Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Ротос, Гомоклинические орбиты возмущенного решеточного модифицированного уравнения $Kd\Phi$, $TM\Phi$, 2003, том 134, номер 1, 135–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:40:20

© 2003 г.

В. М. Ротос*

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ ВОЗМУЩЕННОГО РЕШЕТОЧНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КдФ

Доказано расщепление гомоклинических орбит для почти интегрируемой решеточной модификации уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) с периодическими граничными условиями. Для построения гомоклинических орбит решеточного модифицированного уравнения КдФ используется метод преобразований Беклунда. Функция Мельникова строится как градиент инварианта, определенного с помощью дискретного дискриминанта Флоке, вычисленного в критических точках. Установлены критерии сохранения гомоклинических решений при возмущениях решеточной модификации уравнения КдФ.

Ключевые слова: гомоклинические решения, решеточное модифицированное уравнение КдФ, метод Мельникова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные дисперсионные волновые уравнения дают исследователю замечательные примеры бесконечномерных динамических систем, допускающих разнообразные и порой удивительные решения типа уединенных волн, образования периодических и сингулярных структур, локализованных структур, периодических по времени, решения, допускающие дисперсионную турбулентность, и решения, допускающие пространственно-временное хаотическое поведение [1]. Имеется класс нелинейных волновых уравнений (солитонных уравнений), которые обладают специальным свойством полной интегрируемости и для которых в настоящее время существует обширнейшая литература. Примерами таких систем служат уравнение синус-Гордон [2], модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ) [3] и кубическое нелинейное уравнение Шредингера [4]. При наложенных периодических пространственных граничных условиях эти уравнения допускают частные решения, локализованные в пространстве и гомоклинические по времени.

Чтобы извлечь качественную информацию из моделей, описываемых УрЧП, часто оказывается необходимо применить численные методы решения той или иной задачи, что приводит к необходимости использования разнообразных схем дискретизации. Для

*Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, UK. E-mail: V.M.Rothos@lboro.ac.uk

исследования динамики при больших временах качественные характеристики системы приобретают первоочередное значение. В частности, значительный интерес представляет поведение частных решений дискретных моделей в случае, когда интегрируемость нарушается каким-либо (диссипативным или гамильтонова вида) возмущением уравнения. Более точно, при исследовании глобального поведения почти интегрируемых решеточных уравнений мы считаем, что нужно опираться на интуицию, обеспеченную опытом работы в области теории дискретных динамических систем, и применять методы, используемые при исследовании решеточных моделей.

За последние годы достигнут значительный прогресс в области дискретных интегрируемых систем и связанных с ними разностных уравнений. Значимость дискретных пространственно-временных моделей в математической физике теперь общепризнана. Последующее развитие в этой области было в основном обеспечено голландской группой исследователей (см. работу Найхофа и Капеля [5] и приведенную там литературу).

В настоящей работе проводится исследование существования гомоклинических орбит для почти интегрируемого решеточного уравнения мКдФ

$$(p-r)\frac{u_{m+1}^n}{u_{m+1}^{n+1}} - (q-r)\frac{u_m^{n+1}}{u_{m+1}^{n+1}} = (p+r)\frac{u_m^{n+1}}{u_m^n} - (q+r)\frac{u_{m+1}^n}{u_m^n}. \quad (1.1)$$

Переменная $u = u_m^n$ считается динамической (полевой) переменной, определенной в узлах решетки $(n, m) \in \mathbb{Z}$, а числа $p, q \in \mathbb{C}$ считаются параметрами решетки. Уравнение (1.1) получается в подходе непосредственной линеаризации (см. [5] и приведенную там литературу). Сначала рассмотрим *интегрируемую решеточную* версию уравнения мКдФ, представляющую собой нелинейное УрЧП, т.е. рассмотрим систему, в которой дискретизованы как пространственные, так и временные переменные. Мы покажем, что уравнение с периодическими граничными условиями по дискретному времени допускает решения, которые сходятся гомоклинично по “дискретному” времени к гиперболической фиксированной точке. Решеточное уравнение мКдФ рассматривается как дискретное эволюционное уравнение по отношению к индексу n (в непрерывном пределе этот индекс переходит в переменную времени t), и будет предполагаться, что полевая переменная u_m^n удовлетворяет четным периодическим граничным условиям:

$$\mathcal{L} = \left\{ u_{m+M}^n = u_m^n, \quad u_{M-m}^n = u_m^n, \quad M \in 2\mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad h = \frac{2\pi}{M} \right\}. \quad (1.2)$$

В данной работе получены необходимые условия сохранения гомоклинической структуры решений решеточного уравнения мКдФ при малых диссипативных возмущениях. Для этого сначала исследуется вопрос о существовании гомоклинических орбит, связанных с гиперболическими фиксированными точками невозмущенного уравнения с помощью преобразования Беклунда, а затем устанавливается сохранение этих орбит при малых диссипативных возмущениях. Одним из методов, доказавших свою значимость в теории динамических систем, является метод Мельникова [6], [7]. Этот метод задает способ измерения расстояния между стабильными и нестабильными многообразиями, соответствующими некоторому набору инвариантных седловых точек, для возмущенной интегрируемой системы, которая исходно обладала гомоклинической структурой.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 содержатся некоторые определения итерационных отображений и приводятся основные положения теории решеточного уравнения МКдФ как интегрируемого нелинейного УрЧП. В разделе 3 получены аналитическое выражение для гомоклинических орбит по дискретному времени n с помощью преобразования Беклунда и формула для градиента отдельной постоянной движения, вычисленной на гомоклинических орбитах. В разделе 4 с помощью метода Мельникова и геометрических соображений выводятся необходимые условия сохранения гомоклинических решений решеточного уравнения МКдФ при диссипативных возмущениях.

