Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Буллоу, Н. М. Боголюбов, В. С. Капитонов, К. Л. Малышев, Й. Тимонен, А. В. Рыбин, Г. Г. Варзугин, М. Линдберг, Квантовые интегрируемые и неинтегрируемые модели, основанные на нелинейном уравнении Шредингера, для реализуемой конденсации Бозе–Эйнштейна в размерности $d + 1$ ($d = 1, 2, 3$), *ТМФ*, 2003, том 134, номер 1, 55–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 07:34:42

© 2003 г. Р. К. Буллоу*, Н. М. Боголюбов[†], В. С. Капитонов[‡],
К. Л. Малышев[†], Й. Тимонен[§], А. В. Рыбин[§],
Г. Г. Варзугин[¶], М. Линдберг^{||}

КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ И НЕИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА, ДЛЯ РЕАЛИЗУЕМОЙ КОНДЕНСАЦИИ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА В РАЗМЕРНОСТИ $d + 1$ ($d = 1, 2, 3$)

Вычислены корреляторы $\langle T_\tau \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \rangle$ в модели квантового нелинейного уравнения Шредингера (НШ) при конечной температуре для упорядоченных по тепловому времени τ бозе-полей $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^\dagger$ с хорошим приближением. Использовались новые методы функционального интегрирования в размерностях $d = 1, 2, 3$ для потенциалов ловушки $V(\mathbf{r}) \neq 0$. Как и при наличии трансляционной инвариантности, коррелятор асимптотически убывает пропорционально $R^{-1} \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{-1}$ к значениям конденсата с большим дальностью действия, что находится в согласии с экспериментальными наблюдениями только в случае $d = 3$; вообще говоря, имеются существенные поправки, определяемые присутствием ловушек и зависящие от $\mathbf{S} \equiv (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. При $d = 1$ воспроизведены точные трансляционно-инвариантные результаты при частотах ловушки $\Omega \rightarrow 0$. В случае с притяжением изучается временная зависимость c -числового уравнения Гросса–Питаевского (ГП) с ловушечным потенциалом для обобщенной нелинейности вида $-2c\psi|\psi|^{2n}$ при $c < 0$. При $n = 1$ стационарная форма уравнения ГП возникает в приближении метода перевала в функциональных интегралах. Показано, что коллапс в смысле Захарова может иметь место, когда $c < 0$, $nd \geq 2$ и функционал $E_{\text{НШ}}[\psi] \leq 0$, даже если $V(\mathbf{r}) \neq 0$. Сингулярности, как правило, возникают в виде δ -функций с центром в середине ловушки $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Ключевые слова: конденсация Бозе–Эйнштейна, метод функционального интеграла, квантовая модель нелинейного уравнения Шредингера, теория при конечной температуре, магнитные ловушки, двухточечные корреляции, функции когерентности.

*Department of Mathematics, UMIST, Manchester, UK

[†]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

[‡]Санкт-Петербургский технологический институт, Санкт-Петербург, Россия

[§]Department of Physics, University of Jyväskylä, Jyväskylä, Finland

[¶]Институт физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

^{||}Department of Physics, Åbo Akademi University, Åbo, Finland

1. ВВЕДЕНИЕ

Слабо взаимодействующий бозе-газ с отталкиванием можно моделировать с помощью квантового нелинейного уравнения Шредингера (НШ) с малой константой связи $c > 0$. Конденсация Бозе–Эйнштейна возникает при температурах $T \sim 100$ нК, и конденсаты можно удерживать в магнитных ловушках, моделируемых в виде параболоидных потенциалов $V(\mathbf{r})$, подобно обычным трансляционно-инвариантным квантовым моделям НШ. В недавней работе [1] дано исчерпывающее теоретическое описание конденсации Бозе–Эйнштейна (КБЭ) в парах металлов, удерживаемых в магнитных ловушках при конечных, но очень низких температурах в состоянии равновесия в пространственной размерности $d = 1, 2$ и 3 ($(d + 1)$ -мерие). Принятая модель представляла собой случай с отталкиванием квантового уравнения НШ. При $d = 1$ и при наличии трансляционной инвариантности эта квантовая модель является *квантово интегрируемой*, т. е. можно найти достаточное количество взаимно коммутирующих операторов, также коммутирующих с гамильтоновым оператором $\hat{H}$. Поскольку число квантовых степеней свободы бесконечно (квантовое уравнение НШ представляет собой $(1 + 1)$ -мерную теорию поля), число таких постоянных операторов также должно быть бесконечно. Эти операторы коммутируют относительно скобки Ли $[\cdot, \cdot]$, а потому мы здесь обращаемся к квантовому аналогу теорем Лиувилля–Арнольда для классических полностью интегрируемых гамильтоновых систем, которые составляют интегрируемые классические полевые теории и для которых должно существовать бесконечное число констант, взаимно коммутирующих относительно скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$. Заметим, однако, что несмотря на лежащие в основе уравнения Янга–Бакстера [2], [3], по-видимому, не существует явного *доказательства* теорем Лиувилля–Арнольда для бесконечного числа степеней свободы; то же справедливо и для квантовых теорий и квантовой интегрируемости, где результаты Арнольда о движениях, диффеоморфных тору [4], не могут быть непосредственно применены.

Хорошо известно, что квантовые модели НШ, как отталкивающие, так и притягивающие, не являются квантово интегрируемыми в размерностях $d = 2$ и 3 (классически интегрируемые модели НШ возникают только при $d = 1$). В работе [1] и в настоящей работе показано, что только при $d = 3$ имеется истинный бозе-конденсат, и поэтому случай $d = 3$, возможно, является наиболее важным и интересным¹⁾. Короче говоря, привычные методы теории интегрируемых систем должны быть заменены на малоизвестные методы функционального интегрирования, в которых интегрирование по всем путям в фазовом пространстве, каждый с подходящим весом e^S , где S – *классическое* действие, должным образом порождает квантовую (статистическую) механику. Это уже было явно проделано в работе [3] для широкого класса интегрируемых моделей в размерности $1 + 1$ с помощью вычисления их свободных энергий методами функционального интегрирования. Однако при $d = 2, 3$ требуется существенно иной подход (на основе функциональных интегралов), который был приведен в работе [1] и является предметом рас-

¹⁾ Результаты, представленные в настоящей работе, в значительной степени основываются на реальной физике: действительно, при $d = 3$ мы получаем результаты, согласующиеся с экспериментальными наблюдениями, опубликованными в работе [5].

смотрения первых трех разделов настоящей работы.

Все модели НШ включают как отталкивающие, так и притягивающие случаи, отвечающие $c > 0$ или $c < 0$, соответственно, для вещественнозначной константы взаимодействия c . В отличие от предыдущих разделов, посвященных отталкивающим системам НШ, в разделе 5 мы рассматриваем притягивающие случаи $c < 0$ для размерностей $d = 3, 2, 1$. Здесь мы работаем с c -числовой (т.е. “классической” в смысле Дирака) так называемой моделью Гросса–Питаевского (ГП), которая в данном случае имеет вид

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - 2c\psi^* \psi^2 - V(\mathbf{r})\psi = 0, \quad (1)$$

где $c < 0$ и используется система единиц, в которой $\hbar = 1$, $m = 1/2$; ψ^* удовлетворяет уравнению, сопряженному с уравнением (1), а $\mathbf{r}$ – вектор в $\mathbb{R}^d$. Потенциал $V(\mathbf{r})$ – это потенциальная функция, представляющая, в частности, параболоидный потенциал магнитной ловушки, используемый в настоящее время во всех КБЭ-экспериментах. Система (1) является (классически) интегрируемой тогда и только тогда, когда $d = 1$ ((1 + 1)-мерный случай) и $V(\mathbf{r}) \equiv 0$. Однако можно применить подход, использованный в работах [6], [7] при $V \equiv 0$, к случаю $V \not\equiv 0$. Это проделано в разделе 5 и в работе [8]. Основной результат здесь заключается в том, что “коллапс” все еще имеет место при $d \geq 2$, т.е. система эволюционирует к сингулярности за конечное время при начальных данных общего положения. Оказывается, что особенности в центре ловушки, как правило, имеют вид δ -функции.

