Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Богданов, Б. Г. Конопельченко, Л. Мартинес Алонсо, Квазиклассический $\bar{\partial}$ -метод: производящие уравнения для бездисперсионных интегрируемых иерархий, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 1, 46–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:01:31

© 2003 г. Л. В. Богданов*, Б. Г. Конопельченко[†],
Л. Мартинес Алонсо[‡]

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ $\bar{\partial}$ -МЕТОД: ПРОИЗВОДЯЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БЕЗДИСПЕРСИОННЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ

Квазиклассический метод $\bar{\partial}$ -одевания использован для получения производящих уравнений для бездисперсионных иерархий в компактном виде. Рассматриваются примеры бездисперсионных иерархий Кадомцева–Петвиашвили и двумеризованной цепочки Тоды.

Ключевые слова: квазиклассический предел, $\bar{\partial}$ -метод, τ -функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бездисперсионные интегрируемые уравнения и соответствующие иерархии вызывают постоянный интерес в течение последних двух десятилетий. Их изучение важно, поскольку бездисперсионные интегрируемые иерархии составляют существенную часть общей теории интегрируемых систем (см., например, [1]–[9]) и возникают при анализе многочисленных задач в физике, математике и прикладной математике (см., например, [10]–[12]).

Недавно было показано, что бездисперсионные интегрируемые иерархии удобно исследовать с помощью квазиклассического метода $\bar{\partial}$ -одевания [13]–[15], позволяющего просто и элегантно строить и решать такие иерархии. Более того, этот метод устанавливает связь между бездисперсионными интегрируемыми иерархиями и теорией квазиконформных отображений на плоскости [14].

В данной работе квазиклассический метод $\bar{\partial}$ -одевания используется для вывода компактных уравнений для бездисперсионных интегрируемых иерархий. Из этих уравнений в частности следует существование τ -функций, и они задают соответствующие бездисперсионные формулы сложения (уравнения Хироты) очень простым способом. Общий подход проиллюстрирован на примерах бездисперсионных иерархий Кадомцева–Петвиашвили (бКП) и бездисперсионной двумеризованной цепочки Тоды (бДЦТ).

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия.
E-mail: Leonid@landau.ac.ru

[†] Dipartimento di Fisica dell' Università and Sezione INFN, Lecce, Italy

[‡] Departamento de Física Teórica II Universidad Complutense, Madrid, Spain

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ $\bar{\partial}$ -МЕТОД

Квазиклассический метод $\bar{\partial}$ -одевания, предложенный в работах [13]–[15], основан на квазиклассической $\bar{\partial}$ -задаче

$$S_{\bar{z}} = W(z, \bar{z}, S_z), \quad (2.1)$$

где $z \in \mathbb{C}$, черта обозначает комплексное сопряжение, $S_z = \partial S(z, \bar{z})/\partial z$, а W (квазиклассические начальные данные $\bar{\partial}$ -задачи) представляет собой аналитическую функцию от S_z . Решения уравнения (2.1) ищутся в виде $S = S_0 + \tilde{S}$, где $S_{0\bar{z}} = 0$ при $z \in G$ (где G – некоторая область в $\mathbb{C}$) и $\tilde{S}_{\bar{z}} = 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Параметризуя функцию S_0 , аналитическую по G , некоторым (бесконечным) набором параметров (времен), $S_0 = S_0(z; t_1, t_2, \dots)$, можно построить решения уравнения (2.1), зависящие от этих параметров: $S = S(z, \bar{z}; t_1, t_2, \dots)$. Такая зависимость обычно описывается уравнениями в частных производных для S , в которых времена $t_1, t_2, \dots$ выступают как независимые параметры.

Для вывода этих уравнений отметим, что из (2.1) следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t_i} \right)_{\bar{z}} = W'(z, \bar{z}; S_z) \left(\frac{\partial S}{\partial t_i} \right)_z, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2)$$

где $W'(z, \bar{z}; \xi) = \partial W(z, \bar{z}; \xi)/\partial \xi$.

