Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Агафонов, Дискретное отображение Z^γ : вложенные системы окружностей с комбинаторикой квадратной решетки и дискретные уравнения Пенлеве, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 1, 5–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:22:04

**ДИСКРЕТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ Z^γ :
ВЛОЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ ОКРУЖНОСТЕЙ С
КОМБИНАТОРИКОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКИ
И ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ**

Изучается дискретный аналог голоморфного отображения z^γ , который дается системой окружностей Шрамма с комбинаторикой квадратной решетки. Показано, что соответствующие системы окружностей являются вложенными и описываются специальными сепаратрическими решениями дискретных уравнений Пенлеве. Установлены глобальные свойства этих решений и дискретного отображения z^γ .

Ключевые слова: системы окружностей, дискретные конформные отображения, дискретное уравнение Пенлеве.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория систем окружностей – быстро развивающееся направление исследований на стыке комплексного анализа и дискретной геометрии. Недавний прогресс в этой области вызван идеей Терстона [1] об аппроксимации отображения Римана упаковками окружностей. К настоящему времени некоторые аспекты теории систем окружностей как дискретных аналогов конформных отображений хорошо исследованы, тогда как другие все еще не ясны.

Классические упаковки окружностей, составленные из открытых дисков без общих точек, были в дальнейшем обобщены на системы окружностей, в которых диски могут пересекаться (см., например, [2]). Рассматривались системы с различными комбинаториками. Шрамм ввел класс систем окружностей с комбинаторикой квадратной решетки [3]; гексагональные системы с постоянными мультиотношениями изучались Бобенко, Хоффманом и Сурисом в работе [4]; новый широкий класс гексагональных систем с постоянными углами пересечений исследовался в работе [5].

Сходимость дискретных конформных отображений, представленных упаковками окружностей, была доказана Родином и Салливаном [6]. Этот результат был уточнен для фиксированной регулярной комбинаторики. Хе и Шрамм [7] показали, что для

*Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, Leicestershire, UK. E-mail: sagafonov@rusfund.ru

гексагональных систем сходимость имеет класс C^∞ . Равномерная сходимость для систем окружностей с комбинаторикой квадратной решетки и ортогональными соседними окружностями была установлена Шраммом [3].

Такие факты, как теорема униформизации, относящаяся к реализациям клеточных комплексов с предписанной комбинаторикой в виде упаковок окружностей [8], дискретный принцип максимума, лемма Шварца и свойства жесткости [2], [9], дискретный принцип Дирихле [3], подчеркивают удивительную аналогию между системами окружностей и классической теорией.

Оказалось, что эффективный подход к описанию и построению систем с пересекающимися окружностями дает теория интегрируемых систем (см. [4], [5], [10]). В частности, изучаемые в данной работе системы окружностей Шрамма описываются разностным уравнением — стационарным уравнением Хироты (см. [3]), представляющим собой пример интегрируемого разностного уравнения. Оно впервые появилось в другой области математики — теории интегрируемых систем (обзор работ на эту тему см. в [11]).

С другой стороны, не слишком многое известно об аналогах стандартных голоморфных функций, хотя компьютерные эксперименты свидетельствуют об их существовании [12]. Для упаковок окружностей с гексагональной комбинаторикой единственными явно описанными примерами являются спирали Дойла, являющиеся дискретными аналогами экспоненциальных отображений [13], и конформно-симметричные упаковки — аналоги отношений функций Эйри [14]. Для систем с пересекающимися окружностями известно больше явных примеров: построены дискретные версии таких функций, как $\exp(x)$, $\operatorname{erf}(x)$ [3], z^γ , $\ln(x)$ [15] для систем, основанных на комбинаторике квадратной решетки; z^γ и $\ln(x)$ описаны также для гексагональных систем как для случая с мультиотношениями [4], так и постоянных углов [5].

В то время как компьютерные эксперименты показывают регулярное поведение систем окружностей, соответствующих дискретным z^γ и $\ln(x)$, для систем Шрамма было доказано только локальное свойство погружения [15]. Оно оказалось связанным со специальными решениями дискретных уравнений Пенлеве II, тем самым давая их геометрическую интерпретацию. Целью настоящей работы является доказательство глобального свойства вложения для основанных на квадратной решетке систем окружностей, соответствующих z^γ (соответствующая гипотеза была высказана в работе [15]).

Чтобы наглядно представить себе аналогию между системами окружностей Шрамма и конформными отображениями, рассмотрим регулярные системы, составленные из единичных окружностей, и предположим, что радиусы деформируются таким образом, что сохраняется ортогональность соседних окружностей и касание полусоседних. Дискретные отображения, переводящие точки пересечения единичных окружностей стандартных регулярных систем в соответствующие точки деформированных систем, имитируют классические голоморфные функции, причем радиусы деформированных окружностей аналогичны $|f'(z)|$ (см. рис. 1).

Легко показать, что решетка, образованная центрами окружностей в системе Шрамма и точками их пересечения, является специальным дискретным конформным отобра-

Рис. 1. Системы окружностей Шрамма как дискретное конформное отображение. Показана дискретная версия голоморфного отображения $z^{3/2}$.