2. ТЕОРИЯ ТЕПЛОВОГО РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КВАНТОВЫХ МОДЕЛЕЙ НШ. СЛУЧАЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КОНСТАНТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Будем рассматривать только случай теплового равновесия. “Температурные корреляторы”

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \langle T_\tau \hat{\psi}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle \quad (2)$$

вычислены в работе [1] для $d = 1, 2, 3$. Поля $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^\dagger$ – квантовые бозе-поля, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2, t)] = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad [\hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}_2, t)] = [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2, t)] = 0$$

при совпадающих временах t , τ – *тепловое время*, $t \rightarrow -i\tau$ (виковски повернутое время [3]), а T_τ означает *упорядочение* по τ . Очевидно, $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ является температурной функцией Грина [3], и ее явные аргументы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ подчеркивают, что *когерентная часть* G зависит только от $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и не зависит от τ_1, τ_2 . (Однако для температур $T > 0$ имеется некогерентная температурная часть G , которая зависит от T (см. ниже).)

В основе нашего рассмотрения лежит квантовая модель НШ с отталкиванием, которая при $c > 0$ описывается уравнением

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\psi} + 2c\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi} + V(\mathbf{r})\hat{\psi} \quad (3)$$

и сопряженным ему. Квантовые поля $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ удовлетворяют приведенным выше коммутационным соотношениям для бозе-полей, а уравнение (3) и сопряженное к нему берутся в “нормальном порядке” (функции $\hat{\psi}^\dagger$ слева от функций $\hat{\psi}$). Уравнение (3) можно рассматривать как уравнение движения Гайзенберга с гамильтонианом

$$\hat{H} \equiv \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger \cdot \nabla \hat{\psi} + \hat{\psi}^\dagger V(\mathbf{r}) \hat{\psi} + c \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi} \right] d^d r. \quad (4)$$

Отметим, что в этом гамильтоновом операторе $\hat{H}$ появляется ловушечный потенциал $V(\mathbf{r})$.

Пионерские эксперименты были проведены в 1995 г. на впервые полученной КБЭ для паров металлов ^{87}Rb [9] и ^{23}Na [10]. Каждый из этих паров имеет положительную длину рассеяния a , и при $c \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$ обе системы являются отталкивающими. Процедура эксперимента состояла в том, чтобы охладить металлы до температуры порядка нескольких мК с использованием магнито-оптических ловушек, а затем выкипятить пары, удерживаемые в чисто магнитных ловушках (испарительное охлаждение), для достижения температуры порядка десятков или сотен нК, при которых действительно имеет место КБЭ. Эрик Корнелл, Карл Р. Виман [9] и Волфганг Кеттерле [10] получили Нобелевскую премию по физике в 2001 г. за эти впечатляющие эксперименты. В 1998 г. второй группой исследователей из Массачусетского технологического института (Д. Г. Фрид и др.) был, наконец, получен бозе-конденсат для атомарного водорода ($a > 0$) [10]. В разделе 5 мы показываем, что в случае притяжения ($c < 0$) в модели с гамильтонианом (4) возникают неустойчивости при $d \geq 2$. Эксперименты для паров ^7Li , проведенные в 1995 г. (при $a < 0$ и $c < 0$), были неоднозначными [11], однако недавние эксперименты для “настроенных” паров ^{85}Rb при $d = 3$ (a “настраивается” так, чтобы отталкивание сменилось притяжением, $a > 0 \rightarrow a < 0$) показали наличие взрывной неустойчивости [12], которую в дальнейшем удастся контролировать [13].

С квантовым уравнением НШ (3) и *конечными температурами* связано классическое действие

$$S \equiv \int_0^\beta d\tau \int d^d r \left\{ \bar{\psi} K \psi - \frac{1}{2} g \bar{\psi} \bar{\psi} \psi \psi \right\}, \quad (5)$$

где $K = \partial_\tau - H$, $H = -\hbar^2/(2m)\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu$, $g = 2c$ и μ — химический потенциал; отметим виновское вращение к тепловому времени τ . Поля $\psi, \bar{\psi}$ — комплекснозначные c -числовые поля в смысле Дирака, они являются двумя *независимыми* полями, не обязательно сопряженными друг другу. Исходя из этой точки зрения, мы можем записать $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в виде отношения двух функциональных интегралов:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = Z^{-1} \int e^S \psi(\mathbf{r}_1, \tau_1) \bar{\psi}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (6)$$

где

$$Z = \int e^S \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \quad (7)$$

представляет собой статсумму. Статсумма Z дает свободную энергию Гельмгольца F согласно правилу $F = -\beta^{-1} \ln Z$, где β — *обратная температура*, $\beta^{-1} = k_B T$.

Заметим, что в выражении для действия S тепловое время τ удовлетворяет условию $0 < \tau < \beta$. Такое предписание для S является в точности достаточным для *равновесной* статистической механики [3]. Однако всякая динамика, состоящая в эволюции по вещественному времени t и приводящая к такому состоянию равновесия, при этом исключается (в разделе 5, где используется уравнение (1), наоборот, мы имеем дело с вещественным временем t).

Меры $\mathcal{D}\psi$ и $\mathcal{D}\bar{\psi}$ в (6) и (7) — это меры функционального интегрирования, грубо говоря, по всем путям, параметризованным с помощью $(\mathbf{r}_1, \tau_1)$ и $(\mathbf{r}_2, \tau_2)$ на подходящем фазовом пространстве. При $d = 1$ выражение (7) было изучено для всех интегрируемых моделей в работах [3], [14], при этом 14 интегрируемых моделей были точно решены относительно соответствующих свободных энергий F . Вычисленные свободные энергии относятся к *классическим* моделям НШ с притяжением и к коллапсу бризер-подобных квантовых солитонов при $c < 0$ в фонон-подобные (плоско-волновые) решения при больших значениях T . Идея, на которой основаны работы [3], [14] как для квантовой, так и для классической статистической механики при $d = 1$, состояла в том, чтобы использовать каноническое преобразование в фазовом пространстве, где классические поля играют роль координат, к соответствующим переменным действие — угол; функциональные интегралы далее брались по этим переменным. Более того, было показано, что так называемые термодинамические пределы (взяты при *конечной плотности*) могли быть достигнуты с помощью *периодических граничных условий* на поля, подобные ψ и $\bar{\psi}$, где в случае $d = 1$ периоды $L \rightarrow \infty$, так что для N частиц $N/L \rightarrow \bar{n} > 0$ при $N, L \rightarrow \infty$. Это требование приводило к условию на проводимые интегрирования, которое можно наложить на классическом или квантовом уровне. В работе [3] квантовые свободные энергии были получены с использованием дополнительных связей (“квантовые связи” [3]). Этот подход можно использовать именно (и только) в случае *интегрируемых* моделей, причем интегрируемость определена здесь как “полная гамильтонова интегрируемость” в смысле Лиувилля–Арнольда, как описано в разделе 1. К сожалению, классические модели НШ полностью интегрируемы только для $d = 1$, но не для $d = 2, 3$ (результат, принадлежащий Захарову). Даже при $d = 1$ необходимо, чтобы величина

$$P = -\frac{i}{2} \int dx [\psi^* \partial_x \psi - (\partial_x \psi^*) \psi]$$

действительно была константой для соответствующей c -числовой системы НШ (при $c > 0$)

$$-i\partial_t \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2c\psi^* \psi^2. \quad (8)$$

Однако добавление в правую часть отвечающего ловушке члена $-V(x)\psi$ нарушает трансляционную инвариантность. В этом случае P не является постоянной уравнения движения (8).

