p) = (p^2 + 1)^{1/4}\Psi'(p). \quad (23)$$

Легко убедиться, что построенное отображение переводит оператор $\hat{P}$ в себя, а оператор $\hat{X} = i d/dp$ – в оператор Ньютона–Вигнера (18):

$$\hat{V}\hat{P}\hat{V}^{-1} = \hat{P}, \quad \hat{V}\hat{X}\hat{V}^{-1} = \hat{q}. \quad (24)$$

Заметим, что обратное к (23) преобразование переводит пространство $L_2[dp/\sqrt{p^2+1}]$ в $S[dp]$ и задается соотношением

$$\hat{V}^{-1}\Psi(p) = \Psi'(p) = (p^2 + 1)^{-1/4}\Psi(p). \quad (25)$$

Нетрудно проверить также, что и в реальном четырехмерном пространстве-времени существует подобное изометрическое отображение $\hat{U}$, осуществляющее унитарную эквивалентность между оператором Ньютона–Вигнера и канонической координатой Шредингера. Для этого нужно лишь положить

$$\hat{U} = (\mathbf{p}^2 + 1)^{1/4}. \quad (26)$$

Подчеркнем еще раз наш основной вывод: оператор координаты, известный как оператор Ньютона–Вигнера, окажется обычным оператором Шредингера $\hat{X} = i d/dp$, если использовать самое простое импульсное представление волновых функций. В двумерном пространстве-времени это означает, что импульсная волновая функция есть $\Psi'(p) = (p^2 + 1)^{-1/4}\Psi(p)$, а координатная волновая функция есть

$$\tilde{\Psi}_{\text{рел}}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{ipq} \frac{\Psi(p)}{\sqrt{\omega(p)}}$$

в полном согласии с формулой (22).

Из теоремы фон Неймана вытекает и другой фундаментальный факт, который, на первый взгляд, совершенно дискредитирует прямолинейную идею координатной интерпретации в квантовой теории поля даже для свободных частиц. До сих пор, как мы видели, такая теория могла быть развита параллельно стандартной квантовой механике. В частности, в ней существуют состояния свободных частиц, локализованные в той или иной области. Это такие состояния, для которых координатная волновая функция $\tilde{\Psi}(q)$ исчезает вне упомянутой области. Необходимым условием такой финитности служит,

как известно, требование, чтобы величина $\Psi(p)/\sqrt{\omega(p)}$ была целой функцией комплексной переменной p . Это условие, однако, немедленно разрушается при сколь угодно малой временной эволюции системы, так как функция $e^{-it\omega(p)}\Psi(p)/\sqrt{\omega(p)}$ заведомо имеет точки ветвления при любых t . Важно так же, что этот факт справедлив для любой размерности пространства-времени и, как понятно, определяется только видом функциональной зависимости гамильтониана от импульса. Используя привычный физический язык, можно сказать, что волновые пакеты релятивистских частиц неизбежно должны расплываться, причем скорость расплывания заведомо бесконечна. Ясно, что такой вывод неприемлем.

Обсудим теперь, какие есть возможности все же сохранить в теории разумную координатную интерпретацию.

3. ПРОГРАММА

Наше обсуждение оператора Ньютона–Вигнера показало, что на этой основе нет надежды решить проблему макроскопической причинности. Нам придется воспользоваться другим приемом. Здесь важно, что приведенная выше “по го” теорема, как бы свидетельствующая о неизбежности нарушения причинности в релятивистской теории, на самом деле трактует всего лишь необходимые условия этой печальной ситуации. Никто не утверждает, что, скажем, не существует какой-либо замены переменных, сингулярным образом зависящей от импульсов, которая не могла бы восстановить хорошие достаточные условия причинности.

Разумеется, мы хотим сохранить главную особенность релятивистской теории: она должна быть согласована с динамикой множества положительно-частотных решений уравнения Клейна–Гордона, т.е. может разыгрываться в том же гильбертовом пространстве. Жертва, которая кажется допустимой, состоит в том, чтобы, не затронув стандартную схему квантования, изменить саму алгебру операторов, для которой ищется представление в гильбертовом пространстве. Такая мысль связана с попыткой деформировать алгебру Гейзенберга, включив в нее новые генераторы. Это, конечно, крайне неприятно, поскольку нарушает привычное понимание квантования как соответствия между классическими скобками Пуассона и коммутаторами квантовых операторов, но, может быть (если в результате возникнет самосогласованная теория), мы сумеем убедить себя, что это, в сущности, формальное требование не так уж и дорого нам.

Попробуем проиллюстрировать нашу мысль, избрав следующую деформацию алгебры Гейзенберга:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\alpha(\hat{P}), \quad (27)$$

где $\alpha(p)$ – некоторая вещественная функция, которая содержит малый параметр, превращающий ее в единицу при нерелятивистских импульсах, так что в этом пределе восстанавливается хорошо знакомая алгебра Гейзенберга $[\hat{Q}, \hat{P}] = i$. Реализовать алгебру (27) легко в представлении гильбертова пространства, где оператор $\hat{P}$ диагонален. Именно, положим

$$\hat{P}\Psi'(p) = p\Psi'(p). \quad (28)$$

Оператор $\widehat{Q}$ зададим в том же пространстве соотношением

$$\{\text{hermit. part}\}\{\widehat{Q}\Psi'\}(p) = \{\text{hermit. part}\}\left[\alpha(p)/\left(i\frac{d}{dp}\right) + C(p)\right]\Psi'(p). \quad (29)$$

Здесь выражение $\{\text{hermit. part}\}\hat{\lambda}$ – это эрмитова часть оператора $\hat{\lambda}$. Оператор $\widehat{Q}$ мы сразу будем называть координатой. Однако мы пока воздержимся от того, чтобы именовать оператор $\widehat{P}$ импульсом частицы (хотя понятно, что оператор физического импульса частицы должен совпадать с $\widehat{P}$, по крайней мере, в нерелятивистском пределе).

В принципе каждое допустимое решение глобальной проблемы микропричинности заслуживает специального рассмотрения. При этом особое внимание должен привлекать закон распыления волновых пакетов. Вообще, мы думаем, что вопрос о распылении волнового пакета релятивистских свободных частиц подлежит скорее экспериментальному исследованию. В этой статье мы хотели только привести некоторые аргументы в пользу того, что ответ на этот вопрос может быть соотнесен с проблемой релятивистской деформации алгебры Гейзенберга, если, конечно, воспринять развитую выше философию всерьез.

Благодарности. Я признателен А. А. Славнову, который любезно согласился прочитать эту статью в рукописи, за важные замечания.

Список литературы

- [1] *T. Newton, E. Wigner.* Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 400.
- [2] *J. von Neumann.* Ann. Math. 1949. V. 50. P. 401.
- [3] *M. H. L. Pryce.* Proc. Roy. Soc. London, A. 1948. V. 195. P. 62; *C. Moller.* Ann. Inst. H. Poincaré. 1949. V. 11. P. 251; Commun. Dublin Inst. Adv. Stud. Ser. A. 1949. № 5. P. 1; *A. Papapetrou.* Acad. Athens. 1939. V. 14. P. 540.
- [4] *С. Швебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963.
- [5] *А. А. Соколов, И. М. Тернов.* Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 2.XII.2003 г.,
после доработки 17.VI.2004 г.