Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Аратин, Ж. ван де Лер, Интегрируемая структура в основе уравнений ВДВВ,
ТМФ, 2003, том 134, номер 1, 18–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:33:37

© 2003 г.

Х. Аратин*, Ж. ван де Лер†

ИНТЕГРИРУЕМАЯ СТРУКТУРА В ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ВДВВ

Интегрируемая структура, лежащая в основе уравнений Виттена–Дайкграфа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ), отождествляется с результатом редукции задачи Римана–Гильберта для однородной группы петель $\widehat{GL}(N, \mathbb{C})$. Редукция требует, чтобы одевающие матрицы были неподвижными точками автоморфизма группы петель порядка два, что дает подиерархию иерархии $\widehat{gl}(N, \mathbb{C})$, содержащую только нечетные потоки. Модель содержит вирасоровскую симметрию, а наложение вирасоровских связей обеспечивает свойство однородности структуры Дарбу–Егорова. Матрицы одевания редуцированной модели дают решения уравнений ВДВВ.

Ключевые слова: уравнения ВДВВ, одевание, метрики Дарбу–Егорова, иерархия Кадомцева–Петвиашвили, тау-функции, факторизация Римана–Гильберта.

1. ВВЕДЕНИЕ

Массивные топологические теории поля можно локально классифицировать с помощью системы дифференциальных уравнений Дарбу–Егорова

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \beta_{ij} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq k \neq j, \quad \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial u_k} \beta_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (1)$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad (2)$$

где предполагается, что

$$\sum_{k=1}^N u_k \frac{\partial}{\partial u_k} \beta_{ij} = -\beta_{ij}. \quad (3)$$

Этот факт был отмечен Дубровиным в работах [1], [2]. Величины β_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$, при $i \neq j$ называются коэффициентами вращения. Такие уравнения Дарбу–Егорова являются условиями совместности для следующей линейной системы дифференциальных

*Department of Physics, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA. E-mail: aratyn@uic.edu

†Mathematical Institute, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands.
E-mail: vdleur@math.uu.nl

уравнений, зависящих от спектрального параметра λ :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} A_{jk}(u, \lambda) = \beta_{ji}(u) A_{ik}(u, \lambda), \quad i \neq j = 1, \dots, N, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial u_j} A_{ik}(u, \lambda) = \lambda A_{ik}(u, \lambda), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

для каждого $k = 1, \dots, N$. Пусть $V(u) = (\beta_{ij}(u)(u_j - u_i))_{1 \leq i, j \leq n}$. Предположим, что эта матрица может быть приведена к диагональному виду. Тогда можно построить локальное полупростое фробениусово многообразие, которое дает алгебраическую формулировку теории массивного топологического поля следующим образом. Найдем обратимый степенной ряд

$$A(u, \lambda) = A_0(u) + A_1(u)\lambda + A_2(u)\lambda^2 + \dots,$$

являющийся решением этой системы. Тогда

$$\sum_{k=1}^N u_k \frac{\partial}{\partial u_k} A_0(u) = V(u) A_0(u).$$

Теперь непосредственно можно проверить, что $A_0(u)^{-1} V(u) A_0(u)$ является постоянной матрицей, откуда следует существование обратимой комплексной матрицы S такой, что матрица

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i E_{ii} = S^{-1} A_0(u)^{-1} V(u) A_0(u) S$$

является диагональной. Пусть теперь $A(u) = A_0(u)S$, где $A(u) = (a_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^N u_k \frac{\partial}{\partial u_k} A(u) = A(u) \mu.$$

Дубровин показал [2], что в области $u_i \neq u_j$ и $a_{11} a_{21} \dots a_{N1} \neq 0$ существует локальное полупростое фробениусово многообразие со скейлинговыми размерностями $\mu_\alpha - \mu_1$ (см. также [3]). Диагональная метрика имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n a_{i1}^2(u) (du_i)^2.$$

Плоские координаты x^α определяются как

$$\sum_{\beta} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\beta(u)}{\partial u_i} = a_{i1}(u) a_{i\alpha}(u),$$

где

$$\eta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i\alpha}(u) \alpha_{i\beta}(u).$$

Наконец, структурные коэффициенты

$$c_{\alpha\beta\gamma}(x(u)) = \frac{\partial^3 F(x(u))}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{i\alpha}(u)a_{i\beta}(u)a_{i\gamma}(u)}{a_{i1}(u)}$$

являются производными третьего порядка ВДВВ-препотенциала $F(x)$.

В настоящей работе для получения подобной структуры мы используем задачу Римана–Гильберта для группы петель в $GL(N)$. Условия симметрии (2) для коэффициентов вращения получаются с использованием картановской инволюции на группе петель. Модель обладает симметрией Вирасоро, а наложение вирасоровских связей обеспечивает свойство однородности (3) структуры Дарбу–Егорова.