жением (см. ниже определение 1). Такие отображения были введены авторами работы [16] в рамках дискретной интегрируемой геометрии безотносительно к системам окружностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ называется дискретным конформным отображением, если все его элементарные четырехугольники являются конформными квадратами, т.е. их двойные отношения равны -1 :

$$q(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1}) := \frac{(f_{n,m} - f_{n+1,m})(f_{n+1,m+1} - f_{n,m+1})}{(f_{n+1,m} - f_{n+1,m+1})(f_{n,m+1} - f_{n,m})} = -1. \quad (1)$$

Это определение обосновано следующими свойствами отображения:

- 1) оно является Мёбиус-инвариантным,
- 2) гладкое отображение $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является конформным (голоморфным или антиголоморфным), если и только если

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(f(x, y), f(x + \epsilon, y), f(x + \epsilon, y + \epsilon), f(x, y + \epsilon)) = -1$$

для всех $(x, y) \in D$.

Примеры дискретных отображений приведены в [16], [17]. Простейший метод построения дискретного аналога функции $f(z) = z^\gamma$ состоит в том, чтобы начать с $f_{n,0} = n^\gamma$, $n \geq 0$, $f_{0,m} = (im)^\gamma$, $m \geq 0$, и затем вычислить $f_{n,m}$ для всех $n, m > 0$, используя уравнение (1). Но поведение определенного таким образом отображения далеко от поведения обычных голоморфных отображений. Различные элементарные четырехугольники пересекаются (см. левую решетку на рис. 2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дискретное конформное отображение $f_{n,m}$ называется вложением, если внутренние части различных элементарных четырехугольников $(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1})$ не пересекаются.

Условие того, что дискретное конформное отображение является вложением, можно ослабить следующим образом.

Рис. 2. Два дискретных конформных отображения с близкими начальными данными $n = 0$, $m = 0$. Вторая решетка описывает дискретный вариант голоморфного отображения $z^{2/3}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дискретное конформное отображение $f_{n,m}$ называется погружением, если внутренние части соседних элементарных четырехугольников $(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1})$ не имеют общих точек.

Чтобы построить дискретный аналог отображения z^γ (правая решетка на рис. 2), являющийся вложением, требуется более сложный подход. Уравнение (1) можно дополнить неавтономной связью

$$\gamma f_{n,m} = 2n \frac{(f_{n+1,m} - f_{n,m})(f_{n,m} - f_{n-1,m})}{(f_{n+1,m} - f_{n-1,m})} + 2m \frac{(f_{n,m+1} - f_{n,m})(f_{n,m} - f_{n,m-1})}{(f_{n,m+1} - f_{n,m-1})}, \quad (2)$$

играющей центральную роль в данной работе. Эта связь, так же как и ее совместность с (1), выводится из некоторой задачи о монодромии (см. [15]). Предположим, что $0 < \gamma < 2$, и обозначим $\mathbb{Z}_+^2 = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : n, m \geq 0\}$. Исходя из асимптотики связи (2) при $n, m \rightarrow \infty$ и свойства $z^\gamma(\mathbb{R}_+) \in \mathbb{R}_+$, $z^\gamma(i\mathbb{R}_+) \in e^{\gamma\pi i/2}\mathbb{R}_+$ голоморфного отображения z^γ , введем следующее определение [10] “дискретного” z^γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Дискретным конформным отображением $Z^\gamma : \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $0 < \gamma < 2$, называется решение уравнений (1), (2) с начальными условиями

$$Z^\gamma(0, 0) = 0, \quad Z^\gamma(1, 0) = 1, \quad Z^\gamma(0, 1) = e^{\gamma\pi i/2}. \quad (3)$$

Очевидно, что $Z^\gamma(n, 0) \in \mathbb{R}_+$ и $Z^\gamma(0, m) \in e^{\gamma\pi i/2}(\mathbb{R}_+)$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$. Рис. 2 наводит на мысль, что Z^γ является вложением. Соответствующая теорема представляет собой основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 1. Дискретное отображение Z^γ при $0 < \gamma < 2$ является вложением.

Доказательство основано на анализе геометрических и алгебраических свойств соответствующих решеток.

В разделе 2 дается краткий обзор необходимых результатов из работы [15]. Показано, что Z^γ соответствует системе окружностей типа Шрамма (система окружностей, соответствующая $Z^{2/3}$, представлена на рис. 3). Далее, анализируя уравнения для

Рис. 3. Система окружностей Шрамма, соответствующая $Z^{2/3}$.

