Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бертола, Б. Эйнард, Дж. Харнад, Дуальность спектральных кривых, возникающая в двуматричных моделях, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 1, 32–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:09:15

© 2003 г. М. Бертола^{*,†}, Б. Эйнард^{*,‡}, Дж. Харнад^{*,†}

ДУАЛЬНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ КРИВЫХ, ВОЗНИКАЮЩАЯ В ДВУМАТРИЧНЫХ МОДЕЛЯХ

Рассматривается двуматричная модель, мера в которой задается экспонентой суммы многочленов от двух различных переменных. Показано, как можно вывести последовательность пар “дуальных” конечномерных систем ОДУ для соответствующих би-ортогональных многочленов. Доказана обратная теорема, утверждающая, что можно восстановить указанные меры из пар полубесконечных конечнозонных матриц, которые задают соотношения рекурсии и удовлетворяют струнному уравнению. В пределе $N \rightarrow \infty$ доказано, что полученные дуальные системы имеют одну и ту же спектральную кривую.

Ключевые слова: модель случайных матриц, асимптотический анализ, дуальность ОДУ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается двуматричная модель [1]–[5], в которой описываются ансамбли, состоящие из пар эрмитовых матриц M_1 и M_2 размера $N \times N$ с $U(N)$ -инвариантной вероятностной мерой вида

$$\frac{1}{\tau_N} d\mu(M_1, M_2) := \frac{1}{\tau_N} e^{K \operatorname{tr}(-V_1(M_1) - V_2(M_2) + M_1 M_2)} dM_1 dM_2. \quad (1)$$

Здесь $dM_1 dM_2$ – стандартная мера Лебега для пар эрмитовых матриц, а функции V_1 и V_2 суть многочлены степеней $d_1 + 1$ и $d_2 + 1$, соответственно. Величины V_1 и V_2 в дальнейшем называются потенциалами. Считается, что общий положительный масштабный множитель K в экспоненте пропорционален N в пределе больших N . Также предполагается, что оба потенциала вещественны и ограничены снизу (для обеспечения сходимости).

Известно, что нормировочный множитель (статистическая сумма)

$$\tau_N = \int_{M_1} \int_{M_2} d\mu$$

^{*}Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Canada.

E-mail: bertola@crm.umontreal.ca; harnad@crm.umontreal.ca

[†]Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montréal, Canada

[‡]Service de Physique Théorique, CEA, Saclay, France. E-mail: eynard@sphat.saclay.cea.fr

представляет собой тау-функцию иерархии КП относительно каждого из наборов параметров деформации (коэффициенты двух многочленов V_1, V_2) и одновременно задает решения уравнений двумеризованной цепочки Тоды [6], [7]. Ключевым объектом теории являются корреляционные функции для собственных значений этих двух матриц. Как и в одноматричном случае, эти корреляционные функции можно найти в терминах некоторых ядер интегральных операторов Фредгольма. Напомним, что в одноматричной модели с мерой

$$\frac{1}{\tau_N} d\mu(M) := \frac{1}{\tau_N} e^{\text{tr}(-V(M))} dM$$

вычисление таких ядер сводится к построению системы ортогональных многочленов $P_n(x)$ для пространства $L^2(\mathbb{R}, e^{-V(x)} dx)$. В терминах этих многочленов ядро имеет вид

$$K(x, x') = \sum_{n=0}^{N-1} P_n(x) e^{-V(x)/2} P_n(x') e^{-V(x')/2}.$$

Заметим, что в двуматричных моделях необходимо вычислить четыре соответствующих ядра, чтобы получить статистические корреляции собственных значений. Для m -матричных моделей надо вычислить m^2 таких ядерных операторов.

В двуматричной модели эти ядра выражаются в терминах подходящим образом определенных последовательностей *биортогональных* многочленов. Под такими последовательностями подразумеваются две последовательности многочленов от одной переменной

$$\pi_n(x) = x^n + \dots, \quad \sigma_n(y) = y^n + \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

которые ортогональны относительно связанной меры на пространстве произведений:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dx dy \pi_n(x) \sigma_m(y) e^{-KV_1(x) - KV_2(y) + Kxy} = h_n \delta_{mn},$$

где $V_1(x)$ и $V_2(y)$ — многочлены, входящие в меру интегрирования для двуматричной модели (1). Соотношения ортогональности однозначно определяют оба семейства многочленов, если только такие семейства существуют [2]. Четыре соответствующих ядра выражаются следующим образом через эти биортогональные многочлены:

$$\begin{aligned} K_{12}^N(x, y) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} \pi_n(x) \sigma_n(y) e^{-KV_1(x)} e^{-KV_2(y)}, \\ K_{11}^N(x, x') &= \int_{\mathbb{R}} dy K_{12}^N(x, y) e^{Kx'y}, \\ K_{22}^N(y', y) &= \int_{\mathbb{R}} dx K_{12}^N(x, y) e^{Kxy'}, \\ K_{21}^N(y', x') &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dx dy K_{12}^N(x, y) e^{Kxy'} e^{Kx'y}. \end{aligned}$$