2. ПОТОКИ СИММЕТРИИ, ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА И τ -ФУНКЦИЯ

Введем $G = \widehat{GL}(N)$ -потоки в терминах (расширенной) задачи Римана–Гильберта, заданной с использованием двух подгрупп группы петель G , определенных как

$$G_- = \left\{ g \in G \mid g(\lambda) = 1 + \sum_{i < 0} g^{(i)} \right\}, \quad G_+ = \left\{ g \in G \mid g(\lambda) = \sum_{i \geq 0} g^{(i)} \right\},$$

где g_i имеет градуировку i относительно однородной градуировки, определяемой дифференцированием $\lambda d/d\lambda$. Кроме того, выполняется $G_+ \cap G_- = I$. Пусть соответствующая группе G алгебра петель есть $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{gl}(N)$. Эта алгебра расщепляется в прямую сумму $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{G}}_+ \oplus \widehat{\mathcal{G}}_-$ относительно однородной градуировки, где $\widehat{\mathcal{G}}_\pm$ – алгебры Ли подгрупп $G_\pm$.

Пусть “неодетая” волновая (матричная) функция имеет вид

$$\Psi_0(\mathbf{u}, \lambda) = \exp \left(\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} E_{jj}^{(n)} u_j^{(n)} \right) = \sum_{j=1}^N E_{jj} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_j^{(n)} \right). \quad (6)$$

Определим расширенную задачу факторизации Римана–Гильберта в однородной градуировке:

$$\Psi_0(\mathbf{u}, \lambda) g(\lambda) = \Theta^{-1}(\mathbf{u}, \lambda) M(\mathbf{u}, \lambda), \quad (7)$$

где $g: S^1 \rightarrow G_- G_+$, $\Theta \in G_-$, $M \in G_+$. Мы используем мультитременные обозначения $(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ для N мультипотоков $\mathbf{u}_j$. Каждый аргумент $\mathbf{u}_j$, $j = 1, \dots, N$, является сокращенным обозначением для мультипотоков $u_j^{(n)}$, где n пробегает значения от 1 до ∞ .

Для симметричных потоков из уравнения (7) получаем выражения

$$\frac{\partial}{\partial u_j^{(n)}} \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = -(\Theta E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1})_- \Theta(\mathbf{u}, \lambda), \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j^{(n)}} M(\mathbf{u}, \lambda) = (\Theta E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1})_+ M(\mathbf{u}, \lambda), \quad (9)$$

где $(\dots)_\pm$ обозначает проекции на $\widehat{\mathcal{G}}_\pm$. Заметим, что $\sum_{j=1}^N \partial \Theta / \partial u_j^{(n)} = 0$ для любого $n > 0$.

Ниже мы для краткости обозначим $u_j = u_j^{(1)}$ и $\partial_j = \partial/\partial u_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, N$.
С факторизацией Римана–Гильберта естественно связать один-форму

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{\lambda} \left(\text{tr} \left(\Theta^{-1} \frac{d\Theta}{d\lambda} E_{jj}^{(n)} \right) \right) du_j^{(n)} = \\ &= - \text{Res}_{\lambda} \left(\text{tr} \left(\Theta^{-1} \frac{d\Theta}{d\lambda} \Psi_0^{-1} d\Psi_0 \right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

которая в силу уравнения (8) замкнута, $d\mathcal{J} = 0$, где

$$d = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} du_j^{(n)} \partial/\partial u_j^{(n)}.$$

Следовательно, локально $\mathcal{J}$ можно записать как d от нуль-формы, являющейся некоторой функцией динамических переменных модели. Эта функция традиционно обозначается как логарифм τ -функции:

$$\mathcal{J} = -d \ln \tau = - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \ln \tau}{\partial u_j^{(n)}} du_j^{(n)}. \quad (11)$$

Последнее уравнение можно эффективно проинтегрировать, что дает явное выражение для τ -функции. Для этого требуется расширить формализм с группы петель до центрально-расширенных групп. Как и в случае АКНС-иерархии с τ -функцией, определяемой в работе [4], мы будем использовать вложение в центрально-расширенную группу, элементы которой обозначаются как $\hat{g}$, и положим

$$\tau(\mathbf{u}) = \langle 0 | \widehat{\Psi_0 g} | 0 \rangle, \quad (12)$$

где $|0\rangle$ – состояние старшего веса такое, что $X_{\geq 0}|0\rangle = 0$, $\langle 0|X_{\leq 0} = 0$ и $\langle 0|\hat{k}|0\rangle = 1$ ($\hat{k}$ обозначает направление, связанное с центральным элементом аффинной алгебры Каца–Мури).