радиусов окружностей, мы показываем, что для доказательства того, что Z^γ является вложением, достаточно установить специальное свойство сепаратрического решения $P_{N,M}$, $Q_{N,M}$ следующей бесконечной последовательности систем обыкновенных разностных уравнений типа Пенлеве (N нумерует систему):

$$Q_{N,M+1} = \frac{(M+N)P_{N,M}(P_{N,M} - Q_{N,M}^2) - (M-N)Q_{N,M}^2(1 + P_{N,M})}{Q_{N,M}((M+N)(Q_{N,M}^2 - P_{N,M}) - (M-N)P_{N,M}(1 + P_{N,M}))},$$

$$P_{N,M+1} = \frac{(2M+\gamma)P_{N,M} + (2N+\gamma)Q_{N,M}Q_{N,M+1}}{(2(N+1)-\gamma)P_{N,M} + (2(M+1)-\gamma)Q_{N,M}Q_{N,M+1}}.$$

А именно показывается, что Z^γ является вложением, если бесконечная последовательность решений $Q_{N,M}$, $P_{N,M}$ при специальных начальных данных $Q_{N,N}$, $P_{N,N}$ удовлетворяет условиям

$$(\gamma - 1)(Q_{N,M}^2 - P_{N,M}) \geq 0, \quad Q_{N,M} > 0, \quad P_{N,M} > 0.$$

Существование и единственность соответствующих начальных данных устанавливаются в разделе 3.

При $N = 0$ система для $Q_{N,M}$ и $P_{N,M}$ редуцируется к специальному случаю дискретного уравнения Пенлеве dPII

$$(n+1)(x_n^2 - 1) \frac{x_{n+1} - ix_n}{i + x_n x_{n+1}} - n(x_n^2 + 1) \frac{x_{n-1} + ix_n}{i + x_{n-1} x_n} = \gamma x_n \quad (4)$$

(дополнительные примеры см. в [18], [19]). В работе [15] это уравнение являлось основным средством в доказательстве свойства погружения для отображения Z^γ : было показано, что Z^γ является погружением, если унитарное решение $x_n = e^{i\alpha_n}$ уравнения (4) при $x_0 = e^{i\gamma\pi/4}$ лежит в секторе $0 < \alpha_n < \pi/2$.

Подобные задачи изучались в рамках метода изомонодромийных деформаций [20]. В частности, были выведены формулы связности, описывающие асимптотику решений при $n \rightarrow \infty$ как функций начальных условий (см., в частности, [18]). Это представляется недостаточным для наших целей, поскольку нам требуется контролировать также

Рис. 4. Поверхность, склеенная из четырехугольников дискретного отображения, являющегося погружением, но не вложением.

поведение решений при конечных n . Геометрическое происхождение полученных нами уравнений позволяет доказать указанные выше свойства чисто геометрическими методами.

Чтобы проиллюстрировать различие между дискретными конформными отображениями, являющимися погружениями и вложениями, вообразим, что элементарные четырехугольники отображения сделаны из упругого нерастяжимого материала и склеены вдоль соответствующих ребер, образуя тем самым поверхность с границей. Если эта поверхность погружена, она является локально плоской. Если ее бросить на плоскую поверхность, на ней не возникнет складок. На первый взгляд кажется достаточным установить свойство вложения при условии $Z_{n,0} \rightarrow \infty$ и $Z_{0,m} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ (что следует из $Z_{n,0}^\gamma = (2c(\gamma)/\gamma)(n/2)^\gamma(1 + O(1/n^2))$, $n \rightarrow \infty$, см. [15]). Но поверхность с такими свойствами может тем не менее иметь некоторую предельную кривую с самопересечениями, что приводит к пересекающимся четырехугольникам. Гипотетический пример такой поверхности приведен на рис. 4.

2. СИСТЕМЫ ОКРУЖНОСТЕЙ И Z^γ

Напомним необходимые результаты, полученные в работе [15]. Отображение Z^γ из определения 4 соответствует специальному случаю системы окружностей с комбинаторикой квадратной решетки, определенной Шраммом в работе [3]. Действительно, дискретное отображение $f_{n,m}$, удовлетворяющее уравнениям (1) и (2) с начальными данными $f_{0,0} = 0$, $f_{1,0} = 1$, $f_{0,1} = e^{i\alpha}$, обладает свойством эквидистантности

$$f_{2n,0} - f_{2n-1,0} = f_{2n+1,0} - f_{2n,0}, \quad f_{0,2m} - f_{0,2m-1} = f_{0,2m+1} - f_{0,2m}$$

для любых $n \geq 1$, $m \geq 1$. При заданных начальных $f_{0,0}$, $f_{0,1}$ и $f_{1,0}$ условие (2) позволяет вычислить $f_{n,0}$ и $f_{0,m}$ для всех $n, m \geq 1$. Используя теперь уравнение (1), последовательно вычислим $f_{n,m}$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$. Заметим, что если $|f_{n+1,m} - f_{n,m}| = |f_{n,m+1} - f_{n,m}|$, то четырехугольник $(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1})$ имеет форму змея — он вписан в окружность и является симметричным относительно диаметра окружности $[f_{n,m}, f_{n+1,m+1}]$. Если угол при вершине $f_{n,m}$ равен $\pi/2$, то четырехугольник $(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1})$ также имеет форму змея. В этом случае четырехугольник симметричен по отношению к своей диагонали $[f_{n,m+1}, f_{n+1,m}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [15]. Пусть отображение $f_{n,m}$ удовлетворяет уравнениям (1) и (2) в $\mathbb{Z}_+^2$ с начальными данными $f_{0,0} = 0$, $f_{1,0} = 1$, $f_{0,1} = e^{i\alpha}$. Тогда все элементарные четырехугольники $(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1})$ имеют форму змея. Все ребра при вершине $f_{n,m}$, $n + m = 0 \pmod{2}$, имеют одну и ту же длину

$$|f_{n+1,m} - f_{n,m}| = |f_{n,m+1} - f_{n,m}| = |f_{n-1,m} - f_{n,m}| = |f_{n,m-1} - f_{n,m}|.$$