Уравнение Бельтрами на плоскости $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ обладает целым рядом замечательных свойств (см., например, [16]), среди которых есть два весьма существенных для квазиклассического $\bar{\partial}$ -метода. Запишем их в следующем виде.

1. Если f_1 и f_2 представляют собой решения уравнения Бельтрами, то произвольная дифференцируемая функция $F(f_1, f_2)$ также оказывается решением.
2. Если f есть решение уравнения Бельтрами, ограниченное в $\mathbb{C}$, и $f \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_0$ ($z_0 \in \mathbb{C} \cup \infty$), то (при некоторых достаточно мягких условиях) $f = 0$.

Из этих двух свойств следует, во-первых, что произвольная дифференцируемая функция $F(\partial S/\partial t_1, \partial S/\partial t_2, \dots)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами $F_{\bar{z}} = \mu F_z$ и, во-вторых, если F ограничена как функция от z и $F \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_0$, то $F \equiv 0$. Тем самым такие функции задают уравнения [15]

$$F_i \left(\frac{\partial S}{\partial t_1}, \frac{\partial S}{\partial t_2}, \dots \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

которые и являются искомыми дифференциальными уравнениями для бездисперсионных иерархий. Вид уравнений (2.3) полностью определяется выбором области G и параметризацией $S_0(z; t_1, t_2, \dots)$.

Таким образом, квазиклассический метод $\bar{\partial}$ -одевания в основном состоит в достаточно элементарных операциях комплексного анализа, примененных к уравнению (2.1).

3. ИЕРАРХИЯ БКП

Квазиклассический метод $\bar{\partial}$ -одевания был использован в работе [15] для вывода иерархии бКП, иерархии бездисперсионного модифицированного уравнения КП (бмКП)

и иерархии бДПТ в их стандартных формулировках. Выведем производящие уравнения, которые задают бездисперсионные иерархии в различном виде, а потому играют центральную роль в обсуждаемой теории.

Начнем с иерархии бКП. В этом случае область G представляет собой диск единичного радиуса ($|z| \leq 1$), $W = 0$ при $|z| > 1$ и $S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} z^n t_n$ [15]. Также потребуем, чтобы $\tilde{S} \sim \tilde{S}_1 z^{-1} + \tilde{S}_2 z^{-2} + \dots$ при $z \rightarrow \infty$. Производная $p = \partial S / \partial t_1$ представляет собой базисный гомеоморфизм [14] и при $z \rightarrow \infty$

$$p = z + \frac{1}{z} \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial t_1} + \dots$$

Введем также хорошо известный оператор

$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{-n} \frac{\partial}{\partial t_n}.$$

Из свойств уравнения (2.1) и уравнения Бельтрами (2.2) следует, что функция $D(z_1)S(z)$ ($z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in \mathbb{C} \setminus G$) и, следовательно, функция $e^{-D(z_1)S(z)}$ удовлетворяют уравнению (2.2). Вследствие того, что $D(z_1)S_0(z) = -\ln(1 - z/z_1)$, получим

$$e^{-D(z_1)S(z)} = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) e^{-D(z_1)\tilde{S}(z)}. \quad (3.1)$$

Таким образом, $e^{-D(z_1)S(z)} \sim -z/z_1 + O(1)$ при $z \rightarrow \infty$.

Используя эти свойства функций $p(z)$ и $e^{-D(z_1)S(z)}$, можно построить уравнение вида (2.3), а именно

$$p(z) + z_1 e^{-D(z_1)S(z)} - (z_1 + D(z_1)\tilde{S}_1) = 0. \quad (3.2)$$

С другой стороны, если вычислить левую часть уравнения (3.2) при $z = z_1$ и использовать (3.1), то можно получить уравнение (3.2) в эквивалентном виде

$$p(z) - p(z_1) + z_1 e^{-D(z_1)S(z)} = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_1 \in \mathbb{C} \setminus G. \quad (3.3)$$

Это уравнение легко проверяется явно. В самом деле, его левая часть представляет собой ограниченное решение уравнения Бельтрами (2.2), которое имеет ноль при $z = z_1$. Из свойств уравнения Бельтрами следует, что такое решение тождественно равно нулю.