Все статистические свойства спектров такого двуматричного ансамбля могут быть при этом выражены в терминах этих ядер [5] и соответствующих интегральных операторов

Фредгольма K_{ij}^N , $i, j = 1, 2$. Например, плотность собственных значений первой матрицы имеет вид

$$\rho_1^N(x) = \frac{1}{N} K_{11}^N(x, x),$$

в то время как корреляционная функция двух собственных значений первой матрицы равна

$$\rho_{11}^N(x, x') = \frac{1}{N^2} \left(K_{11}^N(x, x) K_{11}^N(x', x') - K_{11}^N(x, x') K_{11}^N(x', x) \right),$$

а корреляционная функция двух собственных значений, одно из которых относится к первой, а другое – ко второй матрице, равна

$$\rho_{12}^N(x, y) = \frac{1}{N^2} \left(K_{11}^N(x, x) K_{22}^N(y, y) - K_{12}^N(x, y) (K_{21}^N(y, x) - e^{Kxy}) \right).$$

Любые другие корреляционные функции для m собственных значений могут быть записаны схожим образом с помощью детерминантов конечномерных матриц, матричные элементы которых суть эти четыре ядра.

Основная задача данной работы состоит в том, чтобы вывести и проанализировать некоторые системы ОДУ, которым удовлетворяют квазимногочлены $\psi_n(x) := \pi_n(x) \times e^{-V_1(x)}$, $\phi_n(y) := \sigma_n(y) e^{-V_2(y)}$ и их образы Фурье–Лапласа. В разделе 2 собраны основные результаты для случая конечномерных $(N \times N)$ -матриц (детали и доказательства см. в работах [8], [9]). В разделе 3 соответствующие результаты выводятся в пределе $N \rightarrow \infty$ достаточно простым образом.

Подробнее доказательство предложения 1 и неабелева версия рассуждения о поперечности (см. раздел 3) описаны в нашей совместной работе с Хуртубисом [9].

2. СКЛАДЫВАНИЕ И ДУАЛЬНОСТЬ В СИСТЕМАХ ОДУ

Рассматривая нормированные квазимногочлены

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} \pi_n(x) e^{-KV_1(x)}, \quad \phi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} \sigma_n(y) e^{-KV_2(y)}, \quad n = 0, \dots, \infty,$$

как компоненты пары полубесконечных вектор-столбцов

$$\Psi_\infty = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots)^t, \quad \Phi_\infty = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \dots)^t,$$

получим пары полубесконечных матриц Q и P , которые описывают соответственно умножение Ψ_∞ на x и взятие производной $-(1/K) d/dx$. Аналогично можно построить транспонированные матрицы Q^t и P^t , применяя операторы дифференцирования $-(1/K) d/dy$ или умножения на $-y$ к вектору Φ_∞ . По построению эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям Гейзенберга (или “струнному уравнению”)

$$[P, Q] = \frac{1}{K} \mathbf{1}.$$

Помимо этих квазимногочленов потребуются также их образы Фурье–Лапласа и соответствующие полубесконечные вектор-строки

$$\underline{\Psi}_{\infty}(y) := (\underline{\psi}_0, \dots, \underline{\psi}_n, \dots), \quad \underline{\Phi}_{\infty}(x) := (\underline{\phi}_0, \dots, \underline{\phi}_n, \dots)$$

с компонентами

$$\underline{\psi}_n(y) := \int_{\mathbb{R}} dx e^{Kxy} \psi_n(x), \quad \underline{\phi}_n(x) := \int_{\mathbb{R}} dy e^{Kxy} \phi_n(y).$$

С помощью интегрирования по частям можно найти рекуррентные соотношения для этих величин по отношению к умножению и взятию производной:

$$\begin{aligned} x \underline{\Phi}_{\infty}(x) &= \underline{\Phi}_{\infty}(x) Q, & \frac{1}{K} \frac{d}{dx} \underline{\Phi}_{\infty}(x) &= \underline{\Phi}_{\infty}(x) P, \\ y \underline{\Psi}_{\infty}(y) &= \underline{\Psi}_{\infty}(y) Q^t, & \frac{1}{K} \frac{d}{dy} \underline{\Psi}_{\infty}(y) &= \underline{\Psi}_{\infty}(y) P^t. \end{aligned}$$

Также из интегрирования по частям следует [8], что матрицы P и Q обладают конечно-зонной структурой:

$$\begin{aligned} Q &:= \begin{bmatrix} \alpha_0(0) & \gamma(0) & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1(1) & \alpha_0(1) & \gamma(1) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \alpha_{d_2}(d_2) & \dots & \alpha_0(d_2) & \gamma(d_2) & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \\ P &:= \begin{bmatrix} \beta_0(0) & \beta_1(1) & \dots & \dots & \beta_{d_1}(d_1) & \dots & \dots \\ \gamma(0) & \beta_0(1) & \beta_1(2) & \ddots & \ddots & \beta_{d_1}(d_1+1) & \dots \\ 0 & \gamma(1) & \beta_0(2) & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \gamma(2) & \beta_0(3) & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma(n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта структура по существу следует из того, что матрицы $(P - V'_1(Q))$, $(Q - V'_2(P))$ соответственно строго ниже- и верхнетреугольны. В самом деле, в базисе квазимногочленов очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (P - V'_1(Q))_{nm} \psi_m(x) &= \left(-\frac{1}{K} \frac{d}{dx} - V'_1(x) \right) \psi_n(x) = \\ &= c \psi_{n-1}(x) + \text{квазимногочлены степени меньше } n \end{aligned}$$