Все углы между соседними ребрами при вершине $f_{n,m}$, $n + m = 1 \pmod{2}$, равны $\pi/2$.

Из предложения 1 следует, что для любых n, m таких, что $n + m = 0 \pmod{2}$, точки $f_{n+1,m}, f_{n,m+1}, f_{n-1,m}, f_{n,m-1}$ лежат на окружности с центром в $f_{n,m}$.

СЛЕДСТВИЕ 1 [15]. Окружности, описанные вокруг четырехугольников $(f_{n-1,m}, f_{n,m-1}, f_{n+1,m}, f_{n,m+1})$, при $n + m = 0 \pmod{2}$ образуют систему окружностей типа Шрамма (см. [3]), т.е. окружности, описанные вокруг соседних четырехугольников, пересекаются ортогонально, а окружности, описанные вокруг полусоседних четырехугольников с общей вершиной, касаются друг друга (см. рис. 3).

Рассмотрим подрешетку $\{n, m: n + m = 0 \pmod{2}\}$ и обозначим через $\mathbf{V}$ ее квадрант

$$\mathbf{V} = \{z = N + iM: N, M \in \mathbb{Z}^2, M \geq |N|\},$$

где $N = (n - m)/2$, $M = (n + m)/2$. Мы будем использовать комплексную нумерацию $z = N + iM$ для узлов этой подрешетки. Обозначим через $C(z)$ окружность радиуса

$$R(z) = |f_{n,m} - f_{n+1,m}| = |f_{n,m} - f_{n,m+1}| = |f_{n,m} - f_{n-1,m}| = |f_{n,m} - f_{n,m-1}| \quad (5)$$

с центром в $f_{N+M, M-N} = f_{n,m}$. Из предложения 1 следует, что любые две окружности $C(z), C(z')$ при $|z - z'| = 1$ пересекаются ортогонально и любые две окружности $C(z), C(z')$ при $|z - z'| = \sqrt{2}$ касаются друг друга.

Пусть $\{C(z)\}$, $z \in \mathbf{V}$ – система окружностей типа Шрамма на комплексной плоскости. Определим $f_{n,m}: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow C$ следующим образом:

а) если $n + m = 0 \pmod{2}$, то $f_{n,m}$ является центром окружности $C((n - m)/2 + i(n + m)/2)$;

б) если $n + m = 1 \pmod{2}$, то

$$\begin{aligned} f_{n,m} &:= C\left(\frac{n - m - 1}{2} + i\frac{n + m - 1}{2}\right) \cap C\left(\frac{n - m + 1}{2} + i\frac{n + m + 1}{2}\right) = \\ &= C\left(\frac{n - m + 1}{2} + i\frac{n + m - 1}{2}\right) \cap C\left(\frac{n - m - 1}{2} + i\frac{n + m + 1}{2}\right). \end{aligned}$$

В дальнейшем такую функцию $f_{n,m}$ будем называть *дискретным конформным отображением, соответствующим системе окружностей $\{C(z)\}$* . Поскольку все элементарные четырехугольники $(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1})$ имеют форму змея, уравнение (1) выполнено автоматически.

ТЕОРЕМА 2 [15]. Пусть функция $f_{n,m}$, удовлетворяющая уравнениям (1) и (2) с начальными данными $f_{0,0} = 0$, $f_{1,0} = 1$, $f_{0,1} = e^{i\alpha}$, является погружением. Тогда функция $R(z)$, определяемая формулой (5), при $z \in \mathbf{V}_1 := \mathbf{V} \cup \{-N + i(N-1) | N \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} R(z)R(z+1)(-2M-\gamma) + R(z+1)R(z+1+i)(2(N+1)-\gamma) + \\ + R(z+1+i)R(z+i)(2(M+1)-\gamma) + R(z+i)R(z)(-2N-\gamma) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

а при $z \in \mathbf{V}_{\text{rint}} := \mathbf{V} \setminus \{\pm N + iN | N \in \mathbb{N}\}$ — уравнению

$$\begin{aligned} (N+M)(R(z)^2 - R(z+1)R(z-i))(R(z+i) + R(z+1)) + \\ + (M-N)(R(z)^2 - R(z+i)R(z+1))(R(z+1) + R(z-i)) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Наоборот, пусть $R(z): \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет уравнению (6) при $z \in \mathbf{V}_1$ и (7) при $z \in \mathbf{V}_{\text{rint}}$. Тогда $R(z)$ определяет погруженную систему окружностей с комбинаторикой квадратной решетки. Соответствующее дискретное конформное отображение $f_{n,m}$ является погружением и удовлетворяет условию (2).

