Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Мельников, Структура уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 1, 110–123

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:16:34

© 2003 г.

В. К. Мельников*

СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Предлагается новый подход для нахождения нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния. Отправной точкой в этом подходе является рассмотрение эволюционных уравнений для данных рассеяния, порождаемых быстро убывающими при $x \rightarrow \pm\infty$ решениями произвольно заданного нелинейного эволюционного уравнения. С помощью этого подхода найдены все нелинейные эволюционные уравнения, интегрирование которых сводится к исследованию эволюционных уравнений для данных рассеяния в форме дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных). При этом сами эволюционные уравнения для данных рассеяния в результате оказались линейными и, более того, интегрируемыми в конечном виде.

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, интегрируемые системы, представление Лакса, операторное представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются нелинейные эволюционные уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k_0} u}{\partial x^{k_0}} \right), \quad (1)$$

которые могут быть исследованы с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера

$$L = \partial^2 + u, \quad \partial \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2)$$

потенциал которого $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1). Правая часть уравнения (1) предполагается достаточно гладкой функцией от независимых переменных x и t , решения u и его производных $u_k = \partial^k u / \partial x^k$ по переменной x не выше некоторого конечного порядка $k_0 \geq 0$. В последующем изложении само решение часто будет обозначаться как u_0 , т.е. как производная нулевого порядка. Более того, предполагается, что

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия

задание достаточно гладких и быстро убывающих при $x \rightarrow \pm\infty$ начальных данных гарантирует существование у уравнения (1) единственного решения с указанными свойствами, т.е. достаточно гладкого и быстро убывающего при $x \rightarrow \pm\infty$.

Класс нелинейных эволюционных уравнений, заданных с помощью вышеприведенных условий, называется *классом локальных уравнений*. Очевидно, что при исследовании любого уравнения из этого класса можно применить теорию рассеяния для оператора Шредингера, потенциал которого $u(x)$ убывает достаточно быстро при $x \rightarrow \pm\infty$, если эволюция S -матрицы оператора L , задаваемая таким решением этого уравнения, которое в свою очередь быстро убывает при $x \rightarrow \pm\infty$, описывается уравнением вида

$$\frac{\partial S(\eta)}{\partial t} = H(S(\eta), S'(\eta), \dots, S^{(m)}(\eta), \eta), \quad (3)$$

где параметр η связан соотношением $\eta^2 = -\lambda$ со спектральным параметром λ оператора L , а штрих обозначает дифференцирование по параметру η до некоторого конечного порядка $m \geq 0$. В данном случае предполагается, что элементы матрицы H гладким образом зависят от элементов матриц $S^{(\mu)}(\eta) = \partial^\mu S(\eta) / \partial \eta^\mu$, $\mu = 0, 1, \dots, m$. Точнее, производные от элементов матрицы H по элементам матриц $S^{(\mu)}(\eta)$, $\mu = 0, 1, \dots, m$, представляют собой непрерывные функции от всех своих аргументов при любом вещественном ненулевом значении параметра η . Это условие оказывается достаточно сильным и в конечном итоге полностью определяет структуру уравнения (1). А именно, будет доказано, что при $m > 1$ не существует никаких нелинейных эволюционных уравнений, которые принадлежали бы описанному выше классу локальных уравнений и имели бы быстро убывающие при $x \rightarrow \pm\infty$ решения, порождающие S -матричную эволюцию, удовлетворяющую уравнению (3). Далее, в случае $m = 1$ любое нелинейное эволюционное уравнение из класса локальных допускает операторное представление вида

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = cL, \quad (4)$$

где A – дифференциальный оператор по x , а величина c может зависеть только от времени t . Наконец, при $m = 0$ любое нелинейное эволюционное уравнение из рассматриваемого класса допускает представление Лакса [1]

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = 0. \quad (5)$$

Следовательно, только быстроубывающие решения уравнений иерархии КдФ могут порождать эволюцию S -матрицы для оператора L , имеющего вид (2), которая задавалась бы системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Более того, заменяя оператор A на оператор $A - (c/2)x\partial$, получим, что операторное соотношение (4) примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = c \left(u + \frac{1}{2} x \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Поэтому любое уравнение, порождаемое операторным соотношением (4), представляет собой уравнение иерархии КдФ с правой частью такой же, как в уравнении (6). В

этом случае эволюционное уравнение для S -матрицы оказывается уравнением в частных производных. Тем не менее оно может быть проинтегрировано в конечном виде: решение задачи Коши для любого из уравнений (6) оказывается задачей того же уровня сложности, что и решение аналогичной задачи для любого из уравнений (5). Заметим, что (6) представляет собой уравнение из класса нелинейных эволюционных уравнений, рассмотренных в работе [2]. Ниже мы покажем, что все прочие уравнения из этого класса должны быть нелокальными.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Известно, что для потенциала $u = u(x)$, быстро убывающего при $x \rightarrow \pm\infty$, уравнение

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + (u + \eta^2)e = 0 \quad (7)$$