При $d = 1$ и $V(x) \equiv 0$ для одномерной решетки с помощью методов конформной теории поля были вычислены квантовые корреляторы, подобные $G(x_1, x_2)$ [15]: при $T > 0$

было получено экспоненциальное убывание по $|x_1 - x_2|$, которое становится алгебраическим при $T = 0$, указывая на фазовый переход (для $(d = 1)$ -системы) при данном значении температуры. Конформная теория поля дает результаты для таких корреляторов, которые являются точными в скейлинговом пределе; однако по Славнову [16] результаты для $d = 1$ в случае трансляционной инвариантности в действительности являются *точными*. Методы, использованные для получения точных решений при $d = 1$, включают анализ последовательности задач Римана–Гильберта [17]. Соответствующая XXO -модель решена таким способом в работе [18]. XXO -модель эквивалентна XY -модели со спином $-1/2$ в умеренном поперечном магнитном поле. XY -модель рассматривается в контексте моделей бозе-газа с отталкиванием в работе [15]. Относящиеся к этим вопросам и к квантовым моделям НШ с отталкиванием результаты можно найти в работе [19].

Потенциал $V(\mathbf{r})$, описывающий магнитную ловушку в экспериментах, хорошо моделируется *гармоническим* потенциалом

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m[\Omega_1^2 r_1^2 + \Omega_2^2 r_2^2 + \Omega_3^2 r_3^2], \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3), \quad (9)$$

при $d = 3$ и аналогичными выражениями для $d = 2, 1$ (при этом $\Omega_i/(2\pi) \sim 10$ или 100 Гц). Тем самым в теорию вводится квантовый гармонический осциллятор и возникают естественные граничные условия на $\psi, \bar{\psi}$ вида $\psi(\mathbf{r}, \tau), \bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, что не соответствует термодинамическому пределу при конечной плотности. Хорошо известно, что функции $\psi, \bar{\psi}$ являются *периодическими* по обратной температуре β : это происходит, поскольку статсумма Z представляет собой *след* по траекториям в фазовом пространстве, начинающимся и заканчивающимся в одной и той же точке [3]. Выбор естественных граничных условий $\psi, \bar{\psi} \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ производится при “нулевой плотности” и, с технической точки зрения, вводит полностью новую термодинамику. Дело в том, что условие конечной плотности, достигаемое при периодических граничных условиях, обеспечивает экстенсивное свойство (скейлинговое поведение такое же, как для объема) для такой термодинамики (см., например, [3] для $d = 1$).

Одна из характерных особенностей наших результатов для корреляторов $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ состоит в том, что они явно зависят от присутствия ловушки и, таким образом, от нарушения трансляционной инвариантности. К сожалению, это свойство еще предстоит обнаружить в экспериментах [1], [5]. Требуется некоторое изменение в геометрии ловушки по сравнению с используемой в экспериментах [5], которое может подчеркнуть значение параметра $S = |\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|/2$, появляющегося ниже в разделе 4. Статус новой термодинамики, неявно введенной в данном разделе с помощью нулевых граничных условий на бесконечности, является в этом отношении неоднозначным.

3. ОЦЕНКА СТАТСУММЫ Z : ТЕРМОДИНАМИКА КБЭ С ОТТАЛКИВАНИЕМ И УРАВНЕНИЕ ГП; БОЗЕ-КОНДЕНСАТЫ И ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Модель бозе-газа, примером которой является квантовая модель НШ, была предложена в работах [20], [21]. В частности, было показано, что дисперсионное соотноше-

ние для свободных бозонов с массой m модифицируется в модели слабо связанного бозе-газа (c мало, $c > 0$) к дисперсионному соотношению, линейному по импульсу p , откуда было выведено [21] сверхтекучее поведение, по-видимому, имеющее место для ^4He при температурах $\lesssim 2.2\text{ К}$. ^4He в жидком состоянии оказался сложной системой, а системы ^{87}Rb и ^{23}Na при значительно более низких температурах представляются значительно более простыми. В частности, они хорошо описываются с помощью c -числового уравнения ГП для одночастичной волновой функции ψ и сопряженной ей ψ^* , которые в присутствии ловушечного потенциала $V(\mathbf{r})$ определяются уравнением (1) и комплексно-сопряженным к нему. Эта система является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \int d^d r \left\{ -\psi^* \nabla^2 \psi + \psi^* V(\mathbf{r}) \psi + \frac{1}{2} g (\psi^*)^2 (\psi)^2 \right\} \quad (10)$$

и скобкой $\{\psi(\mathbf{r}, t), \psi^*(\mathbf{r}', t)\} = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$; $g = 2c$.

Выведем стационарную, не зависящую от времени, форму ГП уравнения (1), используя метод перевала в функциональном интеграле (7). Существенный элемент этой схемы принадлежит Н. Н. Боголюбову: он предположил выразить $\psi(\bar{\psi})$ при температурах ниже критической, $T < T_c$, как $\psi(\mathbf{r}, \tau) = \psi_0(\mathbf{r}) + \psi_1(\mathbf{r}, \tau)$ ($\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + \bar{\psi}_1$); $\psi_0(\mathbf{r})$ не зависит от τ и является полем “нулевой температуры”, а ψ_1 выражает тепловые возбуждения (в равновесии). Основная масса соответствующих частиц (бозонов массы m) “попадают” в $\psi_0(\mathbf{r})$, а заполняемость, представленная функцией $\psi_1(\mathbf{r}, \tau)$, относительно мала. Поэтому можно рассмотреть слагаемые в классическом действии (5), являющиеся не более чем квадратичными (билинейными) по ψ_1 и $\bar{\psi}_1$. Это позволяет явно взять (гауссовы) функциональные интегралы по ψ_1 и $\bar{\psi}_1$. Меры являются мультипликативными, $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}\bar{\psi}_0 \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_1$, так что мы получаем

$$S_{\text{eff}}[\psi_0, \bar{\psi}_0] = \ln \left\{ \int e^S \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_1 \right\},$$

где

$$S_{\text{eff}}[\psi_0, \bar{\psi}_0] + \beta F_{\text{nc}}(\mu) \equiv \beta \int d^d r \left\{ \bar{\psi}_0 \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu - \tilde{V} \right] \psi_0 - \frac{1}{2} g \bar{\psi}_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 \psi_0 \right\}. \quad (11)$$

Здесь

$$F_{\text{nc}}(\mu) = \bar{F}_{\text{nc}}(\mu) - 2 \int d^d r \rho_{\text{nc}}(\mathbf{r}) \Lambda(\mathbf{r}) \quad (12)$$

— свободная энергия тепловых частиц, а

$$\bar{F}_{\text{nc}}(\mu) = \beta^{-1} \sum_n \ln(1 - e^{-\beta E_n})$$

— свободная энергия идеального газа тепловых частиц, причем значения E_n оказываются собственными энергиями гамильтониана $H = -\hbar^2/(2m)\nabla^2 + |V(\mathbf{r}) - \mu|$ (см. [1]). Величина $\rho_{\text{nc}}(\mathbf{r})$ есть (равновесный) профиль плотности тепловых частиц, причем $\tilde{V}(\mathbf{r}) =$

$V(\mathbf{r}) + 2g\rho_{\text{nc}}(\mathbf{r})$ в выражении для S_{eff} ; этот профиль плотности выводится из функции Грина $G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau')$, удовлетворяющей уравнению

$$[K - \Lambda(\mathbf{r})]G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(\tau - \tau') \quad (13)$$

при $\rho_{\text{nc}}(\mathbf{r}) \equiv G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}, \tau)$. Здесь $\Lambda(\mathbf{r}) \equiv (\mu - V(\mathbf{r}))\Theta(\mu - V(\mathbf{r}))$, где Θ – единичная ступенчатая функция.