Из начального условия (3) имеем

$$R(0) = 1, \quad R(i) = \operatorname{tg} \frac{\gamma\pi}{4}. \quad (8)$$

Уравнение (6) при $z = N + iN$ и $z = -N + i(N-1)$, $N \in \mathbb{N}$, принимает вид

$$R(\pm(N+1) + i(N+1)) = \frac{2N+\gamma}{2(N+1)-\gamma} R(\pm N + iN) \quad (9)$$

и определяет $R(\pm N + iN)$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Далее, уравнения (6) и (7) определяют $R(z)$ для всех других $z \in \mathbf{V}$. Кроме того, $R(z)$ удовлетворяет уравнению (7), которое при $z = -N + iN$, $N \in \mathbb{N}$, принимает вид

$$R(-N+1+iN)R(-N+i(N+1)) = R^2(-N+iN).$$

В силу симметрии

$$R(N-1+iN)R(N+i(N+1)) = R^2(N+iN).$$

Это уравнение позволяет вычислить $R(N+i(N+1))$. Более того, из него следует, что центр O окружности $C(N+iN)$ и точки

$$\begin{aligned} A &= C(N+iN) \cap C(N-1+iN) \setminus C(N-1+iN) \cap C(N+i(N+1)), \\ B &= C(N+iN) \cap C(N+i(N+1)) \setminus C(N-1+iN) \cap C(N+i(N+1)) \end{aligned}$$

коллинеарны, так что точки $f_{n,0}$ лежат на прямой линии. Чтобы доказать теорему 1, рассмотрим более общее начальное условие

$$R(0) = 1, \quad R(i) = a \operatorname{tg} \frac{\gamma\pi}{4}. \quad (10)$$

Радиусы $R(N + iN)$ и $R(N + i(N + 1))$ можно теперь выразить через Γ -функцию:

$$R(N + iN) = c(\gamma) \frac{\Gamma(N + \gamma/2)}{\Gamma(N + 1 - \gamma/2)}, \quad c(\gamma) = \frac{\gamma\Gamma(1 - \gamma/2)}{2\Gamma(1 + \gamma/2)}, \quad (11)$$

$$R(N + i(N + 1)) = \left(a \operatorname{tg} \frac{\gamma\pi}{4} \right)^{(-1)^N} \times \\ \times \left(\frac{(2(N - 1) + \gamma)(2(N - 3) + \gamma)(2(N - 5) + \gamma) \dots}{(2N - \gamma)(2(N - 2) - \gamma)(2(N - 4) - \gamma) \dots} \right)^2. \quad (12)$$

Теорема 2 позволяет полностью переформулировать свойство погруженности системы окружностей в терминах (6), (7). А именно, для доказательства того, что Z^γ есть погружение, следует показать, что решение системы (6), (7) с начальными данными (8) положительно при всех $z \in \mathbf{V}$ (см. [15]). Чтобы доказать теорему 1, требуется более тонкое свойство этого решения.

ТЕОРЕМА 3. *Если для решения $R(z)$ уравнений (6), (7) при $\gamma \neq 1$ с начальными условиями (8) выполняются неравенства*

$$R(z) > 0, \quad (\gamma - 1)(R(z)^2 - R(z - i)R(z + 1)) \geq 0 \quad (13)$$

в $\mathbf{V}_{\text{int}}$, то соответствующее дискретное конформное отображение есть вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $R(z) > 0$, соответствующее дискретное конформное отображение есть погружение (см. [3], [15]). Рассмотрим кусочно-линейную кривую Γ_n , образованную отрезками $[f_{n,m}, f_{n,m+1}]$, где $n > 0$ и $0 \leq m \leq n - 1$, и вектор $\mathbf{v}_n(m) = (f_{n,m}, f_{n,m+1})$ вдоль этой кривой. Согласно предложению 1 этот вектор вращается только в тех вершинах, в которых $n + m \equiv 0 \pmod{2}$, по мере того как m возрастает вдоль кривой. Знак угла вращения $\theta_n(m)$, где $-\pi < \theta_n(m) < \pi$, $0 < m < n$, определяется знаком выражения $R(z)^2 - R(z + i)R(z + 1)$ (заметим, что вращения нет, если это выражение обращается в нуль), где $z = (n - m)/2 + i(n + m)/2$ указывает на окружность с центром в $f_{n,m}$. Если $n + m \equiv 1 \pmod{2}$, положим $\theta_n(m) = 0$.

Теперь из условия теоремы и уравнения (7) следует, что вектор $\mathbf{v}_n(m)$ вращается при возрастании m в одном и том же направлении для всех n , а именно по часовой стрелке при $\gamma < 1$ и против часовой стрелки при $\gamma > 1$.

