Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Верховен, М. Музетте, Р. Конт, Общее решение для гамильтонианов с добавленными кубическими и четвертичными потенциалами, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 1, 148–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:47:11

© 2003 г. К. Верховен*, М. Музетте*, Р. Конт†

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ГАМИЛЬТониАНОВ С ДОБАВЛЕННЫМИ КУБИЧНЫМИ И ЧЕТВЕРТИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Двухчастичный гамильтониан с добавленными потенциалом четвертого порядка и дополнительными линейными и неполиномиальными членами проинтегрирован с использованием гиперэллиптических функций в случаях $1 : 6 : 1$ и $1 : 6 : 8$, интегрируемых по Лиувиллю.

Ключевые слова: гамильтониан Хенона–Хейлеса, гамильтоновы системы, разделение переменных, гиперэллиптические функции, солитонные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, обобщенный гамильтониан Хенона–Хейлеса

$$H = \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2 + c_1 X^2 + c_2 Y^2) + aXY^2 - \frac{b}{3}X^3 + \mu Y^{-2} \quad (1)$$

для любого μ оказывается интегрируемым по Лиувиллю [1]–[3] для трех наборов значений $(b/a, c_1, c_2)$, которые связаны [4] с соответствующими стационарными редукциями следующих солитонных уравнений пятого порядка: КдФ₅, уравнения Савады–Котера (СК) и уравнения Каупа–Купершмидта (КК). Каноническое преобразование [5] между случаями СК и КК при $\mu \neq 0$ позволяет [6] разделить переменные в уравнениях Гамильтона–Якоби и получить общее решение уравнений движения в терминах гиперэллиптических функций.

Известно, что гамильтониан системы двух частиц с потенциалом четвертого порядка,

$$H = \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2) - \frac{1}{2}(aX^2 + bY^2) + CX^4 + BX^2Y^2 + AY^4, \quad (2)$$

оказывается интегрируемым по Лиувиллю в следующих четырех случаях [7]–[9]: 1) $A : B : C = 1 : 2 : 1$, a, b произвольны; 2) $A : B : C = 1 : 6 : 1$, $a = b$; 3) $A : B : C = 1 :$

*Dienst Theoretische Natuurkunde, Vrije Universiteit Brussel, Brussels, Belgium.

E-mail: cverhoev@vub.ac.be, mmusette@vub.ac.be

†Service de Physique de l'état Condensé, CEA, Saclay, France.

E-mail: Conte@drecam.saclay.cea.fr

6 : 8, $a = 4b$; 4) $A : B : C = 1 : 12 : 16$, $a = 4b$. Были также получены расширения гамильтониана (2), включающие некоторые линейные и неполиномиальные члены и при этом сохраняющие свойство интегрируемости по Лиувиллю [9], [10], что подтверждает их связь с некоторыми интегрируемыми солитонными уравнениями [11], [12].

Случай 1 с дополнительными обратными членами второго порядка эквивалентен редукции типа движущейся волны [13] системы Манакова двух связанных уравнений НШ. Это отвечает частному случаю двух частиц из расширенной системы Гарнье [14], которая была проинтегрирована Войцеховским [15]. Случай 4 связан [5] с присоединенной системой КдФ, обладающей лаكсовой парой пятого порядка [16].

Авторы работ [5], [17] показали, что случаи 2 и 3 с некоторыми добавленными линейными и обратными квадратичными членами можно связать с системой Хироты–Сатсумы [18]

$$r_t = \frac{1}{2}r_{xxx} + 3rr_x - 6ss_x, \quad s_t = -s_{xxx} - 3rs_x, \quad (3)$$

а также с другой связанной системой типа КдФ,

$$\begin{aligned} f_t &= -\frac{1}{2}(2f_{xxx} + 3ff_{xx} + 3f_x^2 - 3f^2f_x + 6fg_x + 6gf_x), \\ g_t &= \frac{1}{4}(2g_{xxx} + 12gg_x + 6fg_{xx} + 12gf_{xx} + 18f_xg_x - 6f^2g_x + \\ &\quad + 3f_{xxx} + 3ff_{xx} + 18f_xf_{xx} - 6f^2f_{xx} - 6ff_x^2). \end{aligned} \quad (4)$$

В данной работе каноническое преобразование [5], связывающее две расширенные системы, используется для того чтобы применить к этим системам метод, использованный ранее в случаях систем СК и КК уравнения (1) для определения и разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Уравнения движения для случаев 2 и 3 гамильтониана (2) с добавочными линейными и обратными квадратичными членами при этом интегрируются в терминах гиперэллиптических функций.