То, что уравнение (3.3) является основным для теории иерархий бКП, было понято уже авторами работ [2], [4]. Необходимо, однако, подчеркнуть, что точка $z \in \mathbb{C}$ в уравнении (3.3) произвольна, в то время как соответствующее уравнение в этих работах выполняется только при $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Этот факт будет иметь существенное значение в некоторых дальнейших построениях.

Из уравнения (3.3) вкупе с (3.1) сразу следует, что при $z, z_1 \in \mathbb{C} \setminus G$

$$D(z_1)\tilde{S}(z, \mathbf{t}) = D(z)\tilde{S}(z_1, \mathbf{t}).$$

Тогда существует функция $F(\mathbf{t})$ такая, что

$$\tilde{S}(z, \mathbf{t}) = -D(z)F(\mathbf{t}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus G.$$

При этом получим (см. также [2], [4], [8])

$$p(z_1) - p(z_2) = (z_1 - z_2)e^{D(z_1)D(z_2)F}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus G. \quad (3.4)$$

Суммируя уравнения (3.4) для пар параметров (z_1, z_2) , (z_2, z_3) и (z_3, z_1) , приходим к уравнению

$$(z_1 - z_2)e^{D(z_1)D(z_2)F} + (z_2 - z_3)e^{D(z_2)D(z_3)F} + (z_3 - z_1)e^{D(z_3)D(z_1)F} = 0, \quad (3.5)$$

$$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus G,$$

представляющему собой бездисперсионное тождество Фэя [4], [7]. Таким образом, $F = \ln \tau_{\text{бКП}}$, где $\tau_{\text{бКП}}$ есть τ -функция иерархии бКП [4], [7].

Уравнение (3.3) порождает иерархию уравнений типа Гамильтона–Якоби для иерархии бКП. В самом деле, записав его в виде

$$\frac{\partial S(z)}{\partial t_1} - \frac{\partial S(z_1)}{\partial t_1} + z_1 e^{-D(z_1)S(z)} = 0 \quad (3.6)$$

и разложив его левую часть при $z_1 \rightarrow \infty$, получаем уравнения

$$-\frac{\partial \tilde{S}_1(t)}{\partial t_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial S(z)}{\partial t_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S(z)}{\partial t_1} \right)^2 = 0, \quad (3.7)$$

$$-\frac{\partial \tilde{S}_2(t)}{\partial t_1} - \frac{1}{6} \frac{\partial S(z)}{\partial t_3} + \frac{1}{6} \frac{\partial S(z)}{\partial t_1} \frac{\partial S(z)}{\partial t_2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial S(z)}{\partial t_1} \right)^3 = 0$$

и т.д., которые задают одну из эквивалентных форм известных уравнений типа Гамильтона–Якоби для иерархии бКП.

Уравнение (3.3) приводит к уравнению, которое порождает иерархию уравнений только для функции $S(z, \bar{z}; \mathbf{t})$. В самом деле, действуя оператором $D(z_k)$ на уравнение (3.2) (с подстановкой $z_1 \rightarrow z_i$), получаем:

$$D(z_k)p(z) - D(z_k)D(z_i)\tilde{S}_1 + z_i D(z_k)e^{-D(z_k)S(z)} = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_i, z_k \in \mathbb{C} \setminus G. \quad (3.8)$$

Складывая уравнения (3.8) для всех возможных пар z_i, z_k ($i, k = 1, 2, 3$), получаем уравнение

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} z_i D(z_k) e^{-D(z_i)S(z, \bar{z}; \mathbf{t})} = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus G, \quad (3.9)$$

где ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор (с $\epsilon_{123} = 1$) и суммирование идет по всем $i, j, k = 1, 2, 3$. Рассматривая уравнение (3.9) при $z_1, z_2, z_3 \rightarrow \infty$ и объединяя члены различных порядков для переменных z_1^{-1}, z_2^{-1} и z_3^{-1} , получим бесконечную иерархию дифференциальных уравнений для функции $S(z, \bar{z}; \mathbf{t})$. В низшем нетривиальном порядке ($z_3^{-1} z_1^{-2}, z_3^{-1} z_2^{-2}, \dots$) имеем

$$\frac{\partial^2 S(z, \bar{z}; \mathbf{t})}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{3}{4} \frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2} - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial t_1^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t_2} - \left(\frac{\partial S}{\partial t_1} \right)^2 \right) = 0, \quad (3.10)$$

что, конечно, также следует из уравнений (3.7).

Далее, разлагая левую часть уравнения (3.9) в ряд Тейлора по переменной z^{-1} при $z \rightarrow \infty$, получим (в порядке z^{-1})

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} D(z_k) \left(z_i D(z_i) \tilde{S}_1 + \frac{1}{2} (D(z_i) \tilde{S}_1)^2 \right) = 0. \quad (3.11)$$

Это уравнение является производящим для полной иерархии бКП (при $u(\mathbf{t}) = -2\partial \tilde{S}_1 / \partial t_1$). Легко проверить, что, разлагая уравнение (3.11) при $z_1, z_2, z_3 \rightarrow \infty$, можно получить уравнение бКП

$$u_{t_1 t_3} = \frac{3}{2} (u u_{t_1})_{t_1} + \frac{3}{4} u_{t_2 t_2}$$

и высшие уравнения.

Таким образом, уравнение (3.9) представляет собой одно из фундаментальных уравнений иерархии бКП. Заметим, что ввиду того, что функция $S(z, \bar{z}; \mathbf{t})$ задает квазиконформное отображение области G [14], уравнение (3.9) также представляет собой основное уравнение для интегрируемых деформаций квазиконформных отображений.

Наконец, определим еще одно уравнение, связанное с иерархией бКП. Используя формулу (3.3), получим

$$e^{D(z_1)(S(z_2) - S(z))} + e^{D(z_2)(S(z_1) - S(z))} = 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus G. \quad (3.12)$$

Соответственно

$$e^{D(z_i)(S_j(\mathbf{t}) - S_k(\mathbf{t}))} + e^{D(z_j)(S_i(\mathbf{t}) - S_k(\mathbf{t}))} = 1, \quad (3.13)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k \neq 1, S_i(\mathbf{t}) = S(z_i, \bar{z}_i; \mathbf{t})$ и $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus G$. Эту систему трех уравнений для трех функций $S_1(\mathbf{t}), S_2(\mathbf{t})$ и $S_3(\mathbf{t})$ можно рассматривать как бездисперсионный предел системы Дарбу.

4. ИЕРАРХИЯ ДВУМЕРИЗОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Область G для иерархии бЛШТ представляет собой кольцо $a < |z| < b$ с произвольными a, b ($a, b \in \mathbb{R}; a, b > 0; b > a$). Чтобы корректно задать квазиклассическую $\bar{\partial}$ -задачу (2.1), вообще говоря, аналитичность функции S_0 в области G не является необходимой; достаточно потребовать аналитичности ее производной S_{0z} . В общем случае функция S_0 , для которой ее производная S_{0z} аналитична в области G , может быть представлена в виде

$$S_0 = t \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} z^n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} y_n,$$

где t, x_n, y_n — свободные параметры [15]. Будем считать, что $\tilde{S}(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} S_n z^{-n}$ при $z \rightarrow \infty$, и определим $\tilde{S}(0) = \phi$, $G_+ = \{z, |z| > b\}$ и $G_- = \{z, |z| < a\}$. Функции $p_+ = \partial S / \partial x_1$ и $p_- = \partial S / \partial y_1$ имеют полюсные особенности, в то время как функция $p = \partial S / \partial t$

имеет логарифмическую особенность. Функции $e^{-D_+(z_1)S(z)}$, $e^{-D_-(z_2)S(z)}$ и $e^{DS(z)}$, где $z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in G_+$, $z_2 \in G_-$ и

$$D_+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{-n} \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad D_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \frac{\partial}{\partial y_n}, \quad D = \frac{\partial}{\partial t},$$

являются решениями уравнения Бельтрами и также имеют полюсные особенности.