Рассмотрим сектор $B := \{z = re^{i\varphi} : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \gamma\pi/4\}$. Конечные точки кривых Γ_n лежат на границе сектора.

ЛЕММА 1. *Для кривой Γ_n имеет место неравенство*

$$\left| \sum_{m=1}^{n-1} \theta_n(m) \right| < \frac{\pi}{4}(1 + |\gamma|). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (14) при $1 < \gamma < 2$ по индукции. При $n = 1$ оно очевидно, поскольку кривая Γ_1 является отрезком, перпендикулярным к $\mathbb{R}_+$. Определим угол $\alpha_n(m)$ между $i\mathbb{R}_+$ и вектором $\mathbf{v}_n(m)$ с помощью $f_{n,m+1} - f_{n,m} = e^{i(\alpha_n(m) + \pi/2)} |f_{n,m+1} - f_{n,m}|$, где $0 \leq \alpha_n(m) < 2\pi$, $0 \leq m < n$. Тогда

$$\sum_{m=1}^l \theta_n(m) = \alpha_n(l) - \alpha_n(0) + 2\pi k_n(l)$$

для некоторого положительного целочисленного $k_n(l)$, возрастающего при увеличении l . Заметим, что $\alpha_n(0) < \pi/2$, что легко следует из (11), (12), и $\alpha_n(n-1) < (\gamma\pi/4 + \pi/2) - \pi/2 = \gamma\pi/4$, поскольку для погружения Z^γ угол между вектором $\mathbf{v}_n(n-1)$ и $e^{i\gamma\pi/4}\mathbb{R}_+$ меньше, чем $\pi/2$. Пусть неравенство (14) выполнено при $n > 1$:

$$\left| \sum_{m=1}^{n-1} \theta_n(m) \right| = \sum_{m=1}^{n-1} \theta_n(m) < \frac{\gamma\pi}{4}$$

(все $\theta_n(m)$ положительны при $1 < \gamma < 2$). Отсюда следует, что $k_n(l) = 0$, поскольку

$$\begin{aligned} k_n(l) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^l \theta_n(m) - \alpha_n(l) + \alpha_n(0) \right) \leq \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^l \theta_n(m) + |\alpha_n(l)| + |\alpha_n(0)| \right) < \\ &< \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\gamma\pi}{4} + \frac{\gamma\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) < 1 \end{aligned}$$

и $k_n(l)$ целочисленны. Пусть $\alpha_{n+1}(l) = \alpha_n(l) + \sigma_n(l)$. Все элементарные четырехугольники имеют форму змея, а потому $|\sigma_n(l)| < \pi/2$.

Докажем, что $k_{n+1}(m) = 0$ при $0 \leq m \leq n+1$. Очевидно, $k_{n+1}(0) = 0$. Предположим, что $k_{n+1}(l) = 0$, но $k_{n+1}(l+1) > 0$. Приращение левой части равенства

$$\sum_{m=1}^l \theta_{n+1}(m) = \alpha_{n+1}(l) - \alpha_{n+1}(0) + 2\pi k_{n+1}(l)$$

при $l \rightarrow l+1$ есть $\theta_{n+1}(l+1) < \pi$. Приращение правой части не меньше, чем $2\pi + \alpha_{n+1}(l+1) - \alpha_{n+1}(l) \geq 2\pi - \alpha_{n+1}(l) \geq 2\pi - \alpha_n(l) - |\sigma_n(l)| > 2\pi - \gamma\pi/4 - \pi/2 > \pi$. Полученное противоречие дает $k_{n+1}(l) = 0$ и $\sum_{m=1}^n \theta_{n+1}(m) = \alpha_{n+1}(n) - \alpha_{n+1}(0) \leq \alpha_{n+1}(n) < \gamma\pi/4$. Лемма 1 доказана.

Очевидное следствие леммы 1 состоит в том, что кривая Γ_n не имеет самопересечений и лежит в секторе B , поскольку поворот вектора $\mathbf{v}_n(m)$ вдоль кривой меньше, чем $\gamma\pi/4 < \pi/2$. Всякая такая кривая разрезает сектор B на конечную и бесконечную части. Поскольку кривая Γ_n является выпуклой и границы всех элементарных четырехугольников $(f_{n,m}, f_{n+1,m}, f_{n+1,m+1}, f_{n,m+1})$ для вложения Z^γ имеют положительную ориентацию, сегменты кривой Γ_{n+1} лежат в бесконечной части. Индукция по n завершает доказательство теоремы 3 при $1 < \gamma < 2$. Доказательство при $0 < \gamma < 1$ аналогично. Различия состоят в том, что угол $\theta_n(m)$ не является положительным, угол α естественно определяется отрицательным, $-2\pi < \alpha_n(m) < 0$, так что $-\pi/2 < \alpha_n(0) \leq 0$ и $(\gamma\pi/4)(2-\gamma) < \alpha_n(n-1) < 0$. Подробности оставим читателю.