Важный результат, полученный к данному моменту, состоит в том, что свободная энергия бозе-газа с ловушечным потенциалом принимает вид

$$F(\mu) = -\beta^{-1} \ln \left\{ \int e^{S_{\text{eff}}[\psi_0, \bar{\psi}_0]} \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}\bar{\psi}_0 \right\}. \quad (14)$$

Тогда в приближении метода перевала для больших значений параметра β (т.е. при очень низких температурах)

$$F(\mu) = F_{\text{nc}}(\mu) - \frac{1}{2}g \int d^d r [\Phi(\mathbf{r})]^2 [\bar{\Phi}(\mathbf{r})]^2. \quad (15)$$

Новые поля $\Phi(\mathbf{r})$ и $\bar{\Phi}(\mathbf{r})$, не зависящие от τ , возникают как квазиклассические поля, удовлетворяющие условиям экстремума $\delta(S_{\text{eff}}[\Phi, \bar{\Phi}]) = 0$, а именно

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) - \tilde{V}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) - g\bar{\Phi}(\mathbf{r})\Phi^2(\mathbf{r}) = -\mu\Phi(\mathbf{r}) \quad (16)$$

и аналогично для $\bar{\Phi}(\mathbf{r})$. Это и есть ожидаемые стационарные уравнения ГП, за исключением того обстоятельства, что в результате замены $V(\mathbf{r})$ на $\tilde{V}(\mathbf{r})$ возникают так называемые поправки Хартри–Фока–Боголюбова (ХФБ) (см. [22]). Ниже будет показано, что Φ , $\bar{\Phi}$ являются комплексно-сопряженными полями. В этом случае выражение (15) содержит слагаемое $-(g/2) \int d^d r |\Phi(\mathbf{r})|^4$, и при $g < 0$ (случай притяжения, для которого используются те же аргументы; см. раздел 5) $F(\mu)$ может редуцироваться в виде *коллапса* модуля $|\Phi(\mathbf{r})|^2$ волновой функции ГП [8]: этот результат, по-видимому, согласуется с наблюдениями для ^{85}Rb , при “настройке” на случай притяжения [12], когда система прежде всего взрывается (при $d = 3$), как было отмечено выше.

Определим равновесную плотность конденсата $\rho_0(\mathbf{r})$ как

$$\rho_0(\mathbf{r}) \equiv \Phi_0(\mathbf{r})\bar{\Phi}_0(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где Φ_0 , $\bar{\Phi}_0$ удовлетворяют уравнению ГП (16); тогда при $\bar{\Phi}_0 \equiv \Phi_0^*$ это выражение принимает вид $\rho_0(\mathbf{r}) = |\Phi_0(\mathbf{r})|^2$. При больших m (так называемая аппроксимация Томаса–Ферми, состоящая в отбрасывании производных) можно решить уравнение ГП (16) и соответствующее выражение по $\bar{\Phi}$, тогда находим

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{g}(\mu - \tilde{V}(\mathbf{r}))\Theta(\mu - \tilde{V}(\mathbf{r})). \quad (18)$$

Эта плотность конденсата обращается в нуль вне компактной области, определяемой векторами $\mathbf{r} = \mathbf{R}_c$, где все векторы $\mathbf{R}_c$ удовлетворяют соотношению $\mu - \tilde{V}(\mathbf{R}_c) = 0$. Если заменить $\rho_{nc}(\mathbf{r})$ на $\rho_{nc}(\mathbf{0})$, что соответствует центру ловушки $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, получим

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{g}(\mu - 2g\rho_{nc}(\mathbf{0}) - V(\mathbf{r})) \quad (19)$$

при обрезании на векторах $\mathbf{r} = \mathbf{R}_c$. Следовательно, такая плотность конденсата является, по существу, взятым со знаком минус потенциалом ловушки, $-V(\mathbf{r})$. Именно такая плотность наблюдалась (отрицательный параболоид) и заведомо не являлась произведением гауссовых функций $|\psi|^2$, где ψ — основное состояние волновой функции гармонического потенциала (см. уравнение (9) в работе [22]).

Заметим, что из (19) следует, что $\rho_0(\mathbf{r})$ обращается в нуль везде, где $V(\mathbf{r}) \equiv 0$ и $\mu - 2g\rho_{nc}(\mathbf{0}) = 0$. Однако можно рассматривать величину $\mu - 2g\rho_{nc}(\mathbf{0}) \equiv \Lambda(\mathbf{0})$ как перенормированный химический потенциал μ , так что условие $\Lambda(\mathbf{0}) = 0$ является условием фазового перехода при $T = T_c$. При $d = 3$ находим

$$\rho_{nc}(\mathbf{0}) \cong N_1 V^{-1} = V^{-1} \zeta(3) [(\beta\hbar)^3 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3]^{-1}, \quad (20)$$

где $N_1 = \zeta(3) [(\beta\hbar)^3 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3]^{-1}$ — полное число *тепловых* частиц, V приближенно равно объему ловушки, $\zeta(x)$ — дзета-функция, а $N_1 = N$ — полное число частиц при $T = T_c$. Таким образом, для сферических ловушек $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega$ и $d = 3$, и мы получаем выражение для T_c

$$k_B T_c = \left[\frac{N}{\zeta(3)} \right]^{1/3} \hbar \Omega + O(g). \quad (21)$$

Имеется аналогичное выражение, содержащее $\zeta(2)$, для $d = 2$. Оба эти выражения согласуются с выражениями, полученными в работе [22] для идеального бозе-газа (поправку $O(g)$ в уравнении (21) можно вычислить). Тем не менее, как будет показано ниже, истинный конденсат имеется только при $d = 3$. Для $N = 10^6$ и $\Omega = 2\pi \times 10$ Гц уравнение (21) при $d = 3$ дает значение $T_c \cong 60$ нК.

4. КОГЕРЕНТНОСТЬ И КОРРЕЛЯЦИЯ В ЛОВУШКАХ

От вычисления статсуммы Z и соответствующей свободной энергии, проведенного в разделе 3, мы должны перейти к вычислению коррелятора (температурной функции Грина) $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, заданной в (6). При $T > T_c$ этот коррелятор легко находится путем определения функции Грина $G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau')$ из уравнения (13), где $\Lambda(\mathbf{r}) \equiv 0$ и в гамильтониане H убраны модули; это приводит к гауссову убыванию корреляций для всех d : для $d = 3$ гауссово убывание согласуется с экспериментальными результатами, приведенными на рис. 4 в работе [5]. При $T < T_c$ это сделать гораздо сложнее.

Заменяя $\psi(\mathbf{r}_1, \tau_1)\bar{\psi}(\mathbf{r}_2, \tau_2)$ на $\psi_0(\mathbf{r}_1)\bar{\psi}_0(\mathbf{r}_2)$ и интегрируя по тепловым флуктуациям, учитываемым до квадратичных (билинейных) слагаемых по $\psi_1, \bar{\psi}_1$, находим когерентную часть G :

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \frac{\int e^{S_{\text{eff}}[\psi_0, \bar{\psi}_0]} \psi_0(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_0(\mathbf{r}_2) \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}\bar{\psi}_0}{\int e^{S_{\text{eff}}[\psi_0, \bar{\psi}_0]} \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}\bar{\psi}_0}. \quad (22)$$

Как видно, мы пренебрегли некогерентной частью

$$\bar{G}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) \equiv Z^{-1} \int e^{S[\psi, \bar{\psi}]} \psi_1(\mathbf{r}_1, \tau_1) \bar{\psi}_1(\mathbf{r}_2, \tau_2) \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (23)$$

но кросс-члены, включающие, например, $\psi_0(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_1(\mathbf{r}_2, \tau_2)$, обращаются в нуль. Функциональный интеграл (23) (статсумма Z уже была вычислена в разделе 3) определяет дополнительную температурную и некогерентную часть для $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, которая зависит от температуры β^{-1} (и должна обращаться в нуль при $\beta^{-1} \rightarrow 0$). При $T = T_c$ можно ожидать, что $\bar{G}$ (23) гладко переходит в функцию Грина свободной частицы $G(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2)$.