и что матрицы Q и P^t , задающие соответственно умножения на x и y , не могут иметь более одной ненулевой диагонали надглавной диагональю. Обратное утверждение также выполняется, что будет детально обсуждаться ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что матрицы P и Q обладают вышеприведенной зонной структурой и что высшая диагональ матрицы Q и низшая диагональ матрицы P содержат ненулевые элементы. Тогда два следующих условия эквивалентны:*

- 1) *коммутатор $[P, Q]$ представляет собой диагональную матрицу;*
- 2) *существуют два многочлена соответствующих степеней d_1 и d_2 , которые обозначаются $V'_1(x)$ и $V'_2(y)$, такие, что*

$$(P - V'_1(Q))_{\geq 0} = 0, \quad (Q - V'_2(P))_{\leq 0} = 0, \quad (3)$$

где нижние индексы ≤ 0 или ≥ 0 обозначают соответственно нижнюю или верхнюю части матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Детальное доказательство этого утверждения содержится в работе [9]. Здесь же только отметим, что если заданы зонные структуры двух полубесконечных матриц P и Q , то многочлен $V'_1(x)$ однозначно определяется соотношением

$$(P - V'_1(Q))e_0 = 0, \quad e_0 := (1, 0, 0, 0, \dots)^t,$$

и само его существование обеспечивается условием $\gamma(n) \neq 0$. Сходным образом многочлен $V'_2(y)$ также оказывается однозначно определенным. Тогда можно показать, что все соотношения, содержащиеся в (3), выполнены для этих многочленов. Обратно, если существуют два многочлена V'_1 и V'_2 , удовлетворяющие уравнениям (3), то

$$[P, Q - V_2(P)] = [P, Q] = [P - V_1(Q), Q].$$

Но при этом левая часть этого соотношения нестрого верхнетреугольна, а правая часть — нестрого нижнетреугольна, так что матрица $[P, Q]$ должна быть диагональна.

Из структуры (2) матриц P и Q следует, что четыре последовательности ψ_n , $\underline{\psi}_n$, ϕ_n и $\underline{\phi}_n$ удовлетворяют соотношениям рекурсии как по операции умножения, так и по операции взятия производной:

$$\begin{aligned} x\psi_n &= \gamma(n)\psi_{n+1} + \sum_{j=0}^{d_2} \alpha_j(n)\psi_{n-j}, \\ -\frac{1}{K} \frac{d}{dx} \psi_n &= \gamma(n-1)\psi_{n-1} + \sum_{j=0}^{d_1} \beta_j(n+j)\psi_{n+j}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y\phi_n &= \gamma(n)\phi_{n+1} + \sum_{j=0}^{d_1} \beta_j(n)\phi_{n-j}, \\ -\frac{1}{K} \frac{d}{dx} \phi_n &= \gamma(n-1)\phi_{n-1} + \sum_{j=0}^{d_2} \alpha_j(n+j)\phi_{n+j}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из конечных рекуррентных соотношений, выполненных для квазимногочленов $\psi_n(x)$ и $\phi_n(y)$, следует набор *обобщенных соотношений Кристоффеля–Дарбу* [4], [10], из которых следует, что ядра $\overset{N}{K}_{11}(x, x')$ и $\overset{N}{K}_{22}(y', y)$ могут быть представлены в виде

$$\overset{N}{K}_{11}(x, x') = \frac{\left(\overset{N-1}{\underline{\Phi}}(x'), \overset{N}{\mathbb{A}} \overset{N}{\Psi}(x) \right)}{x' - x}, \quad (6)$$

$$\overset{N}{\mathbb{A}} := \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma(N-1) \\ \hline \alpha_{d_2}(N) & \dots & \dots & \alpha_2(N) & \alpha_1(N) & 0 \\ 0 & \alpha_{d_2}(N+1) & \dots & \dots & \alpha_1(N+1) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{d_2}(N+2) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{d_2}(N+d_2-1) & 0 \end{array} \right],$$

$$\overset{N}{K}_{22}(y', y) = \frac{\left(\overset{N-1}{\underline{\Psi}}(y'), \overset{N}{\mathbb{B}} \overset{N}{\Phi}(y) \right)}{y' - y}, \quad (7)$$

$$\overset{N}{\mathbb{B}} := \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma(N-1) \\ \hline \beta_{d_1}(N) & \dots & \dots & \beta_2(N) & \beta_1(N) & 0 \\ 0 & \beta_{d_1}(N+1) & \dots & \dots & \beta_1(N+1) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{d_1}(N+2) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{d_1}(N+d_1-1) & 0 \end{array} \right],$$