2. ИНТЕГРИРУЕМОЕ РЕШЕТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ МКдФ

В данном разделе приводятся некоторые определения из области конечномерных отображений и дается обзор основных свойств решеточного уравнения МКдФ.

2.1. Седловые точки и сепаратрисы. Обозначим через F некоторый диффеоморфизм. Точка $x_0 = F(x_0)$ называется фиксированной точкой отображения F . Фиксированные точки классифицируются в зависимости от спектра матрицы $DF(x_0)$. Особый интерес представляют собой гиперболические фиксированные точки. Фиксированная точка x_0 называется *гиперболической*, если хотя бы некоторые из собственных значений матрицы $DF(x_0)$ не лежат на единичной окружности. С гиперболическими фиксированными точками можно ассоциировать инвариантные объекты, играющие важную роль в динамике.

Пусть $\delta > 0$ — малый положительный параметр. Множество точек, которые никогда не выйдут за пределы δ -окрестности точки x_0 , называется *локальным стабильным многообразием* (или *локальной стабильной сепаратрисой*):

$$W_{\text{loc}}^s(x_0) = \{x: \forall n \geq 0 \|F^n - x_0\| \leq \delta\}. \quad (2.1)$$

Локальным нестабильным многообразием (или *локальной нестабильной сепаратрисой*) называется локальное стабильное многообразие обратного отображения F^{-1} :

$$W_{\text{loc}}^u(x_0) = \{x: \forall n \geq 0 \|F^{-n} - x_0\| \leq \delta\}. \quad (2.2)$$

Если параметр δ достаточно мал, то локальное многообразие представляет собой образ единичного круга при некотором гладком (аналитическом) отображении. Размерность круга совпадает с числом собственных значений оператора $DF(x_0)$, лежащих вне (для локального нестабильного многообразия) или внутри (для локального стабильного многообразия) единичного круга.

Итерации точек, лежащих на локальной стабильной сепаратрисе, сходятся к фиксированной точке. Это позволяет определить *глобальную стабильную сепаратрису* как множество всех точек, итерации которых сходятся к фиксированной точке:

$$W^s(x_0) = \{x: \lim_{n \rightarrow +\infty} F^n = x_0\}.$$

Будем называть *глобальным нестабильным многообразием* стабильное многообразие обратного отображения F^{-1} :

$$W^u(x_0) = \{x: \lim_{n \rightarrow -\infty} F^n = x_0\}.$$

Глобальные стабильные и нестабильные многообразия могут быть получены итерациями локальных многообразий.

Локальная сепаратриса представляет собой вложение единичного диска. Следовательно, она не имеет самопересечений, поскольку отображение F есть диффеоморфизм, и соответствующая глобальная сепаратриса не может пересекаться сама с собой. Легко видеть, что если отображение имеет две гиперболические точки, то их нестабильные (равно как и стабильные) многообразия не пересекаются.

Точка пересечения двух инвариантных многообразий, связанных с одной и той же фиксированной точкой, называется *гомоклинической точкой*. Поскольку оба эти многообразия содержат фиксированную точку x_0 , эта точка исключается из множества гомоклинических точек. Точка называется *гетероклинической*, если она принадлежит пересечению сепаратрис, связанных с двумя различными фиксированными точками.

2.2. Интегрируемость решеточного уравнения мКдФ. Решеточное уравнение мКдФ (1.1) с периодическими граничными условиями следует из дискретной версии принципа наименьшего действия. Действие для решеточного уравнения мКдФ имеет вид [8]

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} \{y_{m+1}^n (y_{m+1}^{n+1} + y_m^n) + F(y_m^n - y_{m+1}^{n+1} + \sigma_2) - F(y_m^n - y_{m+1}^{n+1} + \sigma_1)\} \equiv \\ &\equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} L(u_m^n, u_{m+1}^n, u_{m+1}^{n+1}, u_m^{n+1}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $u_m^n = e^{y_m^n}$, функция $F(x)$ связана с функцией двойного логарифма,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \ln(1 + e^{i\xi}) d\xi,$$

а параметры σ_1, σ_2 связаны с параметрами решетки p, q :

$$e^{\sigma_1} = qp, \quad e^{\sigma_2} = pq.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (2.3) получаются с помощью вариации действия S по переменным u_m^n ,

$$\frac{\delta S}{\delta u_m^n} = 0.$$

Другое важное свойство решеточного уравнения мКдФ, которое непосредственно связано с интегрируемостью этой системы, – это условие совместности переопределенной вспомогательной линейной системы, известное как пара Лакса [8]:

$$\begin{aligned} \phi_{m+1}^n(k) &= V_{n,m}(k) \phi_m^n, \\ \phi_m^{n+1}(k) &= U_{n,m}(k) \phi_m^n, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где k – спектральный параметр, матрица $V_{n,m}$ имеет вид

$$V_{n,m}(k) = \begin{pmatrix} \frac{q}{q-k} & \frac{v_{m+1}^n}{q-k} \\ \frac{k^2}{q-k} \frac{1}{v_m^n} & \frac{q}{q-k} \frac{v_{m+1}^n}{v_m^n} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

а $U_{n,m}$ — это матрица, получающаяся из (2.5) при заменах $q \rightarrow p$ и $(n, m+1) \rightarrow (n+1, m)$.