Числитель в правой части формулы (22) вычисляется в приближении метода перевала, если действовать, как и в разделе 3, в соответствии с подходом ХФБ. Тогда $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ принимает вид

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \exp\{-S_{\text{eff}}[\Phi_0, \bar{\Phi}_0] + S_{\text{eff}}[\Phi_1, \bar{\Phi}_1] + \ln[\Phi_1(\mathbf{r}_1) \bar{\Phi}_1(\mathbf{r}_2)]\}. \quad (24)$$

Поля Φ_0 и $\bar{\Phi}_0$ определены уравнениями ГП (16) и являются сопряженными, однако дополнительные новые поля Φ_1 и $\bar{\Phi}_1$ удовлетворяют соотношению

$$\delta(S_{\text{eff}}[\Phi_1, \bar{\Phi}_1] + \ln[\Phi_1(\mathbf{r}_1) \bar{\Phi}_1(\mathbf{r}_2)]) = 0,$$

из которого следуют новые стационарные уравнения ГП с δ -функциональным источником:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi_1 - (\mu - \tilde{V}(\mathbf{r})) \Phi_1 + g \Phi_1^2 \bar{\Phi}_1 &= \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{\beta \bar{\Phi}_1(\mathbf{r}_2)}, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \bar{\Phi}_1 - (\mu - \tilde{V}(\mathbf{r})) \bar{\Phi}_1 + g \bar{\Phi}_1^2 \Phi_1 &= \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{\beta \Phi_1(\mathbf{r}_1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Поля Φ_1 и $\bar{\Phi}_1$ являются, вообще говоря, комплекснозначными и независимыми с независимыми вариациями; можно выбрать для их решения анзацы $\Phi_1(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{\phi(\mathbf{r})}$, $\bar{\Phi}_1(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{-\phi(\mathbf{r})}$, где новая функция $\rho(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ и $\phi(\mathbf{r})$ является комплекснозначной, но содержит вещественные вклады. Такой подход мотивирован тем, что в трансляционно-инвариантном случае $\Phi_1(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\phi(\mathbf{r})}$, где $\phi \in \mathbb{R}$, а $\bar{\Phi}$ дается комплексно-сопряженным выражением (по поводу такого выбора см., например, уравнения (18.4) в [23] для $\psi_0(\mathbf{r}, \tau)$ и $\bar{\psi}_0(\mathbf{r}, \tau)$, относящиеся к асимптотическому вычислению континуального интеграла в трансляционно-инвариантном случае: $\rho(\mathbf{r})$ медленно меняется, а фаза $\phi(\mathbf{r})$ определяет поле скоростей как $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) = m^{-1} \nabla \phi(\mathbf{x}, \tau)$ в гидродинамическом описании, см. уравнение (19.2) в [23]). В нашем случае мы предполагаем, что вне границ, налагаемых ловушкой, $\rho(\mathbf{r})$ действительно является медленно меняющейся, так что величина $\nabla^2 \sqrt{\rho(\mathbf{r})}$ мала и ею можно пренебречь; однако это неверно для $(\nabla \phi)^2$, так что уравнения (25) можно использовать вместе в согласованном порядке как

$$g\rho(\mathbf{r}) - (\mu - \tilde{V}(\mathbf{r})) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})) = (2\beta)^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - (2\beta)^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (27)$$

Уравнение (26) имеет решение

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2$$

при аппроксимации Томаса–Ферми уравнения (18), так что плотность конденсата $\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho_0(\mathbf{r})$. Не пытаясь точно решить уравнение (27) (мы решаем его точно только для $d = 1$ [24]), заметим, что в глубине конденсата ($|\mathbf{r}|/|\mathbf{R}_c| \ll 1$ для $d = 3$) величина $\nabla\rho(\mathbf{r})$ мала и ею можно пренебречь, так что задача сводится к решению уравнения Лапласа (уравнения Пуассона) с двумя δ -функциональными источниками. Полагая, что решение имеет вид $\phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$, находим

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\nu}{2\pi\beta\rho_0(\mathbf{S})} \frac{1}{R}, \quad d = 3, \quad (28)$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\nu}{\pi\beta\rho_0(\mathbf{S})} \ln\left(\frac{R}{\lambda_T}\right), \quad d = 2, \quad (29)$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\nu}{\beta\rho_0(\mathbf{S})} R, \quad d = 1, \quad (30)$$

где $\nu \equiv m/(2\hbar^2)$, $2\mathbf{S} = \mathbf{r} + \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\lambda_T = \hbar\beta v$ – “температурная длина”, $v = \sqrt{g\rho_0(0)/m}$ – скорость звука в центре конденсата. Заметим, что для каждого $d = 3, 2$ и 1 корреляционные функции, полученные из функций f , определяемых уравнениями (28), (29), (30), соответственно, могут не зависеть от $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, кроме случая трансляционной инвариантности [25]: они зависят также от координат “центра масс” $\mathbf{S}$. Этот результат, конечно, не противоречит нарушению трансляционной инвариантности, индуцированному потенциалом ловушки, и может привести к новым наблюдаемым последствиям (однако этого не наблюдалось в работе [5], см. ниже).

Для $d = 3, 2$ уравнения (28) и (29) показывают, что точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ являются сингулярными. В любом случае нам требуется определить так называемые *параметры порядка* $\langle\psi(\mathbf{r}, \tau)\rangle$ и $\langle\bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau)\rangle$; как функциональные интегралы, они, очевидно, должны иметь вид

$$\langle\psi(\mathbf{r}, \tau)\rangle = Z^{-1} \int e^S \psi(\mathbf{r}, \tau) \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = Z^{-1} \int e^S \psi_0(\mathbf{r}) \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}. \quad (31)$$

При этом $\langle\psi(\mathbf{r}, \tau)\rangle = \langle\psi_0(\mathbf{r}, \tau)\rangle$, поскольку $\langle\psi_1(\mathbf{r}, \tau)\rangle$ обращается в нуль. Аналогично вычисляется и параметр $\langle\bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau)\rangle$. Отсюда мы находим, что *функция когерентности первого порядка* $G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, определяемая как

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \frac{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\langle\psi_0(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\bar{\psi}_0(\mathbf{r}_2)\rangle}, \quad (32)$$

где $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ представляет собой аппроксимированную когерентную часть функции (22), является хорошо определенной, поскольку одни и те же особенности возникают в числителе и в знаменателе. При $d = 3$ (и $d = 2$) из уравнения (27) можно получить, что при $0 < T < T_c$

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \Phi_1(\mathbf{r}_1)\bar{\Phi}(\mathbf{r}_2) \exp\left(\frac{1}{2}\beta g \int (\rho^2(\mathbf{r}) - \rho_0^2(\mathbf{r})) d^3r\right) \quad (33)$$

и, следовательно,

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \exp \left\{ -\frac{1}{2} (f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)) \right\}. \quad (34)$$

При $d = 3$ из уравнения (28) следует, что

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp \left(\frac{\nu}{2\pi\beta} \frac{1}{\rho_0(\mathbf{S})R} \right), \quad (35)$$

так что *асимптотическое* по R^{-1} выражение имеет вид

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \sim 1 + \frac{\nu}{2\pi\beta} \frac{1}{\rho_0(\mathbf{S})R}. \quad (36)$$

Мы подтверждаем это асимптотическое поведение ниже.

Впечатляющий результат, полученный Боголюбовым в 1963 г. [25], состоял в том, что при условии трансляционной инвариантности *флуктуации*

$$\langle \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') \rangle - \langle \psi^\dagger(\mathbf{r}) \rangle \langle \psi(\mathbf{r}') \rangle, \quad (37)$$

будучи фурье-преобразованными по $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ в пространство импульсов $\mathbf{k}$, асимптотически ведут себя как k^{-2} . Отсюда было получено, что обратное преобразование Фурье существует тогда и только тогда, когда $d = 3$, и сделан вывод, что имеется бозе-конденсат с постоянной плотностью ρ_0 тогда и только тогда, когда $d = 3$. Постоянная ρ_0 отвечает дальнодействию; а поскольку выражение (37) пропорционально k^{-2} , коррелятор убывает как R^{-1} к постоянному значению ρ_0 (исходя из наших результатов, следует ожидать, что $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle = \sqrt{\rho_0} e^{i\delta}$, $\langle \psi^\dagger(\mathbf{r}) \rangle = \sqrt{\rho_0} e^{-i\delta}$ при условии трансляционной инвариантности, где δ не зависит от $\mathbf{r}$, как и ρ_0). Таким образом, при $d = 3$ и при условии трансляционной инвариантности $G^{(1)} \sim 1$. Такое же поведение имеет место для выражения (37) при $d = 3$, а потому “дальнодействующая” когерентность имеется даже в присутствии ловушки. Аналогичные аргументы показывают, что все функции когерентности $G^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{2n-1}, \mathbf{r}_{2n})$, очевидным образом определяемые при $n = 2, 3, \dots$, также асимптотически равны единице при достаточно больших расстояниях $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, так что система (как и в трансляционно-инвариантном случае) является асимптотически полностью когерентной.