где $\overset{N}{\Psi}(x)$, $\overset{N}{\Phi}(y)$, $\overset{N-1}{\underline{\Psi}}(y)$ и $\overset{N-1}{\underline{\Phi}}(x)$ суть вектор-столбцы или вектор-строки размерностей $d_1 + 1$ и $d_2 + 1$, заданные соотношениями

$$\overset{N}{\Psi}(x) = [\psi_{N-d_2}, \dots, \psi_N]^t, \quad \overset{N}{\Phi}(y) = [\phi_{N-d_1}, \dots, \phi_N]^t, \quad (8)$$

$$\overset{N-1}{\underline{\Psi}}(y) = [\underline{\psi}_{N-1}, \dots, \underline{\psi}_{N+d_1-1}], \quad \overset{N-1}{\underline{\Phi}}(x) = [\underline{\phi}_{N-1}, \dots, \underline{\phi}_{N+d_2-1}]. \quad (9)$$

Матрицы $\overset{N}{\mathbb{A}}$ (6), $\overset{N}{\mathbb{B}}$ (7) задают два спаривания (которые мы будем называть спариваниями Кристоффеля–Дарбу) между векторами $\overset{N-1}{\underline{\Psi}}$ и $\overset{N-1}{\underline{\Phi}}$ и между векторами $\overset{N}{\Phi}$ и $\overset{N-1}{\underline{\Psi}}$. Мы называем эти пары *дуальными окнами*.

Ключевое наблюдение состоит в том, что всякий квазимногочлен $\psi_j(x)$ может быть однозначным образом представлен для любого заданного $N \geq d_2$ через линейные комбинации любых $d_2 + 1$ последовательных базисных элементов $\psi_{N-d_2}, \dots, \psi_N$ с *полиномиальными коэффициентами*. Эта процедура называется *складыванием* (folding)

пространства в *окно* (window), представляющее собой линейную оболочку множества векторов $\Psi_N = [\psi_{N-d_2}, \dots, \psi_N]^t$. Это складывание достигается с помощью соотношений x -рекурсии для квазимногочленов из соотношения (4), которые позволяют выразить $(N + 1)$ -й квазимногочлен через $d_2 + 1$ предшествующих, но с коэффициентами, которые представляют собой многочлены относительно переменной x . Итерируя эту процедуру, можно получить складывание.

Все вышесказанное можно выразить в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_N(x) \Psi_N(x) &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{-\alpha_{d_2}(N)}{\gamma(N)} & \dots & \dots & \dots & \frac{-\alpha_1(N)}{\gamma(N)} & \frac{x-\alpha_0(N)}{\gamma(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{N-d_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \psi_{N-d_2+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{N+1} \end{bmatrix} = \Psi_{N+1}(x), \quad N \geq d_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Матрица $\mathbf{a}_N$ обратима, поскольку ее определитель равен $\alpha_{d_2}(n)/\gamma(n)$, а величина $\alpha_{d_2}(n)$ не обращается в нуль вследствие соотношения $(Q - V_2'(P))_{\leq 0} = 0$. Эту матрицу в дальнейшем будем называть *лестничной матрицей*. Полностью аналогичное соотношение верно и для квазимногочленов $\phi_n(y)$ (см. ниже (13)) и для соответствующих образов Фурье–Лапласа.

С помощью такого складывания можно также выразить действие любого оператора, имеющего конечный размер в терминах зон, как $(d_2 + 1) \times (d_2 + 1)$ -матричного многочлена от переменной x . Наиболее важный случай – это складывание оператора $P = -(1/K) d/dx$. Получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K} \frac{d}{dx} \Psi_N &= P \Psi_N = D_1^N(x) \Psi_N := \\ &:= \left(\gamma_N \left(\mathbf{a}_{N-1}(x) \right)^{-1} + \beta_0^N + \sum_{j=1}^{d_1} \beta_j^N \mathbf{a}_{N+j-1}(x) \mathbf{a}_{N+j-2}(x) \dots \mathbf{a}_N(x) \right) \Psi_N, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_j^N &:= \text{diag}[\beta_j(N + j - d_2), \beta_j(N + j - d_2 + 1), \dots, \beta_j(N + j)], \quad j = 0, \dots, d_1, \\ \gamma^N &:= \text{diag}[\gamma(N - 1 - d_2), \gamma(N - d_2), \dots, \gamma(N + d_2 - 1)]. \end{aligned}$$

Соответствующее утверждение для многочленов ϕ_n получается при перестановке местами x и y , ψ_n и ϕ_n , d_1 и d_2 , α_j и β_j и т.д. При этом получается аналогичным