Обозначим через $M_{n,m}(k, u_m^n)$ фундаментальную матрицу пары Лакса, т.е. матричное решение уравнений (2.4) с начальными условиями M_0 , представляющими собой единичную матрицу размера 2×2 . Характеристический многочлен

$$\det(M_{n,m}(k, u_m^n) - \lambda I) = 0 \quad (2.6)$$

задает инвариантную алгебраическую кривую. Подстановкой

$$\mathcal{M} = \lambda - \frac{\operatorname{tr} M_{n,m}(k)}{2}$$

можно привести эту кривую к гиперэллиптическому виду:

$$\mathcal{M}^2 = \left(\frac{\operatorname{tr} M_{n,m}(k)}{2} \right)^2 - \det M_{n,m}(k). \quad (2.7)$$

Определим функцию Δ в виде

$$\Delta: \mathbb{C} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Delta(k, u_m^n) = \operatorname{tr} M_{n,m}(M; k, u_m^n). \quad (2.8)$$

Спектральный параметр $k \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$-2D \leq \Delta(k, u_m^n) \leq 2D, \quad (2.9)$$

где D — константа, а критическая точка k_c функции Δ задается условием

$$\left. \frac{d\Delta(k, u_m^n)}{dk} \right|_{k=k_c} = 0. \quad (2.10)$$

Важное следствие, вытекающее из интеграла движения $\mathcal{F}_j: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$, имеет вид

$$\mathcal{F}_j(u_m^n) = \frac{1}{D} \Delta(k_j^c, u_m^n).$$

3. АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ И ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ

3.1. Анализ линеаризованного уравнения. Ясно, что фиксированные решения имеют вид $\hat{u}_m^n = e^{2(-1)^m i \pi}$. Предположим, что малые возмущения $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$ растут экспоненциально быстро ввиду присутствия на пространственном отрезке $(0, 1)$ линейно нестабильных мод непрерывного уравнения мКдФ:

$$\begin{aligned} u_m^n &= \hat{u}_m^n + \eta \varphi_m^n, \quad 0 < \eta \ll 1, \\ \varphi_m^n &= \Omega_k^n e^{i \mathcal{A}_k m}, \quad \mathcal{A}_k = \frac{2\pi k}{M}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

и $\hat{u}_m^n$ есть решение уравнения (1.1), $M \in 2\mathbb{Z}_+$ — полное число узлов решетки в пространственном интервале $(0, 1)$ и $k = -M/2, \dots, (M/2) - 1$.

Линеаризуя уравнение (1.1), получим

$$p(\varphi_{m+1}^n + \varphi_m^n) + q(\varphi_{m+1}^n + \varphi_{m+1}^{n+1}) = p(\varphi_{m+1}^{n+1} + \varphi_m^{n+1}) + q(\varphi_m^{n+1} + \varphi_m^n). \quad (3.2)$$

С помощью прямых вычислений можно получить уравнение на собственные значения Ω_k оператора отображения:

$$\Omega_k = \frac{\mathcal{B} + \cos \mathcal{A}_k}{1 + \mathcal{B} \cos \mathcal{A}_k} + i \frac{-pq(p^2 + q^2)^{-1} \sin \mathcal{A}_k}{1 + \mathcal{B} \cos \mathcal{A}_k}, \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{B} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \quad h = \frac{2\pi}{M} \ll 1. \quad (3.4)$$

Условие стабильности $|\Omega_k| \leq 1$ при этом принимает вид $\cos \mathcal{A}_k \leq 1$. Оно нарушается для волновых чисел $\mathcal{A}_k \simeq 0$ при $k = 0$. Нестабильными волновыми числами называются те числа, при которых $|\Omega_k| \geq 1$.

3.2. Аналитические формулы для гомоклинических орбит. Будем строить гомоклинические орбиты для гиперболических фиксированных точек решеточного уравнения мКдФ с помощью преобразования Беклунда (детальное описание преобразования Беклунда можно найти, например, в книге [9]). Невозмущенное решеточное уравнение мКдФ имеет неустойчивую гиперболическую фиксированную точку $\hat{u}_m^n$. В конкретном примере преобразования Беклунда будут использованы для построения гомоклинических орбит с помощью итераций преобразования, в которых будут принимать участие все моды — неустойчивые и стабильные.

Обозначим через ϕ_m^n фиксированное решение пары Лакса в точке (k_d, u_m^n) , где k_d — двойная критическая точка функции Δ , т.е. это решение удовлетворяет условию (2.10), и при этом $\Delta(k_d, u_m^n) = \pm 2D$. Зададим (2×2) -матрицу преобразования $\Gamma_{n,m}$ в виде

$$\Gamma_{n,m} = \begin{pmatrix} -\bar{k} - \alpha_{n,m} & \beta_{n,m} \\ \gamma_{n,m} & -\bar{k} - \delta_{n,m} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{n,m} &= \frac{k}{D} (|\phi_m^{n,1}|^2 + \bar{k}^2 |\phi_m^{n,2}|^2), & \delta_{n,m} &= \bar{\alpha}_{n,m}, \\ \beta_{n,m} &= \frac{\phi_m^{n,1} \bar{\phi}_m^{n,2}}{D} (\bar{k}^2 - |k|^2), & \gamma_{n,m} &= -\bar{\beta}_{n,m}, & D &= |\phi_m^{n,1}|^2 + |k|^2 |\phi_m^{n,2}|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Также введем определения