В проведенных экспериментах [5] *измерялась* функция $G^{(1)}$ для вытянутой ловушки ($\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_\perp = 2\pi \times 140$ Гц, $\Omega_3 = \omega_{\text{ax}} = 2\pi \times 13$ Гц). Данные анализировались в терминах единой координаты z вдоль длинной оси ловушки, но как показал Боголюбов, протяженный конденсат не может быть одномерным. Тем не менее в этих экспериментах, судя по всему, наблюдалось R^{-1} -убывание флуктуаций (см. кривую, спадающую как R^{-1} , полученную подгонкой данных для 310 нК, на рис. 4 в работе [5]). Никакого эффекта от ловушки, который должен был бы иметь место из-за наличия $\rho_0(\mathbf{S})$ в равенствах (35), (36) для $d = 3$, в этих экспериментах не наблюдалось, но мы полагаем, что

такие поправки должны быть порядка 10^{-4} [1]. Очевидно, требуются дальнейшие эксперименты с большими $|\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|/2$, поскольку, как мы уже объяснили, эффекты от нарушения трансляционной инвариантности имеют фундаментальную важность.

В случае $d = 2$ корреляции, очевидно, спадают алгебраически при $R \gg \lambda_T$, а именно по степенному закону при произвольно малых температурах:

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \left(\frac{R}{\Lambda_T} \right)^{-\nu/(\pi\beta\rho_0(\mathbf{S}))}. \quad (38)$$

Этот результат очевидным образом сопоставляется с результатом для $d = 2$, полученным с помощью функционального интеграла при условии трансляционной инвариантности [23]. Заметим, что показатель в (38) пропорционален T и является отрицательным, так что при $T \rightarrow 0$ функция $G^{(1)}$ “растягивается” на почти макроскопические расстояния. При точном равенстве $T = 0$ можно заключить, что $G^{(1)}$ имеет ненулевой отступ, указывающий на наличие истинного конденсата.

Случай $d = 1$ представляет особый интерес: при условии трансляционной инвариантности (в отсутствие ловушки) система является квантово интегрируемой. В работе [15] (см. также [19]) корреляторы $\langle \psi^\dagger(x)\psi(x') \rangle$ были точно вычислены при $c = 2g > 0$, или при $T \geq 0$: в этом случае имеется фазовый переход при $T = 0$, состоящий в том, что при $T > 0$

$$G(x_1, x_2) = \rho_0 e^{-\nu R/(\beta\rho_0)}, \quad (39)$$

где $R = |x_1 - x_2|$, однако эта зависимость сменяется степенной при $T = 0$. В присутствии ловушки можно по-прежнему следовать подходу, намеченному в данном разделе. Мы получаем, что функция f из (30) не является сингулярной. Кроме того, уравнение (27) можно решить точно [24].

Таким образом, при $d = 1$ и $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}$ мы получаем, что

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sqrt{\rho_0(\mathbf{r}_1)\rho_0(\mathbf{r}_2)} \left(\frac{h_+}{h_-} \right)^{-\nu R_c/(2\beta\rho_0(0))}, \quad (40)$$

где $h_\pm = (1 + R/(2R_c))^2 - (S/R_c)^2$, и результат верен для малых R . Этот результат для $d = 1$ подтверждает, что выражения для больших R при $d = 3$ (соотношение (35)) и при $d = 2$ (соотношение (38)) являются строго асимптотическими по R^{-1} только потому, что мы пренебрегли членом $\hbar^2/(2m)\nabla_\rho \cdot \nabla_\phi$ в уравнении (27). Результат для $d = 1$, найденный совсем другими методами в работе [26], имеет вид (40), но с другим показателем. Однако этот результат должен быть *ошибочным*, поскольку он не приводит к трансляционной инвариантности в пределе нулевой частоты ловушки. Но из (40) при $S \ll R \ll R_c$ мы находим

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \sqrt{\rho_0(\mathbf{r}_1)\rho_0(\mathbf{r}_2)} e^{-\nu R/(\beta\rho_0(\mathbf{S}))}, \quad (41)$$

и когда $\Omega \rightarrow 0$, это сводится к уравнению (39) при $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}^2$.

²⁾ Формально это результат для $T = 0$ в случае трансляционной инвариантности, когда длина корреляции $\beta\rho_0/\nu$ имеет значение ρ_0 в основном состоянии. Основное состояние с плотностью $\rho_0 > 0$ соответствует положительным значениям химического потенциала μ в этом интегрируемом и точно решаемом случае. В других случаях, как уже отмечалось [15], [19], закон убывания при $T = 0$ является степенным.

Рассмотрим подробнее полученные нами результаты для параметров порядка $\langle T_\tau \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \rangle$, $\langle T_\tau \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', \tau') \rangle$. Определим эти величины через функциональные интегралы $\langle \psi(\mathbf{r}, \tau) \rangle = \langle \psi_0(\mathbf{r}) \rangle$ (см. (31)) и аналогично для $\langle \bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \rangle = \langle \bar{\psi}_0(\mathbf{r}) \rangle$. Заметим, что в решениях (28)–(30) игнорируются вклады однородных частей, являющихся решениями уравнения $\nabla^2 \phi = 0$, т.е. произвольных гармонических решений. Но единственными гармоническими решениями, удовлетворяющими граничным условиям, являются (комплекснозначные) постоянные. Следовательно, функция $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (но не $G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$!) имеет произвольный вещественный постоянный множитель C (ср. с выражениями, приведенными в приложении А работы [27]). Множитель C является перенормируемым, но в остальном он остается неопределенным множителем. Подобным же образом два параметра порядка приобретают *комплексные* множители $C_1, \bar{C}_1$. Однако, используя свойство $\langle \hat{\psi}^\dagger \rangle = (\langle \hat{\psi} \rangle)^*$, находим, что $\bar{C}_1 = C_1^*$ и $C = C_1 C_1^*$, а расходимость, проявляющаяся через C , точно компенсируется расходимостью, возникающей через $C_1 C_1^*$, как уже объяснялось выше. Таким образом, функция $G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ при $d = 3$ ведет себя при масштабных преобразованиях точно как $1 + O(R^{-1})$, как видно из (36). Более того, C_1 и C_1^* имеют произвольные множители $e^{i\delta}$ и $e^{-i\delta}$, соответственно, где δ является неопределенной, но не зависящей от $\mathbf{r}$ фазой (подробнее см. [28]).

5. ПРИТЯГИВАЮЩИЙ СЛУЧАЙ

В разделе 3 мы указали, что приближение для функционального интеграла (7) в рамках метода перевала приводит к стационарному уравнению ГП (16) и сопряженному ему при $c = 2g > 0$ и $c = 2g < 0$, соответственно, причем последний случай реализуется для квантовой модели НШ с притяжением. Такой анализ не может описывать динамику. Тем не менее в отсутствие полной квантовой теории для корреляторов вида (2) в притягивающем случае можно исследовать зависящую от времени c -числовую теорию (зависящее от времени уравнение ГП), т.е. уравнение (1) при $c < 0$. Разумеется, зависящее от вещественного времени t уравнение (1) не может описывать тепловые возбуждения.