при любом вещественном η имеет решения e_- и e_+ с асимптотическими поведением

$$\begin{aligned} e_-(x, \eta) &\sim e^{-i\eta x}, \quad x \rightarrow -\infty, \\ e_+(x, \eta) &\sim e^{i\eta x}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти решения связаны между собой:

$$e_+(x, \eta) = a(\eta)e_-(x, -\eta) + b(\eta)e_-(x, \eta), \quad (9)$$

где величины $a(\eta)$ и $b(\eta)$ допускают представления

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{1}{2i\eta} \left[e_-(x, \eta) \frac{\partial e_+(x, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial e_-(x, \eta)}{\partial x} e_+(x, \eta) \right], \\ b(\eta) &= \frac{1}{2i\eta} \left[e_+(x, \eta) \frac{\partial e_-(x, -\eta)}{\partial x} - \frac{\partial e_+(x, \eta)}{\partial x} e_-(x, -\eta) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

и удовлетворяют условиям

$$a(-\eta) = \bar{a}(\eta), \quad b(-\eta) = \bar{b}(\eta), \quad |a(\eta)|^2 - |b(\eta)|^2 = 1 \quad (11)$$

при любом вещественном $\eta \neq 0$. Здесь и далее черта обозначает комплексное сопряжение.

Величины $a(\eta)$ и $b(\eta)$ обладают целым рядом замечательных свойств. В частности, при любом $\mu \geq 0$ и любом вещественном η имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\partial^\mu}{\partial \eta^\mu} [2i\eta a(\eta)] &= \frac{\partial^\mu \Phi(x, \eta)}{\partial \eta^\mu}, \\ \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\partial^\mu}{\partial \eta^\mu} [2i\eta b(\eta)] &= -\frac{\partial^\mu \Psi(x, \eta)}{\partial \eta^\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

с функциями Φ и Ψ вида

$$\Phi(x, \eta) = e_-(x, \eta)e_+(x, \eta), \quad \Psi(x, \eta) = e_-(x, -\eta)e_+(x, \eta), \quad (13)$$

и в соответствии с уравнением (7) обе эти функции удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{L}\Theta = 0, \quad \mathcal{L} = \partial^3 + 4(u + \eta^2)\partial + 2\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (14)$$

Следовательно, при любом $\mu > 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \frac{\partial^\mu \Phi}{\partial \eta^\mu} &= -8\mu\eta \frac{\partial^\mu \Phi}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} - 4\mu(\mu-1) \frac{\partial^{\mu-1} \Phi}{\partial x \partial \eta^{\mu-2}}, \\ \mathcal{L} \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} &= -8\mu\eta \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} - 4\mu(\mu-1) \frac{\partial^{\mu-1} \Psi}{\partial x \partial \eta^{\mu-2}}, \end{aligned}$$

из которых в свою очередь следует, что при любом $\mu \geq 0$

$$(L_+^\mu \cdot \mathcal{L}) \frac{\partial^\mu \Phi}{\partial \eta^\mu} = (\mathcal{L} \cdot L_-^\mu) \frac{\partial^\mu \Phi}{\partial \eta^\mu} = 0, \quad (L_+^\mu \cdot \mathcal{L}) \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} = (\mathcal{L} \cdot L_-^\mu) \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} L_+ &= \frac{1}{4}\mathcal{L} \cdot \partial^{-1} = \frac{1}{4}\partial^2 + u + \eta^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \partial^{-1}, \\ L_- &= \frac{1}{4}\partial^{-1} \cdot \mathcal{L} = \frac{1}{4}\partial^2 + u + \eta^2 - \frac{1}{2}\partial^{-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом получаем, что вследствие уравнений (12) величины A_μ и B_μ , задаваемые формулами

$$A_\mu(x, \eta) = \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\partial^\mu a(\eta)}{\partial \eta^\mu}, \quad B_\mu(x, \eta) = \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\partial^\mu b(\eta)}{\partial \eta^\mu}, \quad (16)$$

удовлетворяют условиям

$$(L_+^\mu \cdot \mathcal{L})A_\mu = (\mathcal{L} \cdot L_-^\mu)A_\mu = (L_+^\mu \cdot \mathcal{L})B_\mu = (\mathcal{L} \cdot L_-^\mu)B_\mu = 0 \quad (17)$$

при любом $\mu > 0$.

