Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Сергеев, Оператор эволюции для некоторого квантового маятника, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 35–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:50:00

© 2004 г.

С. М. Сергеев*

ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КВАНТОВОГО МАЯТНИКА

Предложено соотношение нового типа для рядов по простой алгебре Вейля. Это соотношение позволяет выразить, в частности, оператор эволюции некоторого квантового маятника через его гамильтониан.

Ключевые слова: простая алгебра Вейля, компактный квантовый дилогарифм.

Компактный q -дилогарифм (q -экспонента) по определению [1] есть

$$(x; q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}}{(q; q)_n} x^n, \quad (1)$$

где предполагается $|q| < 1$ и $(x; q)_n = (1 - x)(1 - qx) \dots (1 - q^{n-1}x)$. Если аргументы q -дилогарифма принадлежат простой алгебре Вейля

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = q\mathbf{v}\mathbf{u}, \quad (2)$$

то q -дилогарифм используется для построения группы рациональных преобразований (2). Например, операторнозначная функция $(\mathbf{u}; q)_\infty$ совершает преобразование

$$(\mathbf{u}; q)_\infty \mathbf{v}(\mathbf{u}; q)_\infty^{-1} = \mathbf{v}(1 - \mathbf{u})^{-1}. \quad (3)$$

Различные замечательные соотношения для q -рядов на простой алгебре Вейля (2) могут быть применены в квантовой механике [1]. Наиболее известными являются теорема сложения и пентагональное тождество:

$$(\mathbf{u}; q)_\infty (\mathbf{v}; q)_\infty = (\mathbf{u} + \mathbf{v}; q)_\infty, \quad (\mathbf{v}; q)_\infty (\mathbf{u}; q)_\infty = (\mathbf{u} - \mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{v}; q)_\infty. \quad (4)$$

В данной работе представлен более сложный результат, касающийся следующей функции, состоящей из пяти сомножителей:

$$\mathbf{s} = (a_1 \mathbf{v}^{-1}; q)_\infty (b_0 \mathbf{u}; q)_\infty (-c_0 \mathbf{v}\mathbf{u}; q)_\infty (a_0 \mathbf{v}; q)_\infty (b_1 \mathbf{u}^{-1}; q)_\infty, \quad (5)$$

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия; Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany. E-mail: sergeev@thsun1.jinr.ru; sergeev@mpim-bonn.mpg.de

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – генераторы Вейля и $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0 \in \mathbb{C}$. Пусть

$$\mathbf{h} = H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_0 \mathbf{v} + b_0 \mathbf{u} + a_1 \mathbf{v}^{-1} + b_1 \mathbf{u}^{-1} - c_0 \mathbf{v} \mathbf{u} - c_1 \mathbf{v}^{-1} \mathbf{u}^{-1}, \quad (6)$$

где $c_1 = a_1 b_1$. Полином $\mathbf{h}$ играет роль гамильтониана $\mathbf{s}$ в следующем смысле. Оператор $\mathbf{s}$ определяет рациональное преобразование

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}' = \mathbf{s} \mathbf{u} \mathbf{s}^{-1}, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \mathbf{s} \mathbf{v} \mathbf{s}^{-1}, \quad (7)$$

где в результате преобразования (3) $\mathbf{u}'$, например, принимает вид

$$\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v}(a_0 - c_0 \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}}(1 - b_0 \tilde{\mathbf{u}})^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(1 - a_1 \mathbf{v}^{-1})^{-1}. \quad (8)$$

Можно легко проверить, что $H(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, т.е. $\mathbf{h}$ и в самом деле является инвариантом $\mathbf{s}$,

$$\mathbf{s} \mathbf{h} = \mathbf{h} \mathbf{s}. \quad (9)$$

Полином (6) иногда называется гамильтонианом своего рода квантового маятника, хоть форма эволюционного отображения несколько необычна.