$$\begin{aligned} U_m^n &= p \left(\bar{k} + \alpha_{n-1,m} + \left(1 - \frac{k^2}{p^2} \right) + \frac{p-k}{v_m^n} \beta_{n,m} \right) \times \\ &\times \left(-\bar{\beta}_{n-1,m} + \frac{p-k}{p} \frac{\bar{k} + \bar{\alpha}_{n-1,m}}{v_m^{n-1}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\Phi_m^n(k) = \Gamma_{n,m}(k_d) \phi_m^n(k). \quad (3.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть u_m^n – решение решеточного уравнения МКДФ с двойной критической точкой k_d , а ϕ_m^n – общее решение пары Лакса в точке (k_d, u_m^n) . Определим функции U_m^n и $\Phi_m^n(k)$ с помощью формул (3.7) и (3.8). Тогда получим, что:

- 1) функция U_m^n также представляет собой решение решеточного уравнения МКДФ;
- 2) $\Phi_m^n(k)$ дает решение пары Лакса (2.4) в точке (k, U_m^n) ;
- 3) последовательность U_m^n гомоклинично сходится к фиксированному решению $\hat{u}_m^n$, так что $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} U_m^n = e^{2(-1)^m i\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функция $\Phi_m^n(k)$ задает решение пары Лакса в точке (k, U_m^n) при условии, что функция ϕ_m^n задает решение уравнений (2.4) в точке (k, u_m^n) . Из уравнений пары Лакса получим

$$\begin{aligned}\Phi_{m+1}^n - V_{n,m}(U_m^n)\Phi_m^n &= [\Gamma_{n,m+1}V_{n,m}(u_m^n) - V_{n,m}(U_m^n)\Gamma_{n,m}]\Phi_m^n, \\ \Phi_m^{n+1} - U_{n,m}(U_m^n)\Phi_m^n &= [\Gamma_{n+1,m}U_{n,m}(u_m^n) - U_{n,m}(U_m^n)\Gamma_{n,m}]\Phi_m^n.\end{aligned}$$

Таким образом, если выполняются равенства

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,m+1}V_{n,m}(u_m^n) - V_{n,m}(U_m^n)\Gamma_{n,m} &= 0, \\ \Gamma_{n+1,m}U_{n,m}(u_m^n) - U_{n,m}(U_m^n)\Gamma_{n,m} &= 0,\end{aligned}\tag{3.9}$$

то предложение будет доказано. В компонентной форме записи уравнения (3.9) вместе с определениями (3.5), (3.7) оказываются эквивалентными системе из восьми алгебраических уравнений. В самом деле, система

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,m+1} &= V_{n,m}(U_m^n)\Gamma_{n,m}V_{n,m}^{-1}(u_m^n), \\ \Gamma_{n+1,m} &= U_{n,m}(U_m^n)\Gamma_{n,m}U_{n,m}^{-1}(u_m^n)\end{aligned}$$

задает следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\bar{k} + \alpha_{n+1,m}) &= \left(\bar{k} + \alpha_{n,m} + \frac{p-k}{p} \frac{1}{v_m^{n+1}} \beta_{n,m} \right) - \\ &\quad - \frac{U_m^{n+1}}{p} \left(\gamma_{n,m} + (p-k) \frac{\bar{k} + \delta_{n,m}}{p v_m^{n+1}} \right), \\ \mathcal{P}\beta_{n+1,m} &= (\bar{k} + \alpha_{n,m}) \frac{v_m^n}{p} + \beta_{n,m} \frac{v_m^n}{v_m^{n+1}} - \\ &\quad - \frac{U_m^{n+1}}{p} \left(\bar{\beta}_{n,m} \frac{v_m^n}{p} + (\bar{k} + \bar{\alpha}_{n,m}) \frac{v_m^n}{v_m^{n+1}} \right), \\ \mathcal{P}\gamma_{n+1,m} &= -\frac{k^2}{p} \frac{1}{U_m^n} \left(\bar{k} + \alpha_{n,m} + \frac{\beta_{n,m}}{v_m^{n+1}} \frac{p}{p-k} \right) + \\ &\quad + \frac{U_m^{n+1}}{U_m^n} \left(\gamma_{n,m} + \frac{\bar{k} + \delta_{n,m}}{v_m^n} \frac{p-k}{p} \right), \\ \mathcal{P}(\bar{k} + \delta_{n+1,m}) &= -\frac{k^2}{p U_m^n} \left((\bar{k} + \alpha_{n,m}) \frac{v_m^n}{p} + \beta_{n,m} \frac{v_m^n}{v_m^{n+1}} \right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{U_m^{n+1}}{U_m^n} \left(\gamma_{n,m} \frac{v_m^n}{p} + (\bar{k} + \delta_{n,m}) \frac{v_m^n}{v_{m+1}^{n+1}} \right), \quad (3.10) \\
\mathcal{Q}(\bar{k} + \alpha_{n,m+1}) &= \left(\bar{k} + \alpha_{n,m} + \frac{q-k}{q} \frac{\beta_{n,m+1}}{v_{m+1}^{n+1}} \right) - \\
& - \frac{U_{m+1}^n}{q} \left(\gamma_{n,m} + \frac{q-k}{q} \frac{\bar{k} + \delta_{n,m}}{v_{m+1}^n} \right), \\
\mathcal{Q}\beta_{n,m+1} &= \left((\bar{k} + \alpha_{n,m}) \frac{v_m^n}{q} + \beta_{n,m} \frac{v_m^n}{v_{m+1}^n} \right) - \\
& - \frac{U_{m+1}^n}{q} \left(\gamma_{n,m} \frac{v_m^n}{q} + (\bar{k} + \delta_{n,m}) \frac{v_m^n}{v_{m+1}^n} \right), \\
\mathcal{Q}\gamma_{n,m+1} &= -\frac{k^2}{qU_m^n} \left(\bar{k} + \alpha_{n,m} + \frac{q-k}{q} \frac{\beta_{n,m}}{v_{m+1}^n} \right) + \\
& + \frac{U_{m+1}^n}{U_m^n} \left(\gamma_{n,m} + \frac{q-k}{q} \frac{\bar{k} + \delta_{n,m}}{v_{m+1}^n} \right), \\
\mathcal{Q}(\bar{k} + \delta_{n,m+1}) &= -\frac{k^2}{qU_m^n} \left((\bar{k} + \alpha_{n,m}) \frac{v_m^n}{q} + \frac{v_m^n}{v_{m+1}^n} \beta_{n,m} \right) + \\
& + \frac{U_m^{n+1}}{U_m^n} \left(\gamma_{n,m} \frac{v_m^n}{q} + (\bar{k} + \delta_{n,m}) \frac{v_m^n}{v_{m+1}^n} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{P} = \left(1 - \frac{k^2}{p^2} \right)^{-1}, \quad \mathcal{Q} = \left(1 - \frac{k^2}{q^2} \right)^{-1}.$$