Пусть $\theta^{(-1)}$ – член разложения в градуировке -1 :

$$\Theta = 1 + \theta^{(-1)}\lambda^{-1} + \theta^{(-2)}\lambda^{-2} + \dots \quad (13)$$

Из уравнений (10) и (11) (для $n = 1$) находим

$$(\theta^{(-1)})_{ii} = -\partial_i \ln \tau. \quad (14)$$

Введем теперь коэффициенты вращения β_{ij} , $i \neq j$, как недиагональные элементы матрицы $\theta^{(-1)}$:

$$\beta_{ij} = (\theta^{(-1)})_{ij}, \quad i \neq j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Для матрицы $\theta^{(-1)}$ из уравнения (8) находим

$$\partial_j \theta^{(-1)} = [E_{jj}, \theta^{(-2)}] + [\theta^{(-1)}, E_{jj}] \theta^{(-1)},$$

откуда следует, что

$$\partial_j (\theta^{(-1)})_{ik} = (\theta^{(-1)})_{ij} (\theta^{(-1)})_{jk}, \quad j \neq i, \quad j \neq k.$$

Соответственно задаваемые уравнением (15) коэффициенты вращения β_{ij} удовлетворяют уравнению (1).

В работе [5] мы показали, что элементы одевающей матрицы $\Theta = (\theta_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ задаются уравнением

$$\theta_{ij}(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{\tau(\mathbf{u})} \times \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \beta_{ij}(\mathbf{u}_j - [\lambda^{-1}]) \tau(\mathbf{u}_j - [\lambda^{-1}]), & i \neq j, \\ \tau(\mathbf{u}_i - [\lambda^{-1}]), & i = j, \end{cases}$$

где аргументы мультипоток $\mathbf{u}_j$ сдвинуты: $(\mathbf{u}_j - [\lambda^{-1}]) = (u_j^{(1)} - 1/\lambda, u_j^{(2)} - 1/2\lambda^2, \dots)$.

Матричные коэффициенты волновой матрицы

$$\Psi(\mathbf{u}, \lambda) = \Theta(\mathbf{u}, \lambda) \Psi_0(\mathbf{u}, \lambda) \quad (16)$$

и матрицы $M(\mathbf{u}, \lambda) = \Psi(\mathbf{u}, \lambda) g(\lambda)$ удовлетворяют линейной системе уравнений (4), (5), которая представляет собой условия совместности уравнений (1). Это дает систему Дарбу–Егорова при условии, что наложено еще условие симметрии (2) на коэффициенты вращения. Для этого редуцируем интегрируемую иерархию, связанную с уравнениями потоков (8), (9), используя автоморфизм

$$\sigma(X(\lambda)) = (X(-\lambda))^T)^{-1}, \quad X \in G = \widehat{GL}(N), \quad (17)$$

оставляющий уравнения эволюции (8), (9) инвариантными только для нечетных потоков (занумерованных индексом n , являющимся нечетным целым числом). В соответствии с этим определим интегрируемую подиерархию посредством требования, чтобы одевающие матрицы $\Theta(\mathbf{u}, \lambda)$ и $M(\mathbf{u}, \lambda)$ были неподвижными точками автоморфизма группы петель σ (17):

$$\Theta^{-1}(\mathbf{u}, \lambda) = \Theta^T(\mathbf{u}, -\lambda), \quad M^{-1}(\mathbf{u}, \lambda) = M^T(\mathbf{u}, -\lambda), \quad (18)$$

где $\Theta(\mathbf{u}, \lambda)$ и $M(\mathbf{u}, \lambda)$ зависят только от нечетных координат $\mathbf{u}$ ($u_j^{(2k+1)}$, $k = 0, 1, \dots$). Нечетные потоки редуцированной подиерархии сохраняют условия (18). Неподвижные точки автоморфизма σ образуют подгруппу $G = \widehat{GL}(N)$, называемую твистованной группой петель $GL(N)$ (см., например, [6]). Для первого члена $\theta^{(-1)}$ разложения (13) из условия (18) следует, что $\theta^{(-1)} = \theta^{(-1)T}$. В соответствии с этим коэффициенты вращения β_{ij} , связанные с подиерархией посредством уравнения (15), являются симметричными и порождают метрики Дарбу–Егорова.

3. УСЛОВИЕ КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ И ОДНОРОДНОСТИ

В этом разделе в подходе к интегрируемым моделям на основе задачи Римана–Гильберта мы вводим вирасоровские связи, которые в таком контексте появляются как симметрии иерархии.