Оператор $\mathbf{s}$ и его инвариант $\mathbf{h}$ возникали в работе [2] как оператор эволюции и его гамильтониан для простейшей ситуации в некоторой иерархии $(2+1)$ -мерных интегрируемых систем. В работе [2] была сформулирована следующая

ГИПОТЕЗА 1. *Операторнозначная функция $\mathbf{s}$, определенная формулой (5) как ряд по $\mathbf{u}, \mathbf{v}$*

$$\mathbf{s} = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} f_{n,m}(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0) \mathbf{v}^n \mathbf{u}^m \quad (10)$$

может быть переписана тождественно как $\mathbf{v}^n \mathbf{u}^m$ -разложение

$$\mathbf{s} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(a_0 a_1, b_0 b_1, c_0 a_1 b_1) \mathbf{h}^k \quad (11)$$

для произвольных a_0, a_1, b_0, b_1, c_0 .

Чтобы получить (10) из (11), нужно совершить *бесконечное* частичное суммирование: пусть

$$\mathbf{h}^k = \sum_{n,m=-k}^{n,m=k} \chi_{k,n,m} \mathbf{v}^n \mathbf{u}^m, \quad (12)$$

тогда утверждение гипотезы 1 состоит в том, что ряды

$$f_{n,m} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \chi_{k,n,m} \quad (13)$$

являются сходящимися. Заметим, что тождества (4), будучи частными случаями представления $\mathbf{s}$ в виде функций соответствующего $\mathbf{h}$, содержат *конечные* частичные суммирования типа (13).

Далее, мы можем предположить форму функции (11). Обозначим для краткости

$$a = a_0 a_1, \quad b = b_0 b_1, \quad c = c_0 a_1 b_1. \quad (14)$$

Пусть для произвольных комплексных h, a, b, c

$$S(x) = \begin{pmatrix} 1 - hx + bx^2 & 1 \\ q^{-1}x(1-x)(a - q^{-1}cx) & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

и

$$S_n(x) = S(x) \cdot S(qx) \cdot S(q^2x) \cdots S(q^{n-1}x). \quad (16)$$

Для $|q| < 1$ можно легко убедиться в том, что

$$S_\infty(x) = \begin{pmatrix} s(x) & s(x) \\ \tilde{s}(x) & \tilde{s}(x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{s}(x) = q^{-1}x(1-x)(a - q^{-1}cx)s(qx). \quad (17)$$

Согласно этому определению $s(x)$ является также функцией a, b, c и h :

$$s(x) = s(a, b, c; h; x), \quad s(a, b, c; h; 1) = s(b, a, c; h; 1). \quad (18)$$

Второе равенство представляет собой примечательную симметрию, хорошо скрытую в определении (17) функции s . В эквивалентной формулировке, если $F(x)$ – решение функционального уравнения

$$F(x) = 1 - hx + bx^2 + \frac{x(1-qx)(a-cx)}{F(qx)} \quad (19)$$

при $F(0) = 1$, получаем $s(x) = \prod_{n=0}^{\infty} F(q^n x)$.

ГИПОТЕЗА 2. *Оператор $\mathbf{s}$ как функция a, b, c и $\mathbf{h}$ есть не что иное, как*

$$\mathbf{s} = s(a, b, c; \mathbf{h}; 1). \quad (20)$$

Для функции $\mathbf{s}$, данной формулой (20), мы проверили предполагаемое равенство (13) аналитически как ряд по q до q^{21} .

Происхождение формулы (20) может быть пояснено следующим образом.

Классический предел. Рассмотрим сначала ситуацию, когда $q = 1$, так что $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{h} = u, v, h \in \mathbb{C}$, где $h = H(u, v)$ дан формулой (6) с коммутативными u, v . Как хорошо известно [3], в этом случае вместо соотношения алгебры Вейля (2) имеет место классическая алгебра Пуассона $\{u, v\} = uv$.