Таким образом, задача свелась к проверке справедливости этих восьми уравнений. Это непосредственно следует из представлений для величин $\alpha_{n,m}$, $\beta_{n,m}$, $\gamma_{n,m}$, $\delta_{n,m}$ и U_m^n .

Рассмотрим теперь $u_m^n = \hat{u}_m^n$ (фиксированную точку) как потенциальную функцию в паре Лакса; тогда решения уравнений (2.4) примут вид

$$\phi_m^{n(-)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} \lambda_-^m, \quad \phi_m^{n(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} b^n \lambda_+^m, \quad (3.11)$$

где

$$\lambda_{\pm} = a \pm \frac{ka}{q}, \quad a := \frac{q}{q-k}, \quad b := \frac{p+k}{p-k}, \quad (3.12)$$

и $k = k_d$ есть двойная критическая точка отображения Δ , т.е. получим, что

$$\Delta(k) = 2D, \quad \frac{d}{dk} \Delta(k) = 0,$$

где

$$\Delta(k) = \left(a - \frac{ka}{q} \right)^m + b^n k \left(a + \frac{ka}{q} \right)^m, \quad |M_{n,m}| := 2b^n k \left(a^2 - \left(\frac{ka}{q} \right)^2 \right)^m$$

и

$$\det M_{n,M}(\phi^-, \phi^+) = D^2 \det M_{n,0}, \quad D^2 := \prod_{m=0}^{M-1} (\lambda_- \lambda_+)^m. \quad (3.13)$$

Подставляя выражения (3.11) в формулу (3.7), получим следующие аналитические выражения для гомоклинических орбит:

$$U_m^n = e^{2(-1)^m i\pi} \times \frac{1 - P^2 \cos^2(mhw_1 + x) \operatorname{sech}^2(nhw_2 + \tau) + 2iP \cos(mhw_1 + x) \operatorname{sech}(nhw_2 + \tau)}{1 + P^2 \cos^2(mhw_1 + x) \operatorname{sech}^2(nhw_2 + \tau)}, \quad (3.14)$$

где

$$P = \frac{\operatorname{sh} w_2 h}{\sin w_1 h}, \quad h \ll 1, \quad (3.15)$$

$w_{1,2}$ – некоторые постоянные, $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} U_m^n = \hat{u}_m^n$.

3.3. Градиент инварианта $\Delta(k, u_m^n)$. Здесь мы выведем явную формулу для градиента важного интеграла движения, который в дальнейшем используется для измерения функции расстояния между инвариантными многообразиями.

След фундаментальной матрицы пары Лакса представляет собой важный интеграл движения для уравнения синус-Гордон. Соответствующие инварианты $\mathcal{F}_j(u_m^n)$ для решеточного уравнения мКдФ имеют вид

$$\mathcal{F}_j(u_m^n) = \frac{1}{D} \Delta(k_j^c(u_m^n), u_m^n, u_{m+1}^n). \quad (3.16)$$

Инварианты $\mathcal{F}_j$ используются в разделе 4 для построения функций Мельникова.

ЛЕММА. Пусть $k_j^c(u_m^n, u_{m+1}^n)$ – простая критическая точка преобразования Δ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}_j(u_m^n, u_{m+1}^n)}{\delta u_m^n} &= \frac{1}{D} \frac{\delta \Delta(k_j^c(u_m^n), u_m^n, u_{m+1}^n)}{\delta u_m^n}, \\ \frac{\delta \mathcal{F}_j(u_m^n, u_{m+1}^n)}{\delta u_{m+1}^n} &= \frac{1}{D} \frac{\delta \Delta(k_j^c(u_m^n), u_m^n, u_{m+1}^n)}{\delta u_{m+1}^n}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Delta(k, u_m^n)}{\delta u_m^n} &= \frac{2i}{q - k} \operatorname{tr} \left[M_{n,m+1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k^2}{v_m^n} & -q \frac{v_{m+1}^n}{v_m^n} \end{pmatrix} M_{n,m} M_{n,m} \right], \\ \frac{\delta \Delta(k, u_m^n)}{\delta u_{m+1}^n} &= \frac{2i}{q - k} \operatorname{tr} \left[M_{n,m+1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & v_{m+1}^n \\ 0 & q \frac{v_{m+1}^n}{v_m^n} \end{pmatrix} M_{n,m} M_{n,m} \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