Используя эти функции, получим следующие уравнения:

$$p_+(z) - p_+(z_1) + z_1 e^{-D_+(z_1)S(z)} = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_1 \in G_+, \quad (4.1)$$

$$p_-(z) - p_-(z_2) + \frac{1}{z_2} e^{D_-(z_2)(\phi - S(z))} = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_2 \in G_-, \quad (4.2)$$

$$p_+(z) = e^{p(z) - D\tilde{S}_1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.3)$$

$$p_-(z) = e^{D\phi - p(z)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.1) совпадает с уравнением (3.3) и задает иерархию бКП в переменных x_n . В частности, можно получить

$$\tilde{S}(z_1) = -D_+(z_1)F_+, \quad z_1 \in G_+,$$

равно как и соответствующую формулу сложения для иерархии бКП вместе с производящими уравнениями.

Уравнение (4.2) содержит в себе иерархию бмКП. Из него следует, что

$$\tilde{S}(z_2) = \phi - D_-(z_2)F_-, \quad z_2 \in G_-,$$

и функция F_- удовлетворяет формуле сложения иерархии бмКП, совпадающей с формулой (3.5) после подстановки $F \rightarrow F_-$, $D \rightarrow D_-$ и $z \rightarrow z^{-1}$. Вывод соответствующих производящих уравнений оказывается простым упражнением.

Из формул (4.3) и (4.4) следует возможность объединения этих двух частей в иерархию бмКП. Используя (4.3), можно представить (4.1) в виде

$$e^{DS(z)} - e^{DS(z_1)} + z_1 e^{-D_+(z_1)S(z)} = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_1 \in G_+, \quad (4.5)$$

в то время как, используя соотношения $p_-(z_2) = z_2^{-1} e^{D_-(z_2)\phi}$ и (4.4), уравнение (4.2) можно преобразовать к виду

$$e^{DS(z)}(1 - e^{D_-(z_2)S(z)}) = z_2 e^{(D - D_-(z_2))\phi}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_2 \in G_-. \quad (4.6)$$

Вычисляя левую часть уравнения (4.5) при $z = 0$, получим

$$e^{DS(z_1)} = z_1 e^{-D_+(z_1)\phi}.$$

Отсюда следует, что $\phi = DF_+$. С другой стороны, вычисляя соотношение (4.6) вблизи $z_2 = 0$, получим

$$\frac{\partial S(z)}{\partial y_1} e^{DS(z)} = e^{D\phi}.$$

Разлагая левую часть этого соотношения в окрестности $z = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 F_-}{\partial y_1 \partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 F_+}{\partial y_1 \partial t}$$

и т.д. Таким образом, получаем $F_+ = F_- = F$. Так как $\tilde{S}(z_1) = -D_+(z_1)F$ ($z_1 \in G_+$), $\tilde{S}(z_2) = D\phi - D_-(z_2)F$ ($z_2 \in G_-$), то из формул (4.5) и (4.6) легко получить известные формулы сложения (бездисперсионные уравнения Хироты) для иерархии бДЦТ (см. [7], [11], [17]):

$$\begin{aligned} & \tilde{z}_1 e^{-DD_+(\tilde{z}_1)F} - z_1 e^{-DD_+(z_1)F} + \\ & + (z_1 - \tilde{z}_1) e^{D_+(z_1)D_+(\tilde{z}_1)F} = 0, \quad z_1, \tilde{z}_1 \in G_+, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{z_2}{z_1} - 1 \right) e^{D_-(z_2)D_+(z_1)F} - \\ & - \frac{z_2}{z_1} e^{(D_+(z_1)+D-D_-(z_2))DF} = 0, \quad z_1 \in G_+, z_2 \in G_-, \end{aligned} \quad (4.8)$$