Уравнения движения (например, для u) принимают вид

$$\frac{du}{dt} \equiv \dot{u} = \{h, u\}, \quad (21)$$

что может быть переписано после исключения v в виде

$$\dot{u}^2 = u^2(h - b_0 u - b_1 u^{-1})^2 - 4u^2(a_0 - c_0 u)(a_1 - c_1 u^{-1}). \quad (22)$$

Конечно же, правая часть уравнения (22) является дискриминантом уравнения $H(u, v) = h$ по v . Функция v в терминах u и $\dot{u}$ имеет вид

$$v = \frac{h - b_0 u - b_1 u^{-1} - \dot{u} u^{-1}}{2(a_0 - c_0 u)}. \quad (23)$$

Преобразование $u, v \mapsto u', v'$ (7) эквивалентно сдвигу¹⁾ $t \mapsto t + \tau$, где

$$\tau = \int_u^{u'} \frac{du}{\dot{u}}. \quad (24)$$

Пределы интегрирования — это фактически две точки на эллиптической кривой $H(u, v) = h$. Конечно же, τ не зависит от начальной и конечной точек на кривой. Существует один замечательно простой выбор начальной точки: $u = 0$, произведение uv конечно, $\dot{u} = u' = b_1$. После перемасштабирования $u = b_1 x$ это дает

$$\tau(h) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - hx + bx^2)^2 + 4x(1 - x)(a - cx)}}. \quad (25)$$

Определим “действие”

$$\mathcal{A}(h) = \int^h d\chi \tau(\chi). \quad (26)$$

Очевидно, определяя эту величину как “действие”, мы полагаем $\int du/\dot{u}$ “углом” в смысле переменных действие–угол. Нижний предел в (26) несуществен. Интегрирование по χ может быть выполнено, в результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(a, b, c; h) = \mathcal{A}(b, a, c; h) = \\ &= - \int_0^1 \frac{dx}{x} \ln \left(\frac{1 - hx + bx^2 + \sqrt{(1 - hx + bx^2)^2 + 4x(1 - x)(a - cx)}}{2} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

¹⁾Решение уравнений движения следующее. Определим $\sigma(x) = \theta_1(x)/\theta_1(x + \eta)$. Тогда в общем положении

$$\begin{aligned} v &= v(t) = \frac{\sigma(t - \alpha_2)}{\sigma(t - \alpha_3)}, & u &= u(t) = \frac{\sigma(t - \alpha_1)}{\sigma(t - \alpha_2)}, \\ a_0 &= - \frac{\sigma(\alpha_2 - \alpha_3)\sigma(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma(\alpha_3 - \alpha_2)\sigma(\alpha_1 - \alpha_3)}, & a_1 &= \frac{\sigma(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma(\alpha_1 - \alpha_3)}, \\ b_0 &= - \frac{\sigma(\alpha_2 - \alpha_3)\sigma(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma(\alpha_2 - \alpha_1)\sigma(\alpha_1 - \alpha_3)}, & b_1 &= \frac{\sigma(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sigma(\alpha_1 - \alpha_3)}, \\ c_0 &= - \frac{\sigma(\alpha_2 - \alpha_3)\sigma(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma(\alpha_3 - \alpha_1)\sigma(\alpha_1 - \alpha_3)}, & c_1 &= \frac{\sigma(\alpha_2 - \alpha_3)\sigma(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma(\alpha_1 - \alpha_3)^2}. \end{aligned}$$

Переменная t здесь пропорциональна переменной, используемой в (22). Периодичность решения объясняет термин “маятник”. Сдвиг по времени τ пропорционален $\alpha_1 - \alpha_3 + \eta$.

Чтобы установить симметрии $a \leftrightarrow b$, удобно репараметризовать кривую $H(u, v) = h$ следующим образом: пусть

$$u = b_1 x, \quad v = -\frac{(1-x)}{x(a_0 - c_0 b_1 x)} y^{-1}, \quad (28)$$

тогда

$$h = x^{-1} + y^{-1} - x^{-1} y^{-1} + bx + ay - cxy. \quad (29)$$

Формула (27) может быть переписана в очевидно симметричном виде:

$$\mathcal{A}(h) = \frac{\pi^2}{6} + \int_{\text{in}}^{\text{out}} \ln y \, d \ln x, \quad (30)$$

где $\text{in} = (x = 0, y = 1)$, $\text{out} = (x = 1, y = 0)$, а x и y связаны соотношением (29). Дополнительная константа

$$\frac{\pi^2}{6} = - \int_0^1 \frac{dx}{x} \ln(1-x).$$

Заметим, что интегралы вида (30) уже появлялись в работе [4].