образом определенная матрица $D_2(y)$, задающая действие производной на квазимного-членах ϕ_n . Используя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_j^N &:= \text{diag}[\alpha_j(N+j-d_1), \alpha_j(N+j-d_1+1), \dots, \alpha_j(N+j)], \quad j=0, \dots, d_2, \\ \gamma^N &:= \text{diag}[\gamma(N-d_1-1), \dots, \gamma(N-1)], \\ \mathbf{b}_N(y) &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{-\beta_{d_1}(N)}{\gamma(N)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{-\beta_1(N)}{\gamma(N)} & \frac{y-\beta_0(N)}{\gamma(N)} \end{bmatrix}, \quad N \geq d_1, \end{aligned}$$

получим

$$\mathbf{b}_N(y)\Phi_N(y) = \Phi_{N+1}(y), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K} \frac{d}{dy} \Phi_N &= Q^t \Phi_N = D_2(y) \Phi_N := \left(\gamma^N \left(\mathbf{b}_{N-1}(y) \right)^{-1} + \alpha_0^N + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{d_2} \alpha_j^N \mathbf{b}_{N+j-1}(y) \mathbf{b}_{N+j-2}(y) \dots \mathbf{b}_N(y) \right) \Phi_N. \end{aligned} \quad (13)$$

Можно повторить сходную процедуру и для соответствующих образов Фурье–Лапласа. При этом необходимые определения и соотношения даются следующими формулами:

$$\underline{\mathbf{a}}^N(x) := \begin{bmatrix} \frac{x-\alpha_0(N)}{\gamma(N-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\alpha_1(N+1)}{\gamma(N-1)} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ \frac{-\alpha_{d_2}(N+d_2)}{\gamma(N-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in gl_{d_2+1}[x], \quad (14)$$

$$\underline{\mathbf{b}}^N(y) := \begin{bmatrix} \frac{y-\beta_0(N)}{\gamma(N-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\beta_1(N+1)}{\gamma(N-1)} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ \frac{-\beta_{d_1}(N+d_1)}{\gamma(N-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in gl_{d_1+1}[y],$$

$$\underline{\Psi}^{N-1} = \underline{\Psi}^N \underline{\mathbf{a}}^N(x), \quad \underline{\Phi}^{N-1} = \underline{\Phi}^N \underline{\mathbf{b}}^N(y), \quad (15)$$

$$\frac{1}{K} \frac{d}{dy} \underline{\Psi}^{N-1}(y) = \underline{\Psi}^{N-1}(y) \underline{D}_2(y), \quad N \geq d_1 + 1, \quad (16)$$

$$\frac{1}{K} \frac{d}{dx} \underline{\Phi}^{N-1}(x) = \underline{\Phi}^{N-1}(x) \underline{D}_1(x), \quad N \geq d_2 + 1, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}\underline{D}_2(y) &:= \left(\underline{\mathbf{b}}\right)^{-1} \underline{\gamma}^{N-1} + \underline{\alpha}_0^{N-1} + \sum_{j=1}^{d_2} \underline{\mathbf{b}}^{N-1} \underline{\mathbf{b}}^{N-2} \dots \underline{\mathbf{b}}^{N-j} \underline{\alpha}_j^{N-1}, \\ \underline{D}_1(x) &:= \left(\underline{\mathbf{a}}\right)^{-1} \underline{\gamma}^{N-1} + \underline{\beta}_0^{N-1} + \sum_{j=1}^{d_1} \underline{\mathbf{a}}^{N-1} \underline{\mathbf{a}}^{N-2} \dots \underline{\mathbf{a}}^{N-j} \underline{\beta}_j^{N-1}, \\ \underline{\alpha}_j^{N-1} &:= \text{diag}(\alpha_j(N-1), \dots, \alpha_j(N+d_1-1)), \\ \underline{\beta}_j^{N-1} &:= \text{diag}(\beta_j(N-1), \dots, \beta_j(N+d_2-1)).\end{aligned}$$

Подводя итог, мы получим четыре последовательности систем линейных дифференциальных уравнений, указанных в таблице: (11) и (17) размерности $(d_2 + 1) \times (d_2 + 1)$ и (13) и (16) размерности $(d_1 + 1) \times (d_1 + 1)$ в совокупности с лестничными соотношениями (10), (12), (14), (15). Мы не рассматривали деформационные уравнения, т.е. дифференциальные уравнения, получаемые при инфинитезимальных вариациях коэффициентов потенциалов V_1 и V_2 , входящих в меру интегрирования. Полное исследование этих деформаций содержится в работе [8]. В частности, в этой работе показано, что получаемая при этом переопределенная система уравнений с частными производными оказывается совместной. Заметим, что смешанная система ОДУ и разностных уравнений также оказывается совместной, на что указывает следующее предложение.