$v_m^n = e^{2iu_m^n}$ и $M_{n,m} = [\phi_m^{n(-)}, \phi_m^{n(+)}]$. Здесь $\phi_m^{n(\pm)} = (\phi_m^{n(\pm 1)}, \phi_m^{n(\pm 2)})$ суть две функции Блоха для пары Лакса (2.4) и $|M_{n,m}| = \det M_{n,m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку k_j^c есть критическая точка, то $\Delta'(k_j^c(u_m^n), u_m^n) = 0$ и

$$\frac{\delta k_j^c}{\delta u_m^n} = -\frac{1}{\Delta''} \frac{\delta \Delta'}{\delta u_m^n}.$$

Тогда k_j^c – дифференциальная функция,

$$D \frac{\delta \mathcal{F}_j(k, u_m^n)}{\delta u_m^n} = \frac{\delta \Delta}{\delta u_m^n} \Big|_{k=k_j^c} + \frac{\delta \Delta}{\delta k} \Big|_{k=k_j^c} \frac{\delta k_j^c}{\delta u_m^n} = \frac{\delta \Delta}{\delta u_m^n} \Big|_{k=k_j^c}.$$

Обозначим через $M_{n,m}$ фундаментальную матрицу пары Лакса с потенциальной функцией v^n . Варьируя v_m^n , можно получить вариационное уравнение на вариацию $M_{n,m}$ при фиксированном k :

$$\begin{aligned} M_{n,m+1} &= V_{n,m} M_{n,m}, \\ \delta M_{n,m+1} &= V_{n,m} \delta M_{n,m} + \delta V_{n,m} M_{n,m}, \\ \delta V_{n,m} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q-k} \delta v_{m+1}^n \\ \frac{k^2}{q-k} \delta \left(\frac{1}{v_m^n} \right) & \frac{q}{q-k} \delta \left(\frac{v_{m+1}^n}{v_m^n} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $\delta M_{n,m} = M_{n,m} A_{n,m}$, где $A_{n,m}$ – неизвестная матрица размера 2×2 , которую надо найти,

$$\begin{aligned} \delta M_{n,m+1} &= M_{n,m+1} A_{n,m+1} = V_{n,m} M_{n,m} A_{n,m} + \delta V_{n,m} M_{n,m} = \\ &= M_{n,m+1} A_{n,m} + \delta V_{n,m} M_{n,m}. \end{aligned}$$

Тем самым получим

$$A_{n,m+1} - A_{n,m} = M_{n,m+1}^{-1} \delta V_{n,m} M_{n,m}, \quad A_{n,0} = 0. \quad (3.18)$$

Решая систему (3.18), получим формулу

$$\delta M_{n,m} = M_{n,M} \left[\sum_{j=1}^{M-1} M_{n,j}^{-1} \delta V_{n,j-1} M_{n,j-1} \right], \quad \delta M_{n,0} = 0.$$

Тогда

$$\delta \Delta(k, u_m^n) = \text{tr} \left\{ M_{n,M} \left[\sum_{j=1}^{M-1} M_{n,j}^{-1} \delta V_{n,j-1} M_{n,j-1} \right] \right\},$$

и в итоге получаются уравнения (3.17). Подставляя представление для $M_{n,m}$ в формулы (3.17), получим вариационные выражения

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Delta(k, u_m^n)}{\delta u_m^n} &= \frac{2i}{q-k} \frac{1}{|M_{n,m+1}|} \left\{ -\frac{k^2}{v_m^n} [\phi_{m+1}^{n(+1)} (\phi_m^{n(-1)} \phi_M^{n(-1)} + \phi_m^{n(+1)} \phi_M^{n(-2)}) + \right. \\ &\quad + \phi_{m+1}^{n(-2)} (\phi_m^{n(-1)} \phi_M^{n(+1)} + \phi_m^{n(+1)} \phi_M^{n(+2)})] + \\ &\quad + q \frac{v_{m+1}^n}{v_m^n} [\phi_{m+1}^{n(-1)} (\phi_m^{n(-1)} \phi_M^{n(+1)} + \\ &\quad + \phi_m^{n(+2)} \phi_M^{n(+2)}) - \phi_{m+1}^{n(+1)} (\phi_m^{n(-2)} \phi_M^{n(-1)} + \phi_m^{n(+2)} \phi_M^{n(-2)})] \left. \right\}, \\ \frac{\delta \Delta(k, u_{m+1}^n)}{\delta u_{m+1}^n} &= \frac{2i}{q-k} \frac{1}{|M_{n,m+1}|} \left\{ v_{m+1}^n [\phi_m^{n(+2)} (\phi_m^{n(-2)} \phi_M^{n(-1)} + \phi_m^{n(+2)} \phi_M^{n(-2)}) - \right. \\ &\quad - \phi_m^{n(-2)} (\phi_m^{n(-2)} \phi_M^{n(+1)} + \phi_m^{n(+2)} \phi_M^{n(+2)})] + \\ &\quad + q \frac{v_{m+1}^n}{v_m^n} [\phi_m^{n(-1)} (\phi_m^{n(-2)} \phi_M^{n(+1)} + \\ &\quad + \phi_m^{n(+2)} \phi_M^{n(+2)}) - \phi_m^{n(+1)} (\phi_m^{n(-2)} \phi_M^{n(-1)} + \phi_m^{n(+2)} \phi_M^{n(-2)})] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя теперь выражения (3.11) и (3.14) в формулы (3.19), получим формулы для вариации $\delta \Delta / \delta u_m^n$, вычисленной на гомоклинических орбитах. Это завершает доказательство леммы.

4. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО РЕШЕТОЧНОГО УРАВНЕНИЯ мКдФ

Установим теперь сохранение свойства гомоклиничности для орбит (3.14) возмущенного решеточного уравнения мКдФ

$$u_m^{n+1} = \mathbf{F}(u_m^{n-1}, u_{m\pm 1}^n) + \varepsilon \mathbf{G}(u_m^n, u_{m\pm 1}^n), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{G}$ обозначает возмущение,

$$\mathbf{G} := \text{bg}_1(u_m^n) + \text{cg}_2(u_{m\pm 1}^{n\pm 1}).$$

Используя ранее построенные геометрические структуры, будем строить орбиты возмущенного решеточного уравнения мКдФ (4.1), которые обладают свойством гомоклиничности по отношению к гиперболической (фиксированной) точке $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$. Это построение осуществляется в два этапа. Пусть задана начальная точка в нестабильном многообразии точки $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$. Покажем, что орбиты в положительном направлении попадают в центрально-стабильное многообразие $W_\varepsilon^{\text{cs}}$ окрестности $\mathcal{M}_\varepsilon$ при подходящем образом выбранных параметрах b, c . Затем покажем, что возмущенные орбиты сходятся к фиксированной точке $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$ в положительном направлении по времени $n \rightarrow +\infty$. При этом основным используемым при доказательстве методом является метод Мельникова.

Возмущенная система имеет фиксированную седловую точку $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$, в то время как анализ линейной стабильности в полном фазовом пространстве показывает, что точка $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$ действительно седловая, а из теории инвариантных многообразий следует, что область $W^u(\hat{u}_m^n(\varepsilon))$ существует и имеет размерность 2. Область $W^s(\hat{u}_m^n(\varepsilon))$ при этом также существует и имеет коразмерность 2, а область $W_\varepsilon^{\text{cs}}$ имеет коразмерность 1. Область перекрытия $W^u(\hat{u}_m^n(\varepsilon)) \cap W_\varepsilon^{\text{cs}}$ при этом оказывается одномерной.

Таким образом, нестабильные, стабильные и центрально-стабильные многообразия отображения $\mathbf{F}$ (ср. с решеточным уравнением мКдФ), связанные с величинами $\hat{u}_m^n$, определены следующим образом:

$$\begin{aligned} W^u &= \{u_m^n \in \mathcal{L}: \lim_{n \rightarrow -\infty} \mathbf{F}^n(u_m^n) = \hat{u}_m^n\}, \\ W^s &= \{u_m^n \in \mathcal{L}: \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{F}^n(u_m^n) = \hat{u}_m^n\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

и $W^s(\hat{u}_m^n(\varepsilon)) \subset W_\varepsilon^{\text{cs}}$ и $\mathcal{M}_\varepsilon$.

В возмущенной системе получим, что локальные стабильные и нестабильные многообразия $W_{\varepsilon, \text{loc}}^{\text{s}, u}$ возмущенной точки $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$ оказываются “ ε -близки” к соответствующим многообразиям для невозмущенной точки $\hat{u}_m^n = e^{2(-1)^m i \pi}$.

Рассмотрим теперь фиксированную седловую точку $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$ на инвариантной плоскости Π и будем искать орбиту вне плоскости Π , которая гомоклинична к $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$. При этом мы используем геометрические методы для проверки того, что орбиты для почти интегрируемого решеточного уравнения мКдФ сохраняют свойство гомоклиничности. Помимо этого метод, с помощью которого ищется ответ на вопрос о том, существует ли непустое пересечение множеств $W_{\text{loc}}^u(\hat{u}_m^n(\varepsilon))$ и $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon) \subset W_\varepsilon^{\text{cs}}$, основывается на измерениях Мельникова [6].

Суть метода Мельникова такова. Рассмотрим области $W_\varepsilon^{\text{cs}}$ и $W_{\varepsilon, \text{loc}}^u(\hat{u}_m^n(\varepsilon))$ для возмущенного решеточного уравнения мКдФ. Возмущение подбирается таким, чтобы в случае, когда внешние параметры лежат в некотором открытом множестве, существовали орбиты, сходящиеся к $\hat{u}_m^n(\varepsilon)$ при $n \rightarrow \pm\infty$. При этом расстояние между стабильным и нестабильным многообразиями, измеряемое вдоль касательного вектора ν_m^n , имеет вид [7]

$$d = \varepsilon(\mathcal{D}^u(0) - \mathcal{D}^s(0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \varepsilon M_{\mathcal{F}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.3)$$

где

$$M_{\mathcal{F}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} \nu_m^n(U_m^n) G(U_m^{n-1}) \quad (4.4)$$

и величины ν_m^n определены формулами (3.19) и должны быть вычислены на гомоклинической орбите U_m^n .