Квантование. Вернемся теперь к квантовому случаю алгебры Вейля (2). Рассмотрим формальное представление (2) в виде

$$\mathbf{u}|x\rangle = |x\rangle x b_1, \quad \mathbf{v}|x\rangle = |qx\rangle \frac{-1}{x(a_0 - c_0 b_1 x)}. \quad (31)$$

В этом случае можно проверить, что

$$\mathbf{u}|0\rangle = 0, \quad \mathbf{v}\mathbf{u}|0\rangle = |0\rangle \left(-\frac{b_1}{a_0}\right), \quad (32)$$

равно как с помощью точного вида (8) получим

$$\mathbf{u}'|0\rangle = |0\rangle b_1. \quad (33)$$

Эти соотношения аналогичны формулам (28). Поскольку $\mathbf{u}' = \mathbf{s}\mathbf{u}\mathbf{s}^{-1}$, уравнение (33) означает $\mathbf{s}^{-1}|0\rangle = |1\rangle$. Если $\langle\psi_h|$ определено посредством $\langle\psi_h|\mathbf{s} = s(a, b, c; h)\langle\psi_h|$, тогда

$$s(a, b, c; h) = \frac{\langle\psi_h|0\rangle}{\langle\psi_h|1\rangle}.$$

Это выражение для s через $\langle\psi_h|x\rangle$ совпадает с (20), поскольку “уравнение Шредингера” для $\langle\psi_h|x\rangle \equiv \psi_h(x)$ есть

$$\langle\psi_h|(\mathbf{h}-h)|x\rangle = \psi_h(x)(1-h+bx^2) - \psi_h(qx) + \psi_h(q^{-1}x)q^{-1}x(1-x)(a-cq^{-1}x) = 0. \quad (34)$$

Матрица (15) возникает, если переписать (34) как одношаговую рекурсию. С другой стороны, формула (20) является подходящей дискретизацией формулы (27). В частности, таким образом может быть установлена асимптотика

$$s(a, b, c; h; 1) = \exp\{-\epsilon^{-1}\mathcal{A}(a, b, c; h) + O(\epsilon^0)\} \quad (35)$$

при $q = e^{-\epsilon}$, $\epsilon \rightarrow 0$.

Наш способ “вывести” $\mathbf{s} = s(\mathbf{h})$ в терминах волновой функции, конечно же, совершенно формален. Рассмотрения становятся обоснованными, если рассматривать пару уравнений Шредингера в рамках модулярного дубля (см. [5]). Из наших рассуждений следует, что модулярно дуализованный оператор $\mathbf{s}$, определенный как произведение пяти некомпактных дилогарифмов аналогично (5), равен некомпактной версии функции $s_{q, \tilde{q}}(a, b, c; h)$, которая есть отношение двух функций вида (18), первая из которых определена для параметра $q = e^{2\pi i \tau}$, а вторая – для модулярно дуализованного параметра $\tilde{q} = e^{-2\pi i / \tau}$.

Благодарности. Работа была частично поддержана грантами INTAS OPEN № 00-00055, RFBR № 01-01-00201, CGP CRDF № RM1-2334-MO-02.

Список литературы

- [1] *L. D. Faddeev, R. M. Kashaev.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 427–434.
- [2] *S. Sergeev.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5693–5714.
- [3] *V. V. Bazhanov, N. Yu. Reshetikhin.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 2217–2226.
- [4] *S. Sergeev.* An evidence for a phase transition in three dimensional lattice models. MPI Preprint № 139. Bonn: MPI, 2002.
- [5] *L. D. Faddeev.* Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 249–254; Modular double of quantum group. In: Conférence Moshé Flato 1999: Quantization, Deformation, and Symmetries. V. 1 (Dijon, France, September 5–8, 1999). Math. Phys. Stud. V.21. Eds. G. Dito et al. Dordrecht: Kluwer, 2000. P. 149–156.

Поступила в редакцию 18.XII.2002 г.