Размер $(d_2 + 1) \times (d_2 + 1)$	Размер $(d_1 + 1) \times (d_1 + 1)$
$-\frac{1}{K} \frac{d}{dx} \underline{\Psi}_N(x) = \underline{D}_1(x) \underline{\Psi}_N(x)$	$\frac{1}{K} \frac{d}{dy} \underline{\Psi}^{N-1}(y) = \underline{\Psi}^{N-1}(y) \underline{D}_2(y)$
$\frac{1}{K} \frac{d}{dx} \underline{\Phi}^{N-1}(x) = \underline{\Phi}^{N-1}(x) \underline{D}_1(x)$	$-\frac{1}{K} \frac{d}{dy} \underline{\Phi}_N(y) = \underline{D}_2(y) \underline{\Phi}_N(y)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Лестничные матрицы $\underline{\mathbf{a}}_N$ перемешивают дифференциальные системы D_1 с различными N , т.е.*

$$\underline{\mathbf{a}}_N(x) \left(\frac{d}{dx} + \underline{D}_1(x) \right) = \left(\frac{d}{dx} + \underline{D}_1^{N+1}(x) \right) \underline{\mathbf{a}}_N(x).$$

Аналогичные утверждения верны для трех других последовательностей ОДУ и соответствующих лестничных соотношений.

Следующее предложение объясняет, как четыре последовательности систем (11), (17), (13) и (16) связаны между собой с помощью спариваний Кристоффеля–Дарбу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Выполняются следующие соотношения:*

$$\underline{D}_1(x) \underline{\mathbb{A}} = \underline{\mathbb{A}} \underline{D}_1(x), \quad \underline{D}_2(y) \underline{\mathbb{B}} = \underline{\mathbb{B}} \underline{D}_2(y).$$

Спектры двух матриц $D_1(x)$ и $\underline{D}_1(x)$ (т.е. их характеристические многочлены) совпадают, равно как и спектры матриц $D_2(y)$ и $\underline{D}_2(y)$. Более того, имеет место и менее очевидная спектральная дуальность. В самом деле, в работе [8] было доказано, что

$$\det \left(y\mathbf{1} - \overset{N}{D}_1(x) \right) = c \det \left(x\mathbf{1} - \overset{N}{D}_2(y) \right),$$

где c – отношение старших коэффициентов потенциалов V_1 и V_2 . Заметим, что эти два определителя содержат квадратные матрицы ранга $d_2 + 1$ в левой части и ранга $d_1 + 1$ в правой части. В следующем разделе будет дан простой вывод “наивного” предела $N \rightarrow \infty$ для этих результатов, а именно предела, в котором соответствующие матрицы рекурсии P и Q считаются коммутирующими.

3. АБЕЛЕВ СЛУЧАЙ

В данном разделе выводится свойство спектральной дуальности в частном случае предела $N \rightarrow \infty$, $K/N = \mathcal{O}(1)$. В таком пределе матрицы P и Q , при том что они сохраняют свою зонную структуру, могут рассматриваться как коммутирующие, потому что $[P, Q] = -1/K \rightarrow 0$. Кроме того, рассматривается только тот случай, когда коэффициенты $\alpha_j(n)$, $\beta_j(n)$ и $g(n)$ не зависят от n . Это довольно сильное требование, которое выполнено только для определенного диапазона констант связи. Такой предел исследовался в литературе, где он получил название “однорезного случая” или “случая рода ноль” [1], [3].

Дальнейшее упрощение, носящее чисто технический характер, можно получить, если рассмотреть матрицы по-настоящему бесконечного (дважды бесконечного) размера, т.е. размера $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ вместо $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Покажем, что свойство спектральной дуальности в этом случае сводится к классическому результату из коммутативной алгебры, а именно к вычислению результата двух многочленов Лорана.

Неабелев случай (т.е. случай конечных N) был детально исследован в работе [8]. Подход, использованный в этой работе, может быть также успешно применен к выводу результатов в пределе $N \rightarrow \infty$. Тем не менее в данной работе мы приводим другое доказательство, и это доказательство также может быть применено к неабелеву случаю [9].

Уравнения $[P, Q] = -(1/K)\mathbf{1}$ в пределе $N \rightarrow \infty$, $K = \mathcal{O}(N)$, становятся уравнениями коммутативности $[P, Q] = 0$. Более того, поскольку рассматриваются конечнозонные матрицы и основное внимание уделяется окну при размере матрицы N , можно заменить полубесконечные матрицы P, Q дважды бесконечными матрицами с той же зонной структурой. При подходящих масштабных преобразованиях из физических соображений следует, что последовательности $\gamma(n)$, $\alpha_j(n)$ и $\beta_k(n)$ в действительности не зависят от n (если $n = \mathcal{O}(N)$). Именно этот простой случай мы и хотим рассмотреть в данной работе.

Две коммутирующие матрицы P и Q с одной и той же зонной структурой теперь становятся просто многочленами от матрицы сдвига. Все матрицы предполагаются матрицами размера $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, и, следовательно, матрица $\Lambda = [\delta_{i, i+1}]$ оказывается обратимой, а ее