Действие потоков вирасоровских симметрий на одевающую матрицу имеет вид

$$\delta_k^V \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = (\Theta L_k \Theta^{-1})_- \Theta = (\Theta l_k \Theta^{-1})_- \Theta - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial \Theta}{\partial u_j^{(n+k)}}, \quad (19)$$

$$\delta_k^V M(\mathbf{u}, \lambda) = -(\Theta L_k \Theta^{-1})_+ M = -(\Theta l_k \Theta^{-1})_+ M - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial M}{\partial u_j^{(n+k)}}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} L_k &= -\lambda^{k+1} \frac{d}{d\lambda} + \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} E_{jj}^{(k+n)} = \\ &= -\lambda^{k+1} \frac{d}{d\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} n U^{(n)} \lambda^{k+n}, \quad k \geq -1, \end{aligned} \quad (21)$$

$$U^{(n)} = \text{diag}(u_1^{(n)}, \dots, u_N^{(n)}) = \sum_{i=1}^N u_i^{(n)} E_{ii}$$

и $l_k = -\lambda^{k+1} d/d\lambda$. Как l_k , так и L_k при $k \geq -1$ порождают подалгебру алгебры Витта (алгебры Вирасоро без центра):

$$[l_k, l_r] = (k-r)l_{k+r}, \quad [L_k, L_r] = (k-r)L_{k+r}. \quad (22)$$

Знаки в уравнениях (19) и (20) выбраны так, чтобы преобразование δ_k^V также удовлетворяло алгебре Вирасоро: $[\delta_k^V, \delta_r^V] = (k-r)\delta_{k+r}^V$ при действии на одевающие матрицы Θ и M . Преобразования δ_k^V коммутируют с потоками $\partial/\partial u_j^{(n)}$:

$$\left[\delta_k^V, \frac{\partial}{\partial u_j^{(n)}} \right] \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = 0.$$

Соответственно преобразования Вирасоро из уравнений (19) и (20) представляют собой дополнительные симметрии интегрируемой модели, определяемой задачей факторизации Римана–Гильберта. Можно показать, что только четные потоки Вирасоро сохраняют условия (18) и определяют дополнительные симметрии редуцированной подиерархии, связанной с твистованной группой петель в $GL(N)$. Поэтому можно самосогласованным образом наложить связи $\delta_k^V \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ при четных k . При $k = 0$ уравнение (19) принимает вид

$$\delta_0^V \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \Theta - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial \Theta}{\partial u_j^{(n)}}, \quad (23)$$

как видно из тождества $-(\Theta \lambda d\Theta^{-1}/d\lambda)_- \Theta = \lambda d\Theta/d\lambda$. Поэтому при $k = 0$ связь $\delta_k^V \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ принимает вид

$$\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} - E_0 \right) \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = 0, \quad (24)$$

где мы ввели векторное поле Эйлера

$$E_0 = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(n)}}.$$

Условие однородности (24) является также условием для конформного фробениусова многообразия.

Проектируя уравнение (23) на члены с градуировкой -1 , получаем

$$\delta_0^V \theta^{(-1)} = -\theta^{(-1)} - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial \theta^{(-1)}}{\partial u_j^{(n)}}, \quad (25)$$

где $\theta^{(-1)}$ – член разложения (13) с градуировкой -1 .

Таким образом, из условия (24) следует, что $E_0 \theta^{(-1)} = -\theta^{(-1)}$. Подставляя соотношения (14) и (15) в уравнение (25), получаем

$$\delta_0^V \partial_i \ln \tau = \partial_i \delta_0^V \ln \tau = -\partial_i \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial \ln \tau}{\partial u_j^{(n)}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (26)$$

$$\delta_0^V \beta_{kl} = -\beta_{kl} - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_j^{(n)}}. \quad (27)$$

4. ПОТОКИ ВИРАСОРО НА τ -ФУНКЦИИ

В этом разделе мы изучаем действие общего преобразования Вирасоро на τ -функцию соответствующей интегрируемой системы.

Напомним выражения для производных функции $\ln \tau$, задаваемой уравнениями (10) и (11). Применяя ∂_i к обеим частям уравнения (11), получаем тождество

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial u_j^{(n)} \partial u_i} = \text{Res}_\lambda (\text{tr}(\Theta E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1} E_{ii})), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad n > 0. \quad (28)$$

Комбинируя уравнения (19) и (10), (11), находим

$$\delta_k^V \frac{\partial \ln \tau}{\partial u_j^{(n)}} = \text{Res}_\lambda \left(\text{tr} \left(\Theta E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1} \frac{d}{d\lambda} (\Theta L_k \Theta^{-1})_- \right) \right).$$

Поскольку $\lambda d(\lambda^{-1})/d\lambda = -\lambda^{-1}$, последнее уравнение принимает вид

$$\delta_k^V \partial_i \ln \tau = -\text{Res}_\lambda (\text{tr}(E_{ii} \Theta l_k \Theta^{-1})) - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \text{Res}_\lambda (\text{tr}(\Theta E_{jj}^{(k+n)} \Theta^{-1} E_{ii})). \quad (29)$$

Используя тождество (28), перепишем последнее уравнение в виде

$$\delta_k^V \partial_i \ln \tau = -\text{Res}_\lambda (\text{tr}(E_{ii} \Theta l_k \Theta^{-1})) - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \partial_i \frac{\partial \ln \tau}{\partial u_j^{(k+n)}}.$$

Проводя вычисления в уравнении (29) для $k = 0, 1$, получаем

$$\partial_i \delta_k^V \ln \tau = -\partial_i \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial \ln \tau}{\partial u_j^{(n+k)}}, \quad k = 0, 1,$$

и

$$\partial_i \delta_{-1}^V \ln \tau = -\partial_i \sum_{j=1}^N \sum_{n=2}^{\infty} n u_j^{(n)} \frac{\partial \ln \tau}{\partial u_j^{(n-1)}}.$$

Только случай $k = 0$ применим к редуцированному случаю.