и формулу сложения иерархии бКП (3.5). Заметим, что вычисление левой части уравнения (4.8) при $z_1 \rightarrow \infty$, $z_2 \rightarrow 0$ приводит к формуле

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} = 1 - e^{D^2 F}. \quad (4.9)$$

Уравнения (4.5) и (4.6) также представляют собой производящие уравнения иерархии уравнений типа Гамильтона–Якоби. В самом деле, разлагая левую часть уравнения (4.5) при $z_1 \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(z)}{\partial x_1} - e^{\frac{\partial S}{\partial t}} + \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial t} = 0, \\ & \frac{\partial S}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial t} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

и т.д., в то время как, разлагая уравнения вблизи точки $z_2 = 0$, приходим к

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial y_1} - e^{\partial \phi / \partial t - \partial S / \partial t} = 0, \\ & \frac{\partial S}{\partial y_2} - \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial y_1} e^{\partial \phi / \partial t - \partial S / \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

и старшим уравнениям, которые оказываются эквивалентными найденным в работе [15].

Получим теперь производящие уравнения для функций $S(z, \bar{z}; t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Во-первых, из уравнения (4.5) следует, что

$$-D_+(z_1)\phi = \ln \left(\frac{1}{z_1} e^{DS(z)} + e^{-D_+(z_1)S(z)} \right), \quad z_1 \in G_+, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.12)$$

в то время как из (4.6) получаем

$$(D - D_-(z_2))\phi = \ln\left(\frac{1}{z_2}e^{DS(z)} - \frac{1}{z_2}e^{(D-D_-(z_2))S(z)}\right), \quad z_2 \in G_-, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.13)$$

Исключая функцию ϕ из этих уравнений, приходим к

$$\begin{aligned} (D - D_-(z_2)) \ln\left(\frac{1}{z_1}e^{DS(z)} + e^{-D_+(z_1)S(z)}\right) + \\ + D_+(z_1) \ln\left(e^{DS(z)} - e^{(D-D_-(z_2))S(z)}\right) = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in G_+$ и $z_2 \in G_-$. Рассматривая предельный случай $z_1 \rightarrow \infty$, $z_2 \rightarrow 0$, получаем уравнение низшего порядка

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial S}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial t}(e^{\partial S / \partial t}) = 0, \quad (4.15)$$

которое уже было найдено в работе [15]. Старшие члены разложения задают уравнения высших порядков для функции $S(z, \bar{z}; t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Чтобы вывести производящие уравнения для ϕ , удобно переписать уравнение (4.8) в виде

$$D_-(z_2)D_+(z_1)F = \ln\left(\frac{z_1}{z_1 - z_2}\left(1 - \frac{z_2}{z_1}e^{(D_+(z_1)+D-D_-(z_2))DF}\right)\right).$$

Применяя оператор D к этому уравнению и учитывая соотношение $DF = \phi$, получаем

$$\begin{aligned} D_-(z_2)D_+(z_1)\phi = \\ = D \ln\left(\frac{z_1}{z_1 - z_2}\left(1 - \frac{z_2}{z_1}e^{(D_+(z_1)+D-D_-(z_2))\phi}\right)\right), \quad z_1 \in G_+, \quad z_2 \in G_-. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Разлагая обе части уравнения (4.16) при $z_1 \rightarrow \infty$ и $z_2 \rightarrow 0$, в низшем нетривиальном порядке (z_1^{-1}, z_2) приходим к уравнению бДШТ (см., например, [6], [7])

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial}{\partial t}(e^{\partial \phi / \partial t}) = 0, \quad (4.17)$$

в то время как старшие члены задают уравнения высших порядков иерархии бДШТ.

Производящие уравнения (3.9) и (4.14) описывают также компактную форму интегрируемых деформаций квазиконформных отображений $S(z, \bar{z}; t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ соответственно единичного диска и кольца. Заметим, что те же самые формулы можно записать, используя конечное число “логарифмических” времен ξ_i , определенных как

$$S_0(z, \xi) = \sum_{i=1}^3 \xi_i \ln(z - z_i),$$

вместо бесконечного набора времен t_n или x_n, y_n .