В работе [8] изучено уравнение (1) с нелинейностью вида $-2c\psi|\psi|^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$. После масштабного преобразования потенциал $V(\mathbf{r})$ был выбран в сферически-симметричном виде $V(\mathbf{r}) = \omega^2 r^2 / 4$ (уравнение (2) в работе [8]). Затем отмечено наличие в уравнении (3) *симметрии*

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \exp \left[i \left\{ \frac{\omega}{4 \sin(\omega t + \phi_0)} [2\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \cos(\omega t + \phi_0)] \right\} \right] \times \\ \times \psi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}_0 \cos(\omega t + \phi_0), t), \end{aligned} \quad (42)$$

где $\boldsymbol{\eta}_0$ — произвольный вектор в размерности d и ϕ_0 — произвольная фаза. Эта симметрия выявляет, вообще говоря, *осцилляторный* характер динамики волнового пакета для уравнения (1) при его обобщении

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta_x \psi - 2c\psi|\psi|^{2n} - \frac{\omega^2}{4} r^2 \psi = 0 \quad (43)$$

($\Delta_x - d$ -мерный лапласиан), где $c < 0$ или $c > 0$. В работах [6], [7] (см. также приведенную в них библиографию) был продемонстрирован коллапс при $\omega = 0$ и $c < 0$. Решения становятся сингулярными за конечный интервал времени, если выполнено условие $nd \geq 2$. Это условие Захарова для коллапса, и оно выполняется также в присутствии ловушечного потенциала $\omega^2 r^2 / 4$. Более того, особенности этого коллапса становятся интересными, потому что коллапс, как правило, происходит к расположенной в центре ловушки δ -функции для $|\psi|^2$. В работах [29] рассматривалась та же задача (при $\omega \neq 0$) при $n = 1$ и $d = 2, 3$. Следуя подходу работ [7] и [29], рассмотрим функционал

$$U[\psi] = \int_{\mathbb{R}^d} r^2 |\psi|^2 d^d x. \quad (44)$$

Здесь мы используем обозначения из работы [8] с векторами $\mathbf{x}$, а не $\mathbf{r}$, и $r = |\mathbf{x}|$, при этом очевидно, что $U[\psi] \geq 0$. Из уравнения (1), но с обобщенным потенциалом как в (43), находим, что

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = 8 \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \psi|^2 + \frac{cnd}{n+1} |\psi|^{2n+2} - \frac{1}{4} \omega^2 r^2 |\psi|^2 \right) d^d x. \quad (45)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 4\omega^2 U[\psi] = 8E[\psi] + \frac{8c(nd-2)}{n+1} I_{2n+2}[\psi], \quad (46)$$

где “энергия” $E[\psi]$ имеет вид

$$E[\psi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \psi|^2 + \frac{2c}{n+1} |\psi|^{2n+2} + \frac{1}{4} \omega^2 r^2 |\psi|^2 \right) d^d x. \quad (47)$$

Решение уравнения (46) есть [8]

$$\begin{aligned} U[\psi] = & \frac{4 \sin^2 \omega t}{\omega^2} E_{\text{НШ}} + U_0 \cos^2 \omega t + J_0 \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + \\ & + \frac{4c(dn-2)}{\omega(n+1)} \int_0^t \sin[2\omega(t-t')] I_{2n+2}[\psi] dt', \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} V_0 = U[\psi]|_{t=0}, \quad J_0 = \frac{d}{dt} U[\psi]|_{t=0}, \quad I_q[\psi] = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^q d^d x, \\ E_{\text{НШ}} = E[\psi] - \frac{\omega^2}{4} U_0. \end{aligned} \quad (49)$$

Заметим, что величина $E[\psi]$ является гамильтонианом уравнения (43) со скобками $\{\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Гамильтониан (47) является константой движения, фиксированной начальными данными. При $c < 0$ и достаточно гладких начальных данных он не ограничен снизу. Определяемая в (49) величина $E_{\text{НШ}}$ имеет те же свойства. Например, условие $E_{\text{НШ}} \leq 0$ все

еще допускает большое число физически приемлемых начальных данных. Вторая константа движения есть

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 d^d x \equiv N$$

— полное число бозонов (атомов). Внимательное рассмотрение выражения (44) для $U[\psi]$ показывает (см. также [8], [29]), что при условиях

$$c < 0, \quad dn \geq 2, \quad E_{\text{нш}} \leq 0 \quad (50)$$

(за исключением специального случая $dn = 2$, $E_{\text{нш}} = J_0 = 0$ [8]) всегда имеется по крайней мере одна точка $t = t_* \in (0, \pi/(2\omega)]$ такая, что правая часть выражения (48) становится отрицательной при $t > t_*$. Поскольку функционал $U[\psi]$ неотрицателен, можно сделать вывод о том, что функция ψ не может быть продолжена за $t = t_*$ и должна демонстрировать сингулярность. В работе [8] показано, что эта сингулярность, как правило, имеет вид $|\psi|^2 \rightarrow N\delta(\mathbf{x})$. Однако в специальном случае всюду не отрицательного функционала $U[\psi] = V_0 \cos^2 \omega t$ коллапс по $|\psi|^2$ имеет место, если $|\psi|^2 \rightarrow N\delta(\mathbf{x})$ при $t \rightarrow t_*$, но вслед за этим тогда может происходить периодический коллапс с периодом π/ω .

Условия (50) являются, таким образом, *достаточными* (но не необходимыми [8]) для образования сингулярности. Действительно, можно немедленно увидеть, какой же должна быть эта сингулярность. Условие наличия нуля функции $U[\psi]$ (44) дает $|\psi|^2 = 0$, за возможным исключением точки $r = 0$, так что $|\psi|^2$ несомненно находится в классе обобщенных функций. Когда $|\psi|^2$ нормирована на единицу, этот класс решений ясным образом включает d -мерную δ -функцию $\delta(\mathbf{x})$.

Эта задача исследовалась в работе [8], где искали точные подобные решения обобщенного уравнения (1), а именно уравнения (43), при условии сферической симметрии. Такие решения возникают только при $dn = 2$. Особенно интересное точное решение, найденное при этих условиях, имеет вид (при $d = 1$ и $n = 2$)

$$\psi(x, t) = \frac{p_0}{\sqrt{\cos \omega t}} \exp \frac{-i \operatorname{tg} \omega t [(\omega/4)x^2 - (2/3)\omega|c|p_0^4]}{\sqrt{\operatorname{ch} [(2/3)\sqrt{6|c|}p_0^2 x / \cos \omega t]}}, \quad (51)$$

где $p_0 \in \mathbb{R}$ — единственный свободный параметр. Это решение становится сингулярным при $t \rightarrow \pi/(2\omega)$, когда его амплитуда расходится как $1/\sqrt{\pi/(2\omega) - t}$, и в этом пределе

$$|\psi|^2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2|c|}} \delta(x) = N\delta(x),$$

что представляет собой ожидавшуюся сходимость к δ -функции. Заметим, что $|\psi|^2$ теперь периодична с периодом π/ω , тогда как решение (51) само по себе имеет скачки по фазе, смешанные с сингулярностями в виде точек ветвления при пересечении сингулярностей функции $|\psi|^2$ при $t = (\pi/(2\omega))(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что в физических терминах нормировка этого решения не зависит от параметров и что N должно принимать конкретное значение $N = (\pi/2)\sqrt{3/(2|c|)}$.

В работе [8] с помощью замены независимых переменных

$$\theta = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \omega t, \quad z_i = \frac{x_i}{\cos \omega t} \quad (52)$$

и замены зависимых переменных

$$\psi(x, t) = [\cos \omega t]^{-d/2} e^{-i\omega \operatorname{tg}(\omega t) r^2/4} p(z, \theta) \quad (53)$$

уравнение (43) было преобразовано к виду

$$ip_\theta + \Delta_\theta p - \frac{2c}{(1 + \omega^2 \theta^2)^{-dn/2+1}} p|p|^{2n} = 0, \quad (54)$$

где $p_\theta \equiv \partial p / \partial \theta$. Отсюда следует, что только при $dn = 2$ модель НШ с параболоидным ловушечным потенциалом точно преобразуется к трансляционно-инвариантному виду.