СЛЕДСТВИЕ 2. $Z_{n,m}^\gamma$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n,m}^\gamma = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} Z_{n,m}^\gamma = \infty.$$

Поскольку конечные точки кривых Γ_n лежат на границе сектора, доказательство легко следует из выпуклости кривых Γ_n , неравенств (14) и равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n,0}^\gamma = \infty$.

3. Z^γ И ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Пусть $R(z)$ – решение уравнений (6), (7) с начальным условием (8). При $z \in \mathbf{V}_{\text{int}}$ определим $P_{N,M} = P(z) = R(z+1)/R(z-i)$, $Q_{N,M} = Q(z) = R(z)/R(z-i)$. Тогда уравнения (6), (7) можно переписать как

$$Q_{N,M+1} = \frac{(M+N)P_{N,M}(P_{N,M} - Q_{N,M}^2) - (M-N)Q_{N,M}^2(1+P_{N,M})}{Q_{N,M}((M+N)(Q_{N,M}^2 - P_{N,M}) - (M-N)P_{N,M}(1+P_{N,M}))}, \quad (15)$$

$$P_{N,M+1} = \frac{(2M+\gamma)P_{N,M} + (2N+\gamma)Q_{N,M}Q_{N,M+1}}{(2(N+1)-\gamma)P_{N,M} + (2(M+1)-\gamma)Q_{N,M}Q_{N,M+1}}. \quad (16)$$

Свойство (13) для уравнений (15), (16) принимает вид

$$(\gamma-1)(Q_{N,M}^2 - P_{N,M}) \geq 0, \quad Q_{N,M} > 0, \quad P_{N,M} > 0. \quad (17)$$

Уравнения (15), (16) можно рассматривать как динамическую систему для переменных M , а выражения (11), (12), определяющие начальные условия $P_{N,N+1}$, $Q_{N,N+1}$ для (15), (16), – как функции от a и N , где только $Q_{N,N+1}$ зависит от a .

ТЕОРЕМА 4. *Существует такое $a > 0$, что для решений $R(z)$ уравнений (6), (7) с начальными условиями (10) имеют место неравенства (13).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду следующей леммы достаточно доказать (13) только при $0 < \gamma < 1$.

ЛЕММА 2. *Если $R(z)$ – решение уравнений (6), (7) для γ , то $1/R(z)$ – решение уравнений (6), (7) для $\tilde{\gamma} = 2 - \gamma$.*

Лемма доказывается непосредственным вычислением.

Пусть $0 < \gamma < 1$ и $(P_{N,M}, Q_{N,M})$ соответствуют решению уравнений (6), (7), определенному начальными условиями (10). Определим вещественную функцию $F(P)$ при $P \in \mathbb{R}_+$ как

$$F(P) = \sqrt{P}, \quad 0 \leq P \leq 1; \quad F(P) = 1, \quad 1 \leq P.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} D_u &:= \{(P, Q) : P > 0, Q > F(P)\}, & D_d &:= \{(P, Q) : Q < 0\}, \\ D_0 &:= \{(P, Q) : P > 0, 0 \leq Q \leq F(P)\}, & D_f &:= \{(P, Q) : P \leq 0, Q \geq 0\}. \end{aligned}$$

Определим далее бесконечные последовательности $\{q_n\}, \{p_n\}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\{q_n(a)\} &:= \{Q_{0,1}, Q_{0,2}, Q_{1,2}, Q_{0,3}, Q_{1,3}, Q_{2,3}, \dots, Q_{0,M}, Q_{1,M}, \dots, Q_{M-1,M}, \dots\}, \\ \{p_n(a)\} &:= \{P_{0,1}, P_{0,2}, P_{1,2}, P_{0,3}, P_{1,3}, P_{2,3}, \dots, P_{0,M}, P_{1,M}, \dots, P_{M-1,M}, \dots\},\end{aligned}$$

и множества

$$\begin{aligned}A_u(n) &:= \{a \in \mathbb{R}_+ : (p_n(a), q_n(a)) \in D_u, (p_k(a), q_k(a)) \in D_0 \ \forall 0 < k < n\}, \\ A_d(n) &:= \{a \in \mathbb{R}_+ : (p_n(a), q_n(a)) \in D_d, (p_k(a), q_k(a)) \in D_0 \ \forall 0 < k < n\}.\end{aligned}$$