Из уравнений (19) и (20) находим

$$\begin{aligned} \delta_k^V (\Theta^{-1} M) &= -\Theta^{-1} (\Theta L_k \Theta^{-1})_- M - \Theta^{-1} (\Theta L_k \Theta^{-1})_- M = -L_k (\Theta^{-1} M) = \\ &= \lambda^{k+1} \frac{d}{d\lambda} (\Theta^{-1} M) - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} E_{jj}^{(n+k)} (\Theta^{-1} M). \end{aligned}$$

Из задачи факторизации (7) получаем

$$\delta_k^V (\Theta^{-1} M) = \Psi_0(\mathbf{u}, \lambda) \lambda^{k+1} \frac{dg}{d\lambda},$$

поскольку

$$\lambda^{k+1} \frac{d}{d\lambda} \Psi_0(\mathbf{u}, \lambda) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} E_{jj}^{(n+k)} \Psi_0(\mathbf{u}, \lambda).$$

Напомним определение (12) τ -функции $\tau_g(\mathbf{u}) = \langle 0 | \widehat{\Psi_0 g} | 0 \rangle$, переписанное здесь в виде, который явно показывает зависимость τ от элемента группы петель $g(\lambda)$.

Теперь оказывается, что

$$\delta_k^V \tau_g = \left\langle 0 \left| \lambda^{k+1} \widehat{\Psi_0 \frac{dg}{d\lambda}} \right| 0 \right\rangle = \tau_{\lambda^{k+1} dg/d\lambda}.$$

Таким образом, τ -функция преобразуется при инфинитезимальном S^1 -диффеоморфизме $g \rightarrow g + \lambda^{k+1} dg/d\lambda$ как

$$\tau_g \rightarrow \tau_{g + \lambda^{k+1} dg/d\lambda} = \tau_g + \delta_k^V \tau_g.$$

5. СИММЕТРИЯ ВИРАСОРО И ОДЕВАНИЕ

Пусть

$$\delta_j^{(n)} = \frac{\partial}{\partial u_j^{(n)}} - E_{jj}^{(n)}, \quad \delta_j = \delta_j^{(1)} = \partial_j - \lambda E_{jj}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (30)$$

является множеством коммутирующих операторов:

$$[\delta_j^{(n)}, \delta_i^{(k)}] = 0.$$

Эти операторы и операторы Вирасоро L_k из (21) коммутируют друг с другом:

$$[\delta_j^{(n)}, L_k] = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (31)$$

Операторы (30) и (21) аннулируют “голую” волновую функцию Ψ_0 , определяемую уравнением (6):

$$L_k \Psi_0 = 0, \quad \delta_j^{(n)} \Psi_0 = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Аналогично операторы

$$\mathcal{D}_j^{(n)} = \Theta \delta_j^{(n)} \Theta^{-1}, \quad \mathcal{L}_k = \Theta L_k \Theta^{-1} \quad (32)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (31) и (22) и аннулируют волновую (матричную) функцию $\Psi(\mathbf{u}, \lambda)$, определенную в (16):

$$\mathcal{L}_k \Psi = 0, \quad \mathcal{D}_j^{(n)} \Psi = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Поскольку

$$\Theta \partial_j \Theta^{-1} = \partial_j + \Theta(\partial_j \Theta^{-1}) = \partial_j + (\Theta \lambda E_{jj} \Theta^{-1})_-,$$

мы получаем

$$\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j^{(1)} = \Theta(\partial_j - \lambda E_{jj})\Theta^{-1} = \partial_j - (\Theta \lambda E_{jj} \Theta^{-1})_+ = \partial_j - \lambda E_{jj} - V_j,$$

где

$$V_j \equiv [\theta^{(-1)}, E_{jj}], \quad (V_j)_{kl} = (\delta_{lj} - \delta_{kj})\beta_{kl} \quad (33)$$

для матрицы $\theta^{(-1)}$, определенной уравнением (13).