Благодарности. Б.Г. Конопельченко признателен за поддержку организаторам программы “Интегрируемые системы” в Институте математических наук Исаака Ньютона (Кембридж, Великобритания). Л. Мартинес Алонсо благодарит Fundacion Banco Bilbao Vizcaya Argentaria за щедрую поддержку его пребывания в Кембриджском университете.

Настоящая работа была поддержана INTAS (грант № 99-1782). Работа Л.В. Богданова была частично поддержана РФФИ (гранты № 01-01-00929, 00-15-96007); работа Б.Г. Конопельченко – грантом COFIN 2000 “Sintesi”; работа Л. Мартинеса Алонсо – CICYT proyecto PB98-0821.

Список литературы

- [1] *Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин.* Функц. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. С. 31–42; 1978. Т. 17. С. 25–37; *В. Е. Захаров.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. С. 15–24; *V. E. Zakharov.* Physica. D. 1981. V. 3. P. 193–202; *P. D. Lax, C. D. Levermore.* Commun. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 253–290; P. 571–593; P. 809–830; *И. М. Кривевер.* Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. С. 37–52.
- [2] *Y. Kodama.* Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 223–226; 1990. V. 147. P. 477–482.
- [3] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков.* УМН. 1989. Т. 44. С. 29–98.
- [4] *K. Takasaki, T. Takebe.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. Suppl. 1B. P. 889–922.
- [5] *I. M. Krichever.* Commun. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 437–475; *N. M. Ercolani et al. (eds.).* Singular Limits of Dispersive Waves. Proc. of Nato Adv. Research Workshop (Lions, France, July 8–12, 1991). Nato ASI. Ser. B. Phys. V. 320. New York: Plenum, 1994.
- [6] *V. E. Zakharov.* Dispersionless limit of integrable systems in $(2 + 1)$ -dimensions. In: Singular Limits of Dispersive Waves. Proc. of Nato Adv. Research Workshop (Lions, France, July 8–12, 1991). Nato ASI. Ser. B. Phys. V. 320. Eds. N.M. Ercolani et al. New York: Plenum, 1994. P. 165–174.
- [7] *K. Takasaki, T. Takebe.* Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 743–808.
- [8] *R. Carroll, Y. Kodama.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6373–6387.
- [9] *S. Jin, C. D. Levermore, D. W. McLaughlin.* Commun. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. P. 613–654.
- [10] *I. M. Krichever.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 415–429; *B. A. Dubrovin.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 145. P. 195–207; Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627–289; *B. A. Dubrovin, Y. Zhang.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 198. P. 311–361; *S. Aoyama, Y. Kodama.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 182. P. 185–219; *Y. Kodama.* SIAM J. Appl. Math. 1999. V. 59. P. 2162–2192; *Y. Gibbons, S. P. Tsarev.* Phys. Lett. A. 1999. V. 258. P. 263–271; *M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5106–5109.
- [11] *P. B. Wiegmann, A. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 213. P. 523–538.
- [12] *M. Dunajski, L. J. Mason, P. Tod.* J. Geom. Phys. 2001. V. 37. P. 63–93.
- [13] *B. G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso, O. Ragnisco.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10209–10217; nlin. SI/0103023.
- [14] *B. Konopelchenko, L. Martinez Alonso.* Phys. Lett. A. 2001. V. 286. P. 161–166.
- [15] *B. Konopelchenko, L. Martinez Alonso.* Dispersionless scalar integrable hierarchies, Witham hierarchy, and the quasi-classical dbar-dressing method. J. Math. Phys. (to appear); nlin. SI/0105071.
- [16] *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
- [17] *I. K. Kostov, I. Krichever, I. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* τ -Function for analytic curves.. In: Random Matrix Models and their Applications. Math. Sci. Inst. Publ. V. 40. Eds. P. Bleher et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. P. 285–299.