Подробнее математическая сторона задачи описана в работе [8]. По поводу физического аспекта задачи заметим, что в вещественных моделях НШ с притяжением (при $n = 1$), реализуемых, в частности, в случае ${}^7\text{Li}$ и ${}^{85}\text{Rb}$, при $d = 3$ мог бы наблюдаться коллапс $|\psi|^2$ к функции, близкой к δ -функции, в центре ловушки. Заметим, однако, что в этом случае из термодинамики (см. (15) при $c < 0$) следует свободная энергия, для которой

$$c \int |\psi|^4 d^3 r = c\delta(\mathbf{0}), \quad (55)$$

что представляет собой отрицательную расходящуюся (при $c < 0$).

При $nd = 1$, $n = 1$, $d = 1$ и $\omega = 0$ (без ловушки) это дает интегрируемый случай, для которого при $c < 0$ имеются точные солитонные решения. В квантово интегрируемом случае при $nd = 1$ действительно имеются (см. [27]) точные “квантовые солитоны”, которые, однако, надо описать отдельно (см. [30])³⁾. В работе [32] изучаются “квантовые солитоны” в терминах наших работ по интегрируемым q -деформированным решеткам (см. [33] и приведенную там библиографию).

³⁾ Лай и Хаус [31] дают сводку результатов более ранних работ, например работ Такера и др. об анзаце Бете для квантовых моделей НШ. Они воспроизводят матричный элемент Вадати [27], [30] и, делая число частиц n *неопределенным* (в силу $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$) с весом, задаваемым распределением Пуассона, получают описание когерентного состояния для этого числа частиц. Наш подход для когерентных состояний такого типа состоит в расширении алгебры таким образом, чтобы заменить $\hat{N}$ алгеброй Гайзенберга–Вейля для операторов $\hat{A}, \hat{A}^\dagger$ таких, что $[A, A^\dagger] = 1$ и $A, A^\dagger$ коммутируют со *всеми* бесконечным (но счетным) числом операторов $\hat{H}, \hat{P}, \hat{Q}, \dots$. К сожалению, Лай и Хаус не отмечают полной квантовой интегрируемости рассматриваемой модели, которая является, по существу, интегрируемой квантовой притягивающей моделью НШ в размерности $1 + 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обе квантовые модели НШ, как с отталкиванием, так и с притяжением, в каждой размерности $d = 1, 2$ и 3 , как и их классические версии, представляют значительный интерес, потому что они открыты для широких экспериментальных исследований в существующих в настоящее время экспериментах на бозе-конденсированных парах металла в магнитных ловушках. Однако присутствие магнитной ловушки в этих экспериментах нарушает трансляционную инвариантность, и импульс при этом не является константой движения. Таким образом, даже при $d = 1$ полная квантовая интегрируемость не может играть непосредственной роли. Заметим, однако, что появление одномерных магнитных ловушек с периодическими граничными условиями, которые представляются физически возможными ($(d = 1)$ -ловушка развернута сама на себя!), может изменить это положение вещей и позволить выполнить проверку точной справедливости квантовых моделей НШ в контексте $d = 1$ КБЭ и тем самым в более общем контексте КБЭ с помощью точных решений квантовых моделей НШ и их корреляторов. Динамика любой из квантовых моделей НШ, с отталкиванием или с притяжением, в любой размерности $d = 1, 2$ или 3 все еще не исследована. Для случаев с отталкиванием в тепловом равновесии при конечных температурах метод функционального интеграла, примененный в разделах 2–4, по-видимому, предлагает наилучшие из возможных, хотя и приближенные, методы, применимые для всех трех физически реализуемых пространственных размерностей, причем независимо от того, присутствует ли ловушечный потенциал.

Список литературы

- [1] *N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, C. Malyshev, J. Timonen.* Europhys. Lett. 2001. V. 55. № 6. P. 755.
- [2] *Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин.* Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
- [3] *R. K. Bullough, J. T. Timonen.* Quantum and classical integrable models and statistical mechanics. In: Statistical Mechanics and Field Theory. Eds. V. V. Bazhanov and C. J. Burden. Singapore: World Scientific, 1995. P. 336.
- [4] *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [5] *I. Bloch, T. W. Hänsch, T. Esslinger.* Nature. 2000. V. 403. P. 166.
- [6] *В. Е. Захаров.* ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745; *Л. М. Дегтярев, В. Е. Захаров, Л. И. Пудяков.* ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 115.
- [7] *В. Е. Захаров, В. С. Сынах.* ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 940.
- [8] *A. V. Rybin, G. G. Varzugin, M. Lindberg, J. Timonen, R. K. Bullough.* Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 6224.
- [9] *M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Andrews, C. E. Wieman, E. A. Cornell.* Science. 1995. V. 269. P. 198.
- [10] *K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3969; *D. G. Fried et al.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 81. P. 3969.
- [11] *C. C. Bradley et al.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 1687.
- [12] *S. L. Cornish et al.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 9. P. 1795; Physics Today. August 2000. P. 17.
- [13] *J. L. Roberts et al.* Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 19. P. 4211; *P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett, M. Edwards.* Phys. Rev. A. 1995. V. 51. P. 4704.

- [14] *R. K. Bullough, Yu-zhong Chen, J. Timonen.* Soliton statistical mechanics – thermodynamic limits for quantum and classical integrable models. In: Nonlinear World. V. 2. Eds. V. G. Bary'akhtar, V. M. Chernousenko, N. S. Erokhin, A. G. Sitenko and V. E. Zakharov. River Edge, NJ: World Scientific, 1990. P. 1377.
- [15] *N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen.* Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 3993.
- [16] *Н. А. Славнов.* ТМФ. 1999. Т. 121. № 1. С. 117.
- [17] *T. Kojima, V. E. Korepin, N. A. Slavnov.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 657; *V. E. Korepin, N. A. Slavnov.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 8241; *A. P. Имс, Н. А. Славнов.* ТМФ. 1999. Т. 119. № 2. С. 179; *V. Korepin, N. Slavnov.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 8623.
- [18] *P. A. Deift, A. R. Its, Xin Zhou.* Ann. Math. 1997. V. 146. P. 149.
- [19] *R. K. Bullough, N. M. Bogoliubov, G. D. Pang, J. Timonen.* Chaos Solitons Fractals. 1995. V. 5. P. 2639.
- [20] *N. N. Bogoliubov.* J. Phys. 1947. V. 9. P. 23; *Н. Н. Боголюбов.* Вестн. МГУ. 1947. Т. 7. С. 43.
- [21] *N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, D. V. Shirkov.* A New Method in the Theory of Superconductivity. London: Chapman & Hall, 1959.
- [22] *F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari.* Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 463.
- [23] *В. Н. Попов.* Функциональные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
- [24] *Н. М. Боголюбов.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 125.
- [25] *N. N. Bogoliubov.* Quasi-expectation values in problems of statistical mechanics. Dubna: JINR, 1963.
- [26] *D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, J. T. M. Walraven.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3745.
- [27] *R. K. Bullough.* J. Mod. Opt. 2000. V. 47. № 11. P. 2029; Erratum: J. Mod. Opt. 2001. V. 48. № 4. P. 747.
- [28] *N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, C. Malyshev, J. Timonen.* Finite-temperature correlations in the one-dimensional trapped and untrapped Bose gas. Phys. Rev. A. 2003. (submitted); *N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, C. Malyshev, J. Timonen.* Two- and three-dimensional correlations in the trapped Bose gases. Phys. Rev. A. 2003. (submitted).
- [29] *T. Tsurumi, M. Wadati.* J. Phys. Soc. Japan. 1997. V. 66. P. 3031; P. 3035; *M. Wadati, T. Tsurumi.* Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 287; *L. Bergé, T. J. Alexander, Y. S. Kivshar.* Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 023607.
- [30] *R. K. Bullough, M. Wadati.* Quantum solitons as possible qubits. In: Coherence and Quantum Optics 8 (CQO8). Eds. N. Bigelow, J. H. Eberly et al. New York: Plenum, 2001.
- [31] *Y. Lai, H. A. Haus.* Phys. Rev. A. 1989. V. 40. № 2. P. 844; P. 854.
- [32] *R. K. Bullough, N. M. Bogoliubov, A. V. Rybin, G. G. Varzugin, J. Timonen.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 1.
- [33] *A. V. Rybin, G. G. Varzugin, J. Timonen, R. K. Bullough.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 157.