Рассмотрим

$$\lambda \frac{d\Psi}{d\lambda} = \lambda \frac{d\Theta}{d\lambda} \Psi_0 + \Theta \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} E_{jj}^{(n)} \Psi_0. \quad (34)$$

Из уравнения (23) с учетом условия $\delta_{k=0}^V \Theta(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ (см. (24)) следует, что

$$\lambda \frac{d\Theta}{d\lambda} = - \left(\Theta \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1} \right)_- \Theta$$

и соответственно

$$\lambda \frac{d\Psi}{d\lambda} = \left(\Theta \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1} \right)_+ \Psi.$$

Изучим теперь оператор $\mathcal{L}_{k=-1} = \Theta L_{-1} \Theta^{-1}$ из (32) в случае, когда Θ удовлетворяет условию однородности (34):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-1} &= -\frac{d}{d\lambda} + \frac{d\Theta}{d\lambda} \Theta^{-1} + \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \Theta E_{jj}^{(n-1)} \Theta^{-1} = \\ &= -\frac{d}{d\lambda} - \lambda^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} (\Theta E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1})_- + \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} \Theta E_{jj}^{(n-1)} \Theta^{-1} = \\ &= -\frac{d}{d\lambda} + \lambda^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} (\Theta E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1})_+. \end{aligned}$$

Для $u_j^{(n)} = 0$, $n > 1$, получаем

$$\mathcal{L}_{-1} = -\frac{d}{d\lambda} + U + \lambda^{-1} [\theta^{(-1)}, U] = -\frac{d}{d\lambda} + U + \lambda^{-1} V.$$

Элементы матрицы $V = [\theta^{(-1)}, U]$ имеют вид

$$V_{ij} = (u_j - u_i) \theta_{ij}^{(-1)} = (u_j - u_i) \beta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (35)$$

Из этого построения следует, что волновая (матричная) функция $\Psi(\mathbf{u}, \lambda)$, определяемая уравнением (16), аннулируется операторами $\mathcal{L}_{-1}$ и $\mathcal{D}_j$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-1} \Psi(\mathbf{u}, \lambda) &= 0 \rightarrow \frac{d\Psi}{d\lambda} = (U + \lambda^{-1} V) \Psi, \\ \mathcal{D}_j \Psi(\mathbf{u}, \lambda) &= 0 \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial u_j} = (\lambda E_{jj} + V_j) \Psi. \end{aligned}$$

Совместность записанных выше уравнений сводится к соотношению $[\mathcal{D}_j, \mathcal{L}_{-1}] = 0$, которое получается посредством одевания соотношения $[\delta_j, L_{-1}] = 0$. Из коммутационных соотношений $[\mathcal{D}_j, \mathcal{L}_{-1}] = 0$ и $[\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j] = 0$ получаем

$$\partial_j V = [V_j, V], \quad (36)$$

$$\partial_j V_i = \partial_i V_j + [V_j, V_i], \quad (37)$$

$$[V, E_{jj}] = [V_j, U]. \quad (38)$$

6. ИЗОМОНОДРОМНАЯ ТАУ-ФУНКЦИЯ τ_I

Рассмотрим коэффициенты $-\partial_j \ln \tau$ один-формы $\mathcal{J}$ из уравнения (10) с наложенной конформной связью (34). Напомним, что это условие следует из условия однородности (24) и с учетом соотношений (26) и (27) выполняется в редуцированном случае, когда $E_0 \tau = \mu \tau$ и $E_0 \beta_{kl} = -\beta_{kl}$, где $E_0 = \sum_{j=1}^N u_j \partial / \partial u_j$ и μ не зависит от переменных u_j , $j = 1, \dots, N$.

Подставляя соотношение (34) в определяющие уравнения (10) и (11), при $n = 1$ получаем

$$\partial_j \ln \tau = -\text{Res}_\lambda \left(\text{tr} \left(E_{jj} \left(\Theta \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} n u_j^{(n)} E_{jj}^{(n)} \Theta^{-1} \right)_- \right) \right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (39)$$

В оставшейся части работы мы положим все $u_i^{(k)} = 0$ при $k > 1$, после чего остается модель, определенная только в терминах канонических координат u_j , $j = 1, \dots, N$. Начиная с настоящего момента будем полагать, что $\sigma(g(\lambda)) = g(\lambda)$ и выполнены соотношения (18).

Формула (39) значительно упрощается и принимает вид

$$\partial_j \ln \tau = -\operatorname{Res}_\lambda (\operatorname{tr}(E_{jj}(\Theta \lambda U \Theta^{-1})_-)) = -\operatorname{tr} \left(E_{jj} \left([\theta^{(-2)}, U] + \frac{1}{2} [\theta^{(-1)}, [\theta^{(-1)}, U]] \right) \right).$$

Используя инвариантность следа $\operatorname{tr}(A[B, C]) = \operatorname{tr}([A, B]C)$, получаем

$$\partial_j \ln \tau = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(V_j V),$$

где матрицы V_j , V определены уравнениями (33) и (35) и связаны посредством коммутационного соотношения (38).