Множества $A_u(n)$ и $A_d(n)$ открыты, поскольку знаменатели в (15), (16) не обращаются в нуль в D_0 . Действительно, кривая $Q^2 = P + (M - N)P(P + 1)(M + N)$ лежит вне D_0 . Более того, прямое вычисление показывает, что $A_u(1) \neq \emptyset$ и $A_d(2) \neq \emptyset$, поэтому множества

$$A_u := \bigcup A_u(k), \quad A_d := \bigcup A_d(k)$$

не пусты. Наконец, определим

$$A_0 := \{a \in \mathbb{R}_+ : (p_n(a), q_n(a)) \in D_0, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Заметим, что A_0, A_u, A_d попарно не имеют общих точек и последовательности $\{p_n\}, \{q_n\}$ построены так, что

$$\mathbb{R}_+ = A_0 \cup A_u \cup A_d. \quad (18)$$

Действительно, $(P_{N,M}, Q_{N,M})$ не может перескочить из D_0 в D_f за один шаг $M \rightarrow M + 1$ поскольку $P_{N,M+1}$ положительно при положительных $P_{N,M}, Q_{N,M}, Q_{N,M+1}$. Соотношение (18) невозможно при $A_0 = \emptyset$, поскольку связное множество $\mathbb{R}_+$ не может быть покрыто двумя открытыми непустыми подмножествами A_u и A_d без общих точек, а потому $A_0 \neq \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Множество A_0 состоит только из одного элемента, а именно $A_0 = \{1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительное решение $R(z)$ уравнений (6), (7) дает дискретное конформное отображение, являющееся погружением и соответствующее системе окружностей с радиусами $R(z)$. В работе [15] доказано, что начальное значение (10) для погружения Z^γ состоит только из одного элемента $a = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Используя теоремы 3 и 4 и предложение 2, можно легко вывести теорему 1.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предложенный в данной работе подход можно применить к доказательству вложенности систем окружностей, соответствующих дискретным Z^2 и $\text{Ln}(x)$. (Относительно этих систем было доказано их свойство быть погружением [15].) После несложных модификаций метод представляется также применимым к доказательству глобального свойства дискретного Z^K , предложенного в работе [15] для натуральных $K > 2$. Подробности будут приведены в другой работе.

Благодарности. Автор благодарен А. Бобенко и Ю. Сурису за полезные обсуждения. Работа была поддержана EPSRC, грант № Gr/N30941.

Список литературы

- [1] *W. P. Thurston*. The finite Riemann mapping theorem. Talk delivered at “Symposium on the Occasion of the Proof of the Bieberbach Conjecture”. Purdue University, West Lafayette, Ind., USA, March, 1985.
- [2] *Z.-X. He*. *Ann. Math.* 1999. V. 149. P. 1–33.
- [3] *O. Schramm*. *Duke Math. J.* 1997. V. 86. P. 347–389.
- [4] *A. I. Bobenko, T. Hoffmann, Yu. B. Suris*. *Int. Math. Res. Notices*. 2002. V. 3. P. 111–164.
- [5] *A. I. Bobenko, T. Hoffmann*. Hexagonal circle patterns and integrable systems. Patterns with constant angles. <http://xxx.lanl.gov/abs/math.CV/0109018>.
- [6] *B. Rodin, D. Sullivan*. *J. Diff. Geom.* 1987. V. 26. P. 349–360.
- [7] *Z.-X. He, O. Schramm*. *Acta Math.* 1998. V. 180. P. 219–245.
- [8] *A. F. Beardon, K. Stephenson*. *Indiana Univ. Math. J.* 1990. V. 39. № 4. P. 1383–1425.
- [9] *A. Marden, B. Rodin*. On Thurston’s formulation and proof of Andreev’s theorem. In: *Computational Methods and Function Theory. Proc. of Conf. (Valparaiso, Chile, March 13–18, 1989)*. *Lect. Notes Math.* V. 1435. Eds. St. Ruscheweyh et al. Berlin: Springer, 1990. P. 103–115.
- [10] *A. Bobenko, U. Pinkall*. Discretization of surfaces and integrable systems. In: *Discrete Integrable Geometry and Physics*. Eds. A. I. Bobenko, R. Seiler. Oxford: Oxford Univ. Press, 1999. P. 3–8.
- [11] *A. Zabrodin*. A survey of Hirota’s difference equations. *solv-int/9704001*.
- [12] *T. Dubejko, K. Stephenson*. *Experimental Math.* 1995. V. 4. № 4. P. 307–348.
- [13] *K. Callahan, B. Rodin*. *Complex Variables*. 1993. V. 21. P. 171–177.
- [14] *A. I. Bobenko, T. Hoffmann*. *Experimental Math.* 2001. V. 10. № 1. P. 141–150.
- [15] *S. I. Agafonov, A. I. Bobenko*. *Int. Math. Res. Notices*. 2000. V. 4. P. 165–193.
- [16] *A. Bobenko, U. Pinkall*. *J. Reine Angew. Math.* 1996. V. 475. P. 187–208.
- [17] *T. Hoffmann*. Discrete CMC surfaces and discrete holomorphic maps. In: *Discrete Integrable Geometry and Physics*. Eds. A. I. Bobenko, R. Seiler. Oxford: Oxford Univ. Press, 1999. P. 97–112.
- [18] *A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev*. *Commun. Math. Phys.* 1991. V. 142. P. 313–344.
- [19] *F. W. Nijhoff, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta*. On discrete Painlevé equations associated with the lattice KdV systems and the Painlevé VI equation. *solv-int/9812011*.
- [20] *A. R. Its, V. Y. Novokshenov*. The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations. *Lect. Notes Math.* V. 1191. Berlin: Springer, 1986.