Функция Мельникова (4.4) при этом имеет вид

$$M_{\mathcal{F}}(x, \tau; h, M) = bS_1 + cS_2, \quad (4.5)$$

где

$$S_{1,2}(x, \tau; h, M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\delta \mathcal{F}(U_m^n)}{\delta u_m^n} g_{1,2}(U_m^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n^{(1,2)}. \quad (4.6)$$

Полагая $M_{\mathcal{F}} = 0$, получим алгебраическое уравнение, задающее двумерную поверхность в пространстве внешних параметров (b, c):

$$bS_1 + cS_2 = 0.$$

Теперь можно увидеть, что единственными сингулярностями гомоклинических орбит U_m^n являются простые полюсы в точках $\tau_\theta \in i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}$, а потому функция U_m^n аналитична в точках $\tau_\theta + hk$ для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Вышеприведенная сумма при этом сводится к вычислению вычетов функций $s^{(i)}$, $i = 1, 2$. В частности, функция, которая играет важную роль при вычислении бесконечных сумм в формуле (4.5), — это функция χ комплексного аргумента, мероморфная в плоскости $\mathbb{C}$, Ti -периодичная и w -периодичная, множество ее полюсов имеет вид $w\mathbb{Z} + Ti\mathbb{Z}$, при этом все эти полюсы просты и вычеты в них равны единице. Функции $s^{(i)}$ в формуле (4.6):

а) аналитичны на прямой $\mathbb{R}$ и допускают единственную изолированную особую точку в плоскости $\mathbb{C}$;

б) Ti -периодичны при $T > 0$;

в) обладают тем свойством, что

$$|s^{(i)}(\tau)| \leq A_i e^{-c_i |\operatorname{Re} \tau|}, \quad |\operatorname{Re} \tau| \rightarrow \infty,$$

при некоторых величинах констант A_i , $c_i > 0$.

Тогда функция Мельникова $M_{\mathcal{F}}$ оказывается аналитичной на прямой $\mathbb{R}$, имеет только изолированные сингулярности на плоскости $\mathbb{C}$ и является дважды периодической с периодами h, Ti . Более того, функция $M_{\mathcal{F}}(\tau)$ выражается через сумму следующего ряда:

$$M_{\mathcal{F}}(\tau; h) = - \sum_{z \in \mathcal{J}} b \operatorname{Res} \chi_T s^{(1)}|_z + c \operatorname{Res} \chi_T s^{(2)}|_z, \quad (4.7)$$

где $\mathcal{J} := \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < T\}$, а переменная τ параметризует гомоклинические решения. Теперь можно сформулировать результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Рассмотрим почти интегрируемое решеточное уравнение МКДФ (4.1) с периодическими граничными условиями (1.2). Пусть M – фиксированное четное положительное целое число и $h := 2\pi/M < 1$ – вещественная постоянная. Тогда существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любых фиксированных параметров $w_1, w_2, b, c, \varepsilon$ существует изолированное значение τ_0 параметра τ , при котором функция Мельникова $M_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет условиям

$$M_{\mathcal{F}} = 0, \quad \partial_{\tau} M_{\mathcal{F}} \neq 0.$$

При этом возмущенное решеточное уравнение МКДФ допускает существование гомоклинической орбиты $u_m^n(\varepsilon)$, которая дважды асимптотически сходится к фиксированной точке $\hat{u}_m^n(\varepsilon) = e^{2(-1)^m i\pi} + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе развиты геометрические методы исследования поведения гомоклинических решений решеточного уравнения МКДФ с периодическими граничными условиями при малых диссипативных возмущениях. Важную роль при этом играют преобразования Беклунда, с помощью которых построены гомоклинические орбиты решения решеточного уравнения МКДФ в результате элегантной итерации преобразования. Использование критерия Мельникова для дискретных динамических систем позволило показать, что эти орбиты сохраняются при диссипативных возмущениях. При этом функция Мельникова определялась как градиент интеграла движения $\mathcal{F}$, задаваемого с помощью дискретного дискриминанта Флоке, вычисляемого в критических точках.

Благодарности. Автор признателен Институту математических наук Исаака Ньютона (Кембридж) за гостеприимство, оказанное ему во время его пребывания в Кембридже в октябре 2001 г. в рамках программы “Интегрируемые системы”. Работа была поддержана EPSRC (грант № GR/R02702/01) и грантом научных сотрудников университета г. Лавборо.

Список литературы

- [1] D. W. McLaughlin, E. A. Overman. Whiskered tori for integrable PDE's: chaotic behavior in near integrable PDE's. In: Surveys in Applied Mathematics. V. 1. Eds. J. B. Keller et al. New York: Plenum, 1995. P. 83–203.
- [2] N. Ercolani, M. G. Forest, D. W. McLaughlin. Physica. D. 1990. V. 43. P. 349–384.
- [3] V. M. Rothos. Preprint, 2001.
- [4] Y. Li, D. W. McLaughlin. Commun. Math. Phys. 1994. V. 162. № 1. P. 175–214.
- [5] F. W. Nijhoff, H. W. Capel. Acta Appl. Math. 1995. V. 39. P. 133–158.
- [6] B. K. Мельников. Тр. Моск. мат. об-ва. 1965. Т. 12. С. 3–52.
- [7] V. M. Rothos. Dyn. Syst. 2001. V. 16. № 3. P. 279–302.
- [8] H. W. Capel, F. W. Nijhoff, V. G. Papageorgiou. Phys. Lett. A. 1991. V. 155. P. 377–387.
- [9] V. Matveev, M. A. Salle. Darboux Transformations and Solitons. V. 5. Springer Series in Non-linear Dynamics. New York: Springer, 1991.