Теперь с помощью общих формул, связывающих величины $a(\eta)$ и $b(\eta)$ с элементами S -матрицы, получим, что уравнение (3) приводит к тому, что эволюция величин $a(\eta)$ и $b(\eta)$ будет задаваться уравнениями вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(\eta)}{\partial t} &= P(a(\eta), a(-\eta), b(\eta), b(-\eta), \dots, \eta), \\ \frac{\partial b(\eta)}{\partial t} &= Q(a(\eta), a(-\eta), b(\eta), b(-\eta), \dots, \eta), \end{aligned} \quad (18)$$

где многоточия обозначают производные величин $a(\eta)$, $a(-\eta)$, $b(\eta)$ и $b(-\eta)$ относительно параметра η порядка не старше, чем m , а сами функции P и Q имеют непрерывные первые производные по переменным

$$\begin{aligned} a^{(\mu)}(\eta) &= \frac{\partial^\mu a(\eta)}{\partial \eta^\mu}, & a^{(\mu)}(-\eta) &= \frac{\partial^\mu a(-\eta)}{\partial \eta^\mu}, \\ b^{(\mu)}(\eta) &= \frac{\partial^\mu b(\eta)}{\partial \eta^\mu}, & b^{(\mu)}(-\eta) &= \frac{\partial^\mu b(-\eta)}{\partial \eta^\mu}, \end{aligned}$$

где $\mu = 0, 1, \dots, m$. Этот факт позволяет нам рассмотреть величины F и G вида

$$F(x, \eta) = \frac{\delta P(\eta)}{\delta u(x)}, \quad G(x, \eta) = \frac{\delta Q(\eta)}{\delta u(x)} \quad (19)$$

и с помощью уравнений (16) и (17) получить, что величины F и G , определенные соотношениями (19), удовлетворяют условиям

$$(L_+^m \cdot \mathcal{L})F = (\mathcal{L} \cdot L_-^m)F = (L_+^m \cdot \mathcal{L})G = (\mathcal{L} \cdot L_-^m)G = 0. \quad (20)$$

Эти условия, очевидно, представляют собой простое следствие того факта, что правые части уравнений (18) – гладкие функции своих аргументов. Тем не менее эти условия играют очень важную роль в дальнейшем рассмотрении, а потому заслуживают названия *главных условий*.

3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Известно, что производные по времени от величин $a(\eta)$ и $b(\eta)$ вида (10) допускают представления

$$\frac{\partial a(\eta)}{\partial t} = I(\eta), \quad \frac{\partial b(\eta)}{\partial t} = J(\eta),$$

где

$$I(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz, \quad J(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz.$$

В этом случае следует положить функцию $\hat{h}(x)$ равной величине правой части уравнения (1), вычисленного на рассматриваемом решении $u = u(x, t)$ данного уравнения. По аналогии с формулой (19) зададим величины $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с помощью равенств

$$\mathcal{F} = \frac{\delta I(\eta)}{\delta u(x)}, \quad \mathcal{G} = \frac{\delta J(\eta)}{\delta u(x)}. \quad (21)$$

Легко видеть, что определенные таким образом величины $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ допускают представления

$$\mathcal{F} = \Gamma + K, \quad \mathcal{G} = \Delta + M,$$

где

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz, \quad \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz,$$

и вследствие равенств (12) величины K и M имеют вид

$$K = \frac{1}{2i\eta} \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\hat{h}_k(x) \Phi(x, \eta)),$$

$$M = -\frac{1}{2i\eta} \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\hat{h}_k(x) \Psi(x, \eta)).$$

В этом случае величины $\hat{h}_k(x)$ равны значениям производных $h_k = \partial h / \partial u_k$, вычисленных на решении $u = u(x, t)$ уравнения (1), и $u_k \equiv \partial^k u / \partial x^k$, $k = 0, 1, \dots, k_0$.

Благодаря равенствам (10) вторые вариационные производные от величин $a(\eta)$ и $b(\eta)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(z)} = \frac{\delta}{\delta u(z)} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(x)}, \quad \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(z)} = \frac{\delta}{\delta u(z)} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(x)}, \quad (22)$$

которое, очевидно, аналогично условию симметричности для вторых смешанных производных функции двух переменных. Похожее тождество выполняется также и для элементов S -матрицы. Учитывая уравнения (12) и (22), получим, что величины Γ и Δ , определенные выше, могут быть представлены как

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2i\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \Phi(x, \eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz = \frac{1}{2i\eta} \frac{\partial \Phi(x, \eta)}{\partial t}, \\ \Delta &= -\frac{1}{2i\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \Psi(x, \eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz = -\frac{1}{2i\eta} \frac{\partial \Psi(x, \eta)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Далее, можно ввести оператор $\mathcal{A}$ вида

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \partial^k \cdot \hat{h}_k(x). \quad (23)$$

В соответствии с определением величин K и M имеют место равенства

$$K = \frac{1}{2i\eta} \mathcal{A} \Phi(x, \eta), \quad M = -\frac{1}{2i\eta} \mathcal{A} \Psi(x, \eta).$$

Таким образом получаем, что величины $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, задаваемые формулами (21), допускают представление

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2i\eta} \mathcal{T} \Phi(x, \eta), \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{2i\eta} \mathcal{T} \Psi(x, \eta), \quad (24)$$

где оператор эволюции $\mathcal{T}$ имеет вид

$$\mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}. \quad (25)$$

Из определений величин F , G и $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ можно легко заключить, что $F = \mathcal{F}$ и $G = \mathcal{G}$. Тогда, принимая во внимание представления (20) и (24), получим

$$(L_+^m \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}) \Phi = (\mathcal{L} \cdot L_-^m \cdot \mathcal{T}) \Phi = (L_+^m \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}) \Psi = (\mathcal{L} \cdot L_-^m \cdot \mathcal{T}) \Psi = 0. \quad (26)$$