обратная — это просто транспонированная матрица Λ^t . С учетом этого можно записать

$$\begin{aligned} Q(\Lambda) &:= \gamma\Lambda + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{d_2} \alpha_i \Lambda^{-i}, \quad \gamma \neq 0, \quad \alpha_{d_2} \neq 0, \\ P(\Lambda) &:= \gamma\Lambda^{-1} + \beta_0 + \sum_{i=1}^{d_1} \beta_i \Lambda^i, \quad \gamma \neq 0, \quad \beta_{d_1} \neq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где Q и P рассматриваются как многочлены Лорана от переменных Λ, Λ^{-1} . Удобно ввести переменную λ и выразить многочлены Q и P посредством их действия на градуированном пространстве:

$$Q, P: \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}],$$

задаваемого соотношениями (18) при замене Λ на λ . Матрица сдвига Λ задается обычным умножением на λ , в то время как матрица $\Lambda^t = \Lambda^{-1}$ представляется умножением на переменную λ^{-1} . Эквивалентом окна при этом является линейная оболочка, образованная $d_2 + 1$ последовательными мономами от переменной λ :

$$\mathbb{C}\{\psi_{N-d_2}, \dots, \psi_N\} \leftrightarrow \mathbb{C}\{\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N\}.$$

Процедура складывания в этом случае сводится к весьма простому выражению. В самом деле, складывание градуированного пространства $W := \mathbb{C}[[\lambda]]$ на линейную оболочку векторов $\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N$ сводится просто к взятию частного

$$\mathbb{C}[[\lambda]] \simeq \mathbb{C}[x] \otimes \mathbb{C}[[\lambda]] \pmod{x - Q(\lambda) = 0} \simeq \mathbb{C}[x]\{\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N\}.$$

Другими словами, моном λ^{N+1} может быть представлен в терминах мономов $\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N$ с помощью соотношения $x - Q(\lambda) = 0$. Эквивалентом лестничной матрицы будет теперь просто операция умножения на λ в “сложенном” окне $\mathbb{C}[x]\{\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N\}$. Эта процедура определена таким образом, чтобы сделать коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[\lambda]] & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C}[[\lambda]] \\ \langle x - Q(\lambda) = 0 \rangle \downarrow & & \downarrow \langle x - Q(\lambda) = 0 \rangle \\ \mathbb{C}[x]\{\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N\} & \xrightarrow{\mathbf{a}(x)} & \mathbb{C}[x]\{\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N\}. \end{array}$$

В принципе величина $\mathbf{a}$ могла бы зависеть от N , но легко видеть, что она задается следующей похожей на (14) матрицей, не зависящей от N :

$$\mathbf{a}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ -\frac{\alpha_{d_2}}{\gamma} & \dots & \dots & -\frac{\alpha_1}{\gamma} & \frac{x - \alpha_0}{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно было бы определить другое складывание вдоль направления P с помощью следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[\lambda]] & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C}[[\lambda]] \\ \langle y - P(\lambda) = 0 \rangle \downarrow & & \downarrow \langle y - P(\lambda) = 0 \rangle \\ \mathbb{C}[y]\{\lambda^{N-1}, \dots, \lambda^{N+d_1-1}\} & \xleftarrow{\mathbf{b}(y)} & \mathbb{C}[y]\{\lambda^{N-1}, \dots, \lambda^{N+d_1-1}\}, \end{array}$$

где матрица $\mathbf{b}$ имеет вид

$$\mathbf{b}(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ -\frac{\beta_{d_1}}{\gamma} & \dots & \dots & -\frac{\beta_1}{\gamma} & \frac{y-\beta_0}{\gamma} \end{bmatrix}.$$

В этом подходе матрицы $D_1(x)$ и $D_2(y)$ имеют следующий простой вид:

$$\begin{aligned} D_1(x) &:= P(\mathbf{a}(x)) = \gamma \mathbf{a}(x)^{-1} + \sum_{j=0}^{d_1} \beta_j \mathbf{a}^j(x), \\ D_2(y) &:= Q(\mathbf{b}(y)) = \gamma \mathbf{b}(y)^{-1} + \sum_{j=0}^{d_2} \alpha_j \mathbf{b}^j(y). \end{aligned}$$

Прежнее утверждение относительно спектральной дуальности теперь сводится к тождеству

$$\det(y\mathbf{1} - D_1(x)) \propto \det(x\mathbf{1} - D_2(y)).$$

Ниже будет показано, что оба эти определителя на самом деле представляют собой результаты (относительно переменной λ) двух многочленов Лорана $Q(\lambda) - x$ и $P(\lambda) - y$. Доказательство этого для многочленов вполне стандартно и требует лишь простой адаптации к случаю многочленов Лорана (см., например, [11]). Это доказательство сводится к исследованию следующего вложения:

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}\{\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N\} \oplus \\ &\oplus \mathbb{C}\{\lambda^{N-1}, \dots, \lambda^{N+d_1-1}\} \xrightarrow{(P(\lambda)-y) \oplus (Q(\lambda)-x)} \mathbb{C}\{\lambda^{N-d_2-1}, \dots, \lambda^{N+d_1}\}, \end{aligned}$$

где x и y рассматриваются как параметры вложения. Обозначим через W , $\underline{W}$ и U три векторных пространства:

$$\begin{aligned} W &:= \mathbb{C}\{\lambda^{N-d_2}, \dots, \lambda^N\}, \quad \underline{W} := \mathbb{C}\{\lambda^{N-1}, \dots, \lambda^{N+d_1-1}\}, \\ U &:= \mathbb{C}\{\lambda^{N-d_2-1}, \dots, \lambda^{N+d_1}\}. \end{aligned}$$