Уравнение (36) можно преобразовать к гамильтонову виду (см. также [2])

$$\partial_j V = \{V, H_j\}$$

относительно стандартной скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ на $so(N)$ с гамильтонианом

$$H_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{V_{ij}^2}{u_i - u_j}.$$

В компонентах коммутационное соотношение (38) дает

$$(u_k - u_j)(V_i)_{kj} = (\delta_{ik} - \delta_{ij})V_{kj}, \quad k \neq j = 1, \dots, N;$$

это можно использовать для доказательства того факта, что

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(V_i V) = \sum_{j \neq i} \frac{V_{ij} V_{ji}}{u_i - u_j} = - \sum_{j \neq i} \frac{V_{ij}^2}{u_i - u_j} = -2H_i.$$

Из уравнений (36) и (37) следует, что $d \operatorname{tr} \sum_{i=1}^N (V_i V) du_i = 0$ и один-форма $\sum_{i=1}^N H_i du_i$ замкнута. Локально эту один-форму можно представить в виде производной от логарифма так называемой изомонодромной тау-функции τ_I :

$$d \ln \tau_I = \sum_{i=1}^N H_i du_i = -\frac{1}{2} d \ln \tau.$$

Отсюда следует, что с точностью до мультипликативной константы $\tau_I = 1/\sqrt{\tau}$. Эта формула была также получена другим способом в работе [7].

7. ФРОБЕНИУСОВА СТРУКТУРА

Разложим одевающую матрицу $M(u, \lambda)$ в соответствии с градуировкой как

$$M(u, \lambda) = M_0(u) + M_1(u)\lambda + M_2(u)\lambda^2 + \dots$$

Согласно (18) член с нулевой градуировкой $M_0(u) = M(u, 0) = (m_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq N}$ представляет собой ортогональную матрицу $M_0^T(u) = M_0^{-1}(u)$, которая, как видно из уравнений (9) и (20), также удовлетворяет уравнениям потока

$$\partial_j M_0(u) = [\theta^{(-1)}(u), E_{jj}] M_0(u) = V_j(u) M_0(u), \quad \delta_0^V M_0(u) = -V(u) M_0(u), \quad (40)$$

а потому и уравнениям

$$\sum_{j=1}^N u_j \partial_j M_0(u) = V(u) M_0(u).$$

Определим $\mathcal{V} = M_0^{-1} V M_0$. Легко видеть, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет соотношениям

$$\partial_j \mathcal{V} = 0, \quad \mathcal{V}^T = -\mathcal{V}, \quad \delta_0^V \mathcal{V} = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

и, следовательно, является константой. Можно привести $\mathcal{V}$ к нормальному йорданову виду $\mu = \hat{\mu} + R_0$, где $\hat{\mu}$ — ее полупростая, а R_0 — нильпотентная часть, т.е. существует комплексная обратимая матрица S такая, что

$$\mathcal{V} = S \mu S^{-1}.$$

Теперь определим

$$M(u) = M_0(u) S = (m_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq N}.$$

Используя (40), получим

$$\partial_j M(u) = [\theta^{(-1)}(u), E_{jj}] M(u) = V_j(u) M(u), \quad \delta_0^V M(u) = -M(u) \mu$$

и далее

$$\sum_{j=1}^N u_j \partial_j M(u) = M(u) \mu.$$

Теперь предположим, что $\mathcal{V}$ диагонализуема, т.е. матрица $V(u)$ не имеет нильпотентной части, тогда

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i E_{ii}, \quad \mu_i = -\mu_{N+1-i},$$

и столбцы матрицы $M(u)$ являются собственными векторами для векторного поля Эйлера E_0 . Таким образом, на области $u_i \neq u_j$ и $m_{11} m_{21} \dots m_{N1} \neq 0$ мы имеем локальное полупростое многообразие Фробениуса (см., например, [3]) с коэффициентами Ламе

$$h_i = m_{i1}.$$

Определим

$$\eta = (\eta_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N} = M^T M = S^T S$$

и обозначим $\eta^{-1} = (\eta^{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$, тогда $\mu\eta + \eta\mu = 0$ и производные по плоским координатам x^α , $\alpha = 1, \dots, N$, даются выражениями

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{m_{i\alpha}}{m_{i1}} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{\alpha, \beta=1}^N \eta^{\alpha\beta} m_{i1} m_{i\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Метрика равна

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N h_i^2 (du_i)^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^N \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \eta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_{i\alpha} m_{i\beta},$$

а структурные коэффициенты имеют вид

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=1}^N \frac{m_{i\alpha} m_{i\beta} m_{i\gamma}}{m_{i1}}.$$

Поскольку мы построили все таким образом, чтобы столбцы матрицы $M(u)$ были собственными векторами, наше многообразие Фробениуса имеет скейлинговую размерность $\mu_\alpha - \mu_1$.