Так как функции $\Psi = \Psi(x, \eta)$, $\Phi = \Phi(x, \eta)$ и $\bar{\Psi} = \Psi(x, -\eta)$ вида (13) образуют фундаментальную систему решений уравнения (14) при любом вещественном $\eta \neq 0$, равенства (26) приводят к тому, что оператор эволюции $\mathcal{T}$, определенный соотношениями (23) и (25), переводит любое решение Θ уравнения (14) в решение $\dot{\Theta} = \mathcal{T} \Theta$ уравнения

$$(L_+^m \cdot \mathcal{L}) \dot{\Theta} = (\mathcal{L} \cdot L_-^m) \dot{\Theta} = 0. \quad (27)$$

Введем теперь дифференциальный по x оператор $\mathcal{B}$ такой, что оператор Ω вида

$$\Omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A}, \mathcal{L}] - \mathcal{B} \cdot \mathcal{L} \quad (28)$$

имеет порядок не старше, чем два. Очевидно, что операторы $\mathcal{B}$ и Ω однозначно задаются этим требованием. Тогда из их определений следует, что их коэффициенты могут зависеть от параметра $\lambda = -\eta^2$ только полиномиально. Наконец, вследствие уравнения (27) равенство $(L_+^m \cdot \Omega)\Theta = 0$ будет выполняться для любого решения Θ уравнения (14), т.е. оператор Ω переводит любое решение Θ уравнения (14) в решение $\Theta' = \Omega\Theta$ уравнения

$$L_+^m \Theta' = 0. \quad (29)$$

Эти равенства налагают определенные условия на оператор Ω вида (28), т.е. в конечном итоге из них следуют ограничения на оператор $\mathcal{A}$, допускающий разложение (23). В случае $m = 0$ немедленно получим, что $\Omega = 0$, т.е. если только эволюция S -матрицы оператора Шредингера L , задаваемая решениями уравнения (1), описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то имеет место операторное соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A}, \mathcal{L}] = \mathcal{B} \cdot \mathcal{L}. \quad (30)$$

Сравнивая (30) с уравнением Лакса (5), получим, что для любого оператора $\mathcal{A}$ вида (23) можно построить дифференциальный по x оператор $\mathcal{A}$ такой, что нелинейные эволюционные уравнения, порождаемые формулами (5) и (30), совпадают. Отсюда следует, что если эволюция S -матрицы оператора Шредингера, порождаемая решениями уравнения (1), описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то (1) должно быть одним из уравнений иерархии КдФ.

Таким образом, из равенств (29) следует исчерпывающее описание уравнения (1) в случае $m = 0$. Более того, они задают полное описание уравнения (1) также и при любом $m > 0$. Чтобы показать это, используем функции Φ и Ψ , определенные разложениями (13), для компоновки вектор-строки Θ и матрицы Вронского W вида

$$\Theta = (\Psi, \Phi, \bar{\Psi}), \quad W = \begin{pmatrix} \Psi & \Phi & \bar{\Psi} \\ \partial \Psi / \partial x & \partial \Phi / \partial x & \partial \bar{\Psi} / \partial x \\ \partial^2 \Psi / \partial x^2 & \partial^2 \Phi / \partial x^2 & \partial^2 \bar{\Psi} / \partial x^2 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Далее, в соответствии с определением оператора Ω , положим

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 \partial + \omega_2 \partial^2, \quad \omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2). \quad (32)$$

Вследствие (13)–(15), (31) и (32) из равенств (29) следует, что существуют (3×3) -матрицы $C_1, \dots, C_m$, не зависящие от x , для которых справедливо представление

$$\omega W = \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^\mu \Theta}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} C_\mu. \quad (33)$$

Очевидно, что элементы матриц C_μ , $\mu = 1, \dots, m$, представляют собой функции параметра $\eta \in (-\infty, \infty)$ и являются функционалами в пространстве быстроубывающих потенциалов. Тогда из формул (19), (24) и (28) следует, что имеет место цепочка равенств

$$\omega W = \Omega \Theta = -(\mathcal{L} \cdot \mathcal{T})\Theta = 2i\eta \mathcal{L}(G, -F, -\overline{G}),$$

которая в соответствии с условием (9) позволяет выразить в простом виде элементы матриц $C_1, \dots, C_m$ через первые производные от правых частей P и Q уравнений (18). Предполагая, как и ранее, что правая часть уравнения (3) (и, соответственно, правые части уравнений (18)) представляет собой гладкую функцию, можно заключить, что при любом вещественном значении параметра $\eta \neq 0$ элементы матриц C_μ , $\mu = 1, \dots, m$, суть непрерывные функции параметра η и непрерывные функционалы на пространстве быстроубывающих потенциалов. Это свойство используется ниже при анализе соотношения (33), которое мы называем *основным соотношением* ввиду его чрезвычайной значимости для нашего рассмотрения.