Тогда рассматриваемое вложение можно собрать в одно отображение

$$W \oplus \underline{W} \xrightarrow{(P(\lambda)-y) \oplus (Q(\lambda)-x)} U.$$

Две части этого отображения дают пространства, которые оказываются перпендикулярными в случае общего положения при изменении переменных x и y . Если они не перпендикулярны для данной пары значений (x, y) , то это значит, что существуют $w \in W$ и $\underline{w} \in \underline{W}$ такие, что

$$w \neq 0, \quad \underline{w} \neq 0, \quad (P - y)w = (Q - x)\underline{w} \in U.$$

Вычисляя частное от деления этого соотношения на соотношение $Q(\lambda) - x = 0$ или $P(\lambda) - y = 0$, получаем

$$\begin{aligned} (D_1(x) - y)w &= 0, \\ (D_2(y) - x)\underline{w} &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

откуда следует, что y — собственное значение матрицы $D_1(x)$, а x — собственное значение матрицы $D_2(y)$. Обратно, если выполнено какое-либо одно из уравнений (19), например первое для ненулевого вектора w , то это значит, что существует $\underline{w} \in \underline{W}$ такое, что

$$(P - y)w = (Q - x)\underline{w}.$$

Заметим, что величина $(Q - x)\underline{w}$ не может быть равна нулю, поскольку отображение $P - y: W \rightarrow U$ инъективно при всех y , а потому $(P - y)w \neq 0$. Тот же результат получится, если мы начнем рассмотрение со второго уравнения (19). Тем самым это доказывает, что вложение не перпендикулярно тогда и только тогда, когда x есть собственное значение оператора $D_2(y)$, что эквивалентно условию, что y есть собственное значение оператора $D_1(x)$.

Условие поперечности сводится к тому, что определитель вложения не равен нулю (в любом фиксированном базисе). Легко видеть, что такое вложение задается матрицей Сильвестра двух многочленов Лорана

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta_0 - y & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta_0 - y & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta_0 - y & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \beta_0 - y & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_{d_1} \\ \hline \alpha_{d_2} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 - x & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{d_2} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 - x & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{d_2} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 - x & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{d_2} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 - x & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{d_2} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 - x & \gamma \end{bmatrix},$$

определитель $\Delta(x, y)$ которой равен результату. Простой подсчет степеней свободы и исследование старших степеней по переменным x или y показывают, что

$$\alpha_{d_2} \gamma^{d_1} \det(y\mathbf{1} - D_1(x)) = \Delta(x, y) = \beta_{d_1} \gamma^{d_2} \det(x\mathbf{1} - D_2(y)),$$

что задает спектральные кривые как местоположение непоперечных вложений. Пересечение двух вложений на этой спектральной кривой обычно задается одномерной кривой и проецируется на собственные векторы операторов $D_1(x)$ и $D_2(y)$.

В то время как это весьма простое рассуждение представляет собой просто переформулировку стандартных алгебраических результатов в нашем абелевом подходе, очень похожий подход может также быть использован при доказательстве спектральной дуальности для пары $\overset{N}{D}_1(x)$ и $\overset{N}{D}_2(y)$ в подходе с конечным размером матриц N , в котором матрицы P и Q не коммутируют. Улучшая и развивая этот подход, в работе [9] мы получили и другие результаты работы [8] в более элегантном и компактном виде. Среди этих результатов отметим условие согласования для уравнений деформаций констант связи в потенциалах V_1, V_2 , что, в частности, влечет инвариантность обобщенных монодромий операторов $\partial_x + \overset{N}{D}_1(x)$ и $\partial_y + \overset{N}{D}_2(y)$. При этом получаются некоммутативные аналоги результатов для конечнозонных матриц, свойства которых будут исследованы в дальнейшем.

Список литературы

- [1] *J. M. Daul, V. Kazakov, I. K. Kostov.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 409. P. 311; hep-th/9303093.
- [2] *N. M. Ercolani, K. T.-R. McLaughlin.* Physica D. 2001. V. 152–153. P. 232.
- [3] *B. Eynard.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 506. P. 633; cond-mat/9707005.
- [4] *B. Eynard.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 8081; cond-mat/9801075.
- [5] *B. Eynard, M. L. Mehta.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 4449; cond-mat/9710230.
- [6] *K. Ueno, K. Takasaki.* Adv. Stud. Pure Math. 1984. V. 4. P. 1.
- [7] *M. Adler, P. Van Moerbeke.* Commun. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 241; Ann. Math. 1999. V. 149. P. 921.
- [8] *M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 229. P. 73; nlin.SI/0108049.
- [9] *M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad, J. Hurtubise.* The geometric meaning of dual isomonodromy tau functions appearing in 2-matrix models. (in preparation).
- [10] *A. Userkesm, S. P. Norset.* Constr. Approx. 1989. V. 5. P. 437.
- [11] *I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky.* Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston, MA: Birkhäuser, 1994.