Теперь умножим волновую (матричную) функцию $\Psi(u, \lambda)$, определенную в (16), слева на

$$M^{-1}(u) = S^{-1} M_0^{-1}(u) = \eta^{-1} S^T M_0^T(u) = \eta^{-1} M^T(u)$$

и справа на S . Это дает волновую функцию

$$\mathcal{Y}(u, \lambda) = M^{-1}(u) \Psi(u, \lambda) S = S^{-1} M_0^{-1}(u) M(u, \lambda) g^{-1}(\lambda) S, \quad (41)$$

которая удовлетворяет уравнениям, появлявшимся также в работе [8]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(u, -\lambda)^T \eta \mathcal{Y}(u, \lambda) &= \eta, \\ \frac{\partial \mathcal{Y}(u, \lambda)}{\partial u_i} &= \lambda \mathcal{E}_i(u) \mathcal{Y}(u, \lambda), \\ \frac{\partial \mathcal{Y}(u, \lambda)}{\partial x^\alpha} &= \lambda C_\alpha(u) \mathcal{Y}(u, \lambda), \\ \frac{\partial \mathcal{Y}(u, \lambda)}{\partial \lambda} &= (\mathcal{U}(u) + \lambda^{-1} \mu) \mathcal{Y}(u, \lambda), \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(u) &= M^{-1}(u) E_{ii} M(u), \\ \mathcal{U}(u) &= M^{-1}(u) U M(u), \\ \mu &= M^{-1}(u) V(u) M(u) = S^{-1} \mathcal{V} S \\ C_\alpha(u) &= \sum_{\beta, \gamma=1}^N c_{\alpha\beta}^\gamma E_{\beta\gamma} = \sum_{\beta, \gamma, \delta=1}^N c_{\alpha\beta\delta} \eta^{\delta\gamma} E_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Для матрицы $V(u)$ общего вида, возможно содержащей нильпотентную часть, выполнено соотношение $\mu^T \eta + \eta \mu = 0$. Снова определим $\mathcal{Y}(u, \lambda)$ с помощью уравнения (41), тогда также получим

$$\mathcal{M}(u, \lambda) = M^{-1}(u)M(u, \lambda)S = I + O(\lambda),$$

так что $\mathcal{Y}(u, \lambda) = \mathcal{M}(u, \lambda)S^{-1}g^{-1}(\lambda)S$ и

$$\mathcal{M}(u, -\lambda)^T \eta \mathcal{M}(u, \lambda) = \eta.$$

Из уравнения (42) находим

$$g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \lambda} = S \mathcal{M}^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \lambda} - \mathcal{U} \mathcal{M} - \frac{\mu}{\lambda} \mathcal{M} \right) S^{-1}.$$

Полагая $g = g_- g_+$, получаем

$$g_-^{-1} \frac{\partial g_-}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_+}{\partial \lambda} g_+^{-1} = g_+ S \mathcal{M}^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \lambda} - \mathcal{U} \mathcal{M} - \frac{\mu}{\lambda} \mathcal{M} \right) S^{-1} g_+^{-1}.$$

Определим $G = g_+ S \mathcal{M}^{-1} S^{-1}$; тогда

$$g_-^{-1} \frac{\partial g_-}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda} G_0 S \mu S^{-1} G_0^{-1} = -\frac{1}{\lambda} G_0 \mathcal{V} G_0^{-1},$$

где матрица $G_0 = (g_+ S \mathcal{M}^{-1} S^{-1})_0 = (g_+)_0$ является ортогональной, если g – неподвижная точка автоморфизма σ .

Благодарности. Работа Х. Аратина выполнена при частичной поддержке NSF (PHY-9820663).

Список литературы

- [1] *B. Dubrovin.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627–689.
- [2] *B. Dubrovin.* Integrable systems and classification of 2-dimensional topological field theories. In: Integrable Systems. The Verdier Memorial Conference (Luminy, France, July 1–5, 1991). Prog. Math. V. 115. Eds. O. Babelon, O. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach. Boston, MA: Birkhäuser, 1993. P. 313–359.
- [3] *B. Dubrovin.* Painleve transcendents and two-dimensional topological field theory. In: The Painleve Property: One Century Later. CRM Ser. Math. Phys. Ed. R. Conte. New York: Springer, 1999. P. 287–412; math.ag/9803107.
- [4] *G. Wilson.* The τ -Function of the g AKNS equations. In: Integrable Systems. The Verdier Memorial Conference (Luminy, France, July 1–5, 1991). Prog. Math. V. 115. Eds. O. Babelon, O. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach. Boston, MA: Birkhäuser, 1993. P. 131–145.
- [5] *H. Aratyn, J. van de Leur.* Solutions of the WDVV equations and integrable hierarchies of KP type. hep-th/0104092.
- [6] *J. van de Leur.* Int. Math. Res. Notices. 2001. V. 11. P. 551–573; nlin.si/0004021.
- [7] *J. W. van de Leur, R. Martini.* Commun. Math. Phys. 1999. V. 205. P. 587–616; solv-int/9808008.
- [8] *B. Dubrovin, Y. Zhang.* Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants. math.dg/0108160.