4. АНАЛИЗ ОСНОВНОГО СООТНОШЕНИЯ ПРИ $m > 1$

Обратившись теперь к следующему из разложения (33) соотношению

$$\omega = \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^\mu \Theta}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} C_\mu W^{-1}, \quad (34)$$

получим, что его левая часть зависит полиномиально от спектрального параметра $\lambda = -\eta^2$, в то время как его правая часть в принципе может содержать и неполиномиальную зависимость. Необходимое условие, обеспечивающее полиномиальную зависимость правой части уравнения (34) от спектрального параметра, имеет вид

$$C_1 = c_1 \mathbf{1}, \quad C_2 = \dots = C_m = 0, \quad (35)$$

где скалярная величина c_1 полиномиально зависит от η^2 и $\mathbf{1}$ есть единичная (3×3) -матрица. Чтобы доказать это, рассмотрим асимптотическое поведение правой части уравнения (34) при $x \rightarrow \pm\infty$, для чего введем величины

$$\mathcal{E}_\mu = (e^{2i\eta x}, 0, \varepsilon_\mu e^{-2i\eta x}), \quad \varepsilon_\mu = (-1)^\mu, \quad (36)$$

$$\mathcal{E} = \text{diag}(e^{2i\eta x}, 1, e^{-2i\eta x}),$$

$$\Lambda = \text{diag}(1, 2i\eta, -4\eta^2), \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$U_- = \begin{pmatrix} a(\eta) & 0 & 0 \\ b(\eta) & a(\eta) & b(-\eta) \\ 0 & b(\eta) & a(-\eta) \end{pmatrix}, \quad U_+ = \begin{pmatrix} a(-\eta) & -b(-\eta) & 0 \\ -b(\eta) & a(\eta) & -b(-\eta) \\ 0 & 0 & a(\eta) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} C_- &= U_- C_m U_-^{-1}, & D_- &= U_- C_{m-1} U_-^{-1}, \\ C_+ &= U_+ C_m U_+^{-1}, & D_+ &= U_+ C_{m-1} U_+^{-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Применяя формулы (8) и (9), можно доказать справедливость следующего асимптотического поведения ω при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\omega \sim \begin{cases} [(2i)^m \eta x^{m-1} E_m^- + (2i)^{m-1} x^{m-2} R_m^- + \dots] \Pi^{-1} \Lambda^{-1}, & x \rightarrow -\infty, \\ [(2i)^m \eta x^{m-1} E_m^+ + (2i)^{m-1} x^{m-2} R_m^+ + \dots] \Pi^{-1} \Lambda^{-1}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (40)$$

Здесь многоточие обозначает или члены порядка не старше $(m-3)$ по x , если $m > 2$, или члены, убывающие при $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow \infty$, если $m = 2$. Далее, имеют место равенства

$$R_m^- = \varepsilon_{m-1} \left[(m-1) \left(1 + \eta \frac{\partial U_-}{\partial \eta} U_-^{-1} \right) C_- + \eta D_- \right] \varepsilon^{-1}, \quad (41)$$

$$R_m^+ = \varepsilon_{m-1} \left[(m-1) \left(1 + \eta \frac{\partial U_+}{\partial \eta} U_+^{-1} \right) C_+ + \eta D_+ \right] \varepsilon^{-1},$$

$$E_m^- = \varepsilon_m C_- \varepsilon^{-1}, \quad E_m^+ = \varepsilon_m C_+ \varepsilon^{-1}. \quad (42)$$

Компоненты векторов E_m^- и E_m^+ , задаваемых соотношениями (42), содержат экспоненциальные множители вследствие равенств (36). Эти множители отсутствуют, только если

$$c_{12}^- = c_{13}^- = c_{31}^- = c_{32}^- = 0, \quad c_{12}^+ = c_{13}^+ = c_{31}^+ = c_{32}^+ = 0, \quad (43)$$

где $c_{r,s}^-$ и $c_{r,s}^+$ — соответствующие элементы матриц C_- и C_+ вида (39), $r, s = 1, 2, 3$. Из формул (11), (38), (39) и условий $c_{12}^- = c_{13}^- = 0$ получим, что $c_{12} = c_{13} = 0$, в то время как из условий $c_{31}^+ = c_{32}^+ = 0$ следует, что $c_{31} = c_{32} = 0$, где $c_{r,s}$ — элементы матрицы C_m , $r, s = 1, 2, 3$. Условия $c_{12}^+ = c_{13}^+ = c_{31}^- = c_{32}^- = 0$ приводят при этом к соотношениям

$$\begin{aligned} b(\eta) c_{21} &= 0, & b(-\eta) (c_{11} - c_{22}) &= 0, \\ b(-\eta) c_{23} &= 0, & b(\eta) (c_{22} - c_{33}) &= 0. \end{aligned}$$

Тем самым равенства

$$c_{21} = c_{23} = 0, \quad c_{11} = c_{22} = c_{33} \quad (44)$$

выполнены при любом вещественном $\eta \neq 0$ таком, что $b(\eta) \neq 0$. Напомним теперь, что рассматриваемое пространство быстроубывающих потенциалов содержит всюду плотное подмножество финитных потенциалов. В соответствии с вышеприведенным утверждением относительно свойств элементов матриц C_μ , $\mu = 1, \dots, m$, равенства (44) будут выполняться для любого финитного потенциала и, следовательно, для любого быстроубывающего потенциала. Таким образом с учетом представлений (36) и (39) получаем

$$C_m = c_m \mathbf{1}, \quad E_m^- = E_m^+ = c_m (1, 0, \varepsilon_m), \quad (45)$$

где c_m — скалярная величина. Далее, используя соотношения

$$X_m^- = \varepsilon_{m-1} V_- \varepsilon^{-1}, \quad X_m^+ = \varepsilon_{m-1} V_+ \varepsilon^{-1}, \quad (46)$$

где

$$V_- = (m-1)c_m \frac{\partial U_-}{\partial \eta} U_-^{-1} + D_-, \quad V_+ = (m-1)c_m \frac{\partial U_+}{\partial \eta} U_+^{-1} + D_+, \quad (47)$$

можно переписать равенства (41) в виде

$$R_m^- - \eta X_m^- = R_m^+ - \eta X_m^+ = (m-1)c_m(1, 0, -\varepsilon_m). \quad (48)$$

Сравнивая формулы (42) и (46), легко увидеть, что выражения для компонент векторов X_m^- и X_m^+ не будут содержать экспоненциальных множителей, если матрицы V_- и V_+ , определенные выражениями (47), удовлетворяют также условиям, аналогичным ограничению (43). Простой анализ этих условий показывает, что матрица C_{m-1} должна иметь диагональный вид, и ее диагональные элементы D_1 , D_2 и D_3 должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 + (m-1)c_m \left(\frac{a'(-\eta)}{a(-\eta)} - \frac{b'(-\eta)}{b(-\eta)} \right), \\ D_3 &= D_2 + (m-1)c_m \left(\frac{a'(-\eta)}{a(-\eta)} + \frac{b'(\eta)}{b(\eta)} \right), \end{aligned}$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу, т.е. по параметру η или $-\eta$. Положим

$$\varphi(\eta) = \text{Im}[\ln a(\eta)] = \arg a(\eta), \quad \psi(\eta) = \text{Im}[\ln b(\eta)] = \arg b(\eta).$$

В этом случае векторы X_m^- и X_m^+ , определенные соотношениями (46) и (47), допускают представление

$$X_m^- = (\sigma_m^-, 0, -\tau_m^-), \quad X_m^+ = (\sigma_m^+, 0, -\tau_m^+), \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_m^- &= D_2 + (m-1)c_m \left\{ 2i[\varphi'(\eta) - \psi'(\eta)] + \frac{b'(\eta)}{b(\eta)} \right\}, \\ \sigma_m^+ &= D_2 - (m-1)c_m \frac{b'(-\eta)}{b(-\eta)}, \\ \varepsilon_m \tau_m^- &= D_2 + (m-1)c_m \frac{b'(\eta)}{b(\eta)}, \\ \varepsilon_m \tau_m^+ &= D_2 + (m-1)c_m \left\{ 2i[\varphi'(\eta) + \psi'(\eta)] - \frac{b'(-\eta)}{b(-\eta)} \right\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Тогда из формул (37), (40), (45), (48) и (49) можно получить асимптотическое поведение

$$\omega \sim \begin{cases} (2ix)^{m-1}c_mE_m + (2ix)^{m-2}(\eta^{-1}(m-1)c_mE_{m-1} + Q_-) + \dots, & x \rightarrow -\infty, \\ (2ix)^{m-1}c_mE_m + (2ix)^{m-2}(\eta^{-1}(m-1)c_mE_{m-1} + Q_+) + \dots, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (51)$$

где

$$E_\mu = \left(0, \frac{1 - \varepsilon_\mu}{2}, \frac{1 + \varepsilon_\mu}{4i\eta}\right), \quad \mu = m-1, m,$$

$$Q_- = \left(0, \frac{\sigma_m^- + \tau_m^-}{2}, \frac{\sigma_m^- - \tau_m^-}{4i\eta}\right), \quad Q_+ = \left(0, \frac{\sigma_m^+ + \tau_m^+}{2}, \frac{\sigma_m^+ - \tau_m^+}{4i\eta}\right).$$

Из (50) при этом следуют соотношения

$$\sigma_m^- - \varepsilon_m \tau_m^- = 2i(m-1)c_m[\varphi'(\eta) - \psi'(\eta)],$$

$$\sigma_m^+ - \varepsilon_m \tau_m^+ = -2i(m-1)c_m[\varphi'(\eta) + \psi'(\eta)].$$

Асимптотическое поведение (51) предполагает, что величина c_m представляет собой многочлен по переменной η , удовлетворяющий условию $c_m(-\eta) = (-1)^{m-1}c_m(\eta)$, а также полиномиальную зависимость величин $c_m(\eta)\varphi'(\eta)$ и $c_m\psi'(\eta)$ от параметра η при любом выборе потенциала $u(x)$ в операторе Шредингера, что представляется возможным только при $c_m = 0$. Тем самым условия (35) доказаны. Тогда немедленно получаем, что в классе рассматриваемых уравнений не существует уравнений, чьи быстро убывающие при $x \rightarrow \pm\infty$ решения порождают эволюцию S -матрицы, описываемую уравнением (3) с $m > 1$. Более того, в соответствии с результатами этого раздела компоненты ω_0 и ω_2 вектора ω (см. (32)) тождественно обращаются в нуль при $m = 1$, в то время как компонента ω_1 оказывается не зависящей от переменной x и может зависеть только полиномиально от параметра η^2 .

5. АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНОГО СООТНОШЕНИЯ (28) ПРИ $m = 1$

Выше было показано, что соотношение (28) при $m = 1$ принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A}, \mathcal{L}] - \mathcal{B} \cdot \mathcal{L} = \omega_1 \partial, \quad (52)$$

где оператор $\mathcal{B}$ и величина ω_1 полиномиально зависят от параметра $\lambda = -\eta^2$. Легко видеть, что степень r выражения для компоненты ω_1 не превышает двух. В самом деле, предположим, что $r \geq 2$. Тогда можно записать

$$\mathcal{B} = \sum_{s=0}^{r-1} \mathcal{B}_s \lambda^{r-s-1}, \quad \omega_1 = 4 \sum_{s=0}^r \rho_s \lambda^{r-s}.$$

Далее, пусть $\mathcal{L}_0$ равно значению $\mathcal{L}$ в точке $\eta = 0$. Тогда из соотношения (52) при $r > 2$ следуют условия

$$\mathcal{B}_0 = \rho_0, \quad 4(\mathcal{B}_1 - \rho_1)\partial = \mathcal{B}_0 \cdot \mathcal{L}_0,$$

которые могут быть выполнены только при $\rho_0 = 0$. С учетом этого можно произвести следующую замену в формуле (52):

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} - \frac{1}{2}\rho_1 x \partial, \quad \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} + \lambda \rho_0 + \frac{3}{2}\rho_1.$$

В результате получаем, что соотношение (52) эквивалентно набору равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial t} + [\mathcal{A}, \mathcal{L}_0] - \mathcal{B} \cdot \mathcal{L}_0 &= 4\rho_2 \partial + \rho_1 (\partial \cdot U + U \cdot \partial), \\ \mathcal{B} \partial &= [\mathcal{A}, \partial] + \frac{1}{4} \rho_0 \mathcal{L}_0, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$U = 2u + x \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (54)$$

В этих равенствах оператор $\mathcal{A}$ может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{P} \partial + \alpha,$$

где $\mathcal{P}$ — дифференциальный оператор, а α — оператор нулевого порядка, т.е. оператор умножения на функцию. Следовательно, равенства (53) эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mathcal{B} = \rho_0 l + [\mathcal{P}, \partial], \\ \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial t} + \partial \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0 \cdot \mathcal{P} \partial + [\alpha, \mathcal{L}_0] &= 4\rho_2 \partial + \rho_1 (\partial \cdot U + U \partial) + \rho_0 l \cdot \mathcal{L}_0, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$l = \frac{1}{4} \partial^2 + u. \quad (56)$$

Выделим теперь в условиях (55) их кососимметричную составляющую. Она очевидным образом записывается как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \mathcal{L} \cdot Y - \tilde{Y} \cdot \mathcal{L} = 4\rho_2 \partial + \rho_1 (\partial \cdot U + U \partial) + 2\rho_0 \lambda (\partial \cdot l + l \partial), \quad (57)$$

где тильда над оператором означает транспонирование (т.е. для любого оператора O это соответствует переходу к оператору $\tilde{O}$, который равен разности между симметричной и кососимметричной составляющими исходного оператора O) и

$$Y = \mathcal{P}_s \partial + \frac{1}{2} \rho_0 l, \quad \mathcal{P}_s = \frac{1}{2} (\mathcal{P} + \tilde{\mathcal{P}}). \quad (58)$$

Запишем теперь оператор Y в виде

$$Y = q \cdot \mathcal{L} + p, \quad (59)$$

где оператор q таков, что оператор p имеет порядок не выше двух. Вследствие формул (56)–(59) оператор q обязан быть симметричным; при этом соотношение (57) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \mathcal{L} \cdot p - \tilde{p} \cdot \mathcal{L} = 4\rho_2 \partial + \rho_1 (\partial \cdot U + U \partial) + 2\rho_0 \lambda (\partial \cdot l + l \partial). \quad (60)$$

Из структуры этого соотношения следует, что порядок оператора p не выше единицы. Тогда можно положить $p = \beta\partial + \gamma$, откуда следует

$$\mathcal{L} \cdot p + \tilde{p} \cdot \mathcal{L} = \sum_{r=0}^3 p_r \partial^{3-r}, \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= 2(\beta' + \gamma), p_1 = 3(\beta'' + \gamma'), \\ p_2 &= \beta''' + 3\gamma'' + 8(u - \lambda)\gamma - 4u'\beta, \\ p_3 &= \gamma''' + 4(u - \lambda)\gamma' + 2u'(2\gamma - \beta') - 2u''\beta. \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь и далее штрих над буквой обозначает дифференцирование по x . Из формул (54), (56), (61) и (62) можно легко получить, что соотношение (60) эквивалентно условиям

$$p_0 + \lambda\rho_0 = 0, \quad p_1 = 0$$

и уравнению, полученному в предположении справедливости этих условий и имеющему вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + 2B\partial + \frac{\partial B}{\partial x} = 4(\lambda^2\rho_0 + \rho_2)\partial + \rho_1(\partial \cdot U + U\partial), \quad (63)$$

где

$$B = \beta''' + 4(u - \lambda)\beta' + 2u'\beta = \mathcal{L}\beta.$$

Теперь легко видеть, что коэффициенты оператора p , задаваемого формулами (56), (58) и (59), зависят от параметра λ полиномиально. Тогда положим

$$\beta = \sum_{\nu=0}^n \beta_\nu \lambda^{n-\nu} - \frac{1}{2}\lambda\rho_0 x - \frac{1}{4}\rho_0 \chi,$$

где величина χ такова, что $\chi' = U$. При этом соотношение (63) становится эквивалентным условиям

$$\beta'_0 = 0, 4\beta'_{\nu+1} = \beta'''_\nu + 4u\beta'_\nu + 2u'\beta_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

и нелинейному эволюционному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta'_{n+1} = \rho_2 + \frac{1}{2}\rho_1 U + \frac{1}{4}\rho_0 u'v + \frac{1}{8}\rho_0 X,$$

где U определено условием (54), $v' = u$ и X по определению имеет вид

$$X = (u''' + 6uu')x + 4(u'' + 2u^2).$$

Это уравнение удовлетворяет исходным ограничениям на класс рассматриваемых уравнений, только если $\rho_0 = \rho_2 = 0$. Таким образом, окончательно получим, что наиболее общее уравнение, которое можно вывести с использованием соотношения (52) при $\rho_1 = c$, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta'_{n+1} = c \left(u + \frac{1}{2}xu' \right). \quad (64)$$

Заметим, что его левая часть представляет собой одно из уравнений иерархии КдФ, т.е. уравнения (6) и (64) совпадают. Поэтому все утверждения данной статьи доказаны.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, операторное соотношение (4) имеет четкий геометрический смысл. Легко проверить, что оператор $\mathcal{M}$ вида

$$\mathcal{M} = \frac{\partial}{\partial t} + A + \frac{c}{2} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}$$

переводит любое решение e уравнения (7) в решение того же самого уравнения. Однако точки дискретного спектра оператора Шредингера при этом становятся зависимыми от времени, если только функция c не равна тождественно нулю как функция от t . В результате такие величины, как импульс и энергия системы, также становятся функциями, хотя и легко вычисляемыми, но все-таки зависящими от времени.

Теперь покажем, что между решениями уравнений иерархии КдФ и решениями уравнений, порожденных соотношением (6), существует простая связь. Действительно, предположим

$$f(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t c(t') dt'\right), \quad g(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t c(t') dt'\right).$$

При этом легко проверить, что произвольное решение $u = u(x, t)$ любого из уравнений иерархии КдФ порождает решение $v = v(x, t) = f^2(t)u(f(t)x, t)$ некоторого уравнения, полученного с помощью соотношения (6), и, наоборот, произвольное решение $v = v(x, t)$ любого из уравнений, полученных с помощью соотношения (6), порождает решение $u = u(x, t) = g^2(t)v(g(t)x, t)$ некоторого из уравнений, принадлежащих иерархии КдФ. Это следует из хорошо известной инвариантности оператора Шредингера относительно масштабного преобразования независимой переменной и потенциала, что приводит к инвариантности уравнений иерархии КдФ при этих преобразованиях. В случае, когда уравнения, задаваемые соотношением (6), и уравнения иерархии КдФ определены таким образом, что коэффициенты при члене со старшей производной по пространственной переменной постоянны в каждом из этих уравнений, т.е. не зависят от времени, то вышеприведенное утверждение оказывается справедливым, если указанные преобразования сопровождаются очевидной заменой временной переменной, которая, однако, не сводится к обычному масштабному преобразованию. История данного вопроса рассмотрена в обзорной статье [3] (см. также список литературы к данной статье).

Стоит отметить, что основные идеи данной работы оказываются достаточно общими и могут быть применены к исследованию уравнений, интегрируемых с помощью других операторов.

Благодарности. Автор благодарен проф. Ч. Бурдику, Ф. Калоджеро, А. Погребкову, В. Приезжеву и П. Винтерницу за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *P. D. Lax.* Commun. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490.
- [2] *F. Calogero, A. Degasperis.* Spectral Transform and Solitons. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- [3] *А. Адлер, А. Шабат, Р. Ямиллов.* ТМФ. 2000. Т. 125. С. 355–424.