В разделе 2 рассматриваются интегрируемые случаи гамильтониана Хенона–Хейлеса (1), связанные с уравнениями СК и КК при $\mu \neq 0$, что объясняет метод, примененный нами в работе [6] для интегрирования соответствующих уравнений движения. В разделе 3 рассматривается гамильтониан (2) с дополнительным потенциалом четвертого порядка для случаев 2 и 3 и описывается ранее построенное каноническое преобразование [5], которое связывает случай 1 : 6 : 1 (с дополнительными членами вида $\alpha X^{-2} + \beta Y^{-2}$) и случай 1 : 6 : 8 (с дополнительными членами вида $\gamma X + \delta Y^{-2}$).

Результаты разделов 4 и 5, по нашему мнению, являются новыми. В разделе 4 явно интегрируются уравнения движения в случае 1 : 6 : 8 при $\delta \neq 0$, $\gamma = 0$. В разделе 5 проинтегрирован случай 1 : 6 : 1 с параметрами $\alpha = \beta \neq 0$ и использовано каноническое преобразование, чтобы привести эти решения к решениям случая 1 : 6 : 8 при $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КУБИЧНОГО ГАМИЛЬТониАНА ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

Рассмотрим гамильтонианы Хенона–Хейлеса для уравнений СК и КК, имеющие соответствующие вторые интегралы K_2^2 и k_2^2 и уравнения движения [9], [10]:

$$\text{СК: } \frac{b}{a} = -1, \quad c_1 = c_2, \quad a = \frac{1}{2}, \quad U = X + c_2, \quad V = Y, \quad c = c_1 c_2, \quad (5)$$

$$H \equiv K_1 = \frac{1}{2}(P_U^2 + P_V^2) + \frac{1}{2}UV^2 + \frac{1}{6}U^3 - \frac{c}{2}U + \frac{\mu}{8V^2}, \quad (6)$$

$$K_2^2 = K_{2,0}^2 + \frac{2}{3}\mu U + \mu \frac{P_U^2}{V^2}, \quad (7)$$

$$K_{2,0} = -2P_U P_V - U^2 V - \frac{V^3}{3} + cV, \quad (8)$$

$$U'' = -\frac{1}{2}(V^2 + U^2) - \frac{c}{2}, \quad V'' = -UV + \frac{\mu}{4V^3}, \quad (9)$$

$$\text{КК: } \frac{b}{a} = -16, \quad c_1 = 16c_2, \quad a = \frac{1}{4}, \quad c = c_1 c_2, \quad u = X + 2c_2, \quad V = Y, \quad (10)$$

$$H \equiv k_1 = \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) + \frac{1}{4}uv^2 + \frac{4}{3}u^3 - cu + \frac{1}{2}\frac{\mu}{v^2}, \quad (11)$$

$$k_2^2 = k_{2,0}^2 + \frac{\mu}{3}u + 2\mu \frac{p_v^2}{v^2} + \frac{\mu^2}{v^4}, \quad (12)$$

$$k_{2,0}^2 = p_v^4 - \frac{1}{72}v^6 - \frac{1}{12}u^2 v^4 + up_v^2 v^2 - \frac{1}{3}p_u p_v v^3 + \frac{c}{12}v^4, \quad (13)$$

$$u'' = -\frac{1}{4}v^2 - 4u^2 + c, \quad v'' = -\frac{1}{2}uv + \frac{\mu}{v^3}. \quad (14)$$

Эти уравнения эквивалентны стационарной редукции $\xi = x - ct$ следующих двух интегрируемых УрЧП:

$$\text{СК: } U_t + \left(U_{xxx} + 5UU_{xx} + \frac{5}{3}U^3 \right)_x = 0, \quad (15)$$

$$\text{КК: } u_t + \left(u_{xxx} + 10uu_{xx} + \frac{20}{3}u^3 + 30u_x^2 \right)_x = 0. \quad (16)$$

Оба уравнения связаны с другим интегрируемым УрЧП пятого порядка [19],

$$w_t + (w_{4x} - 5w_x w_{xx} - 5w^2 w_{xx} - 5w w_x^2 + w^5)_x = 0, \quad (17)$$

с помощью преобразования Миуры

$$U = w_x - w^2, \quad u = -w_x - \frac{1}{2}w^2. \quad (18)$$

Вычисляя стационарную редукцию уравнения (17) для w как функции от V , V' и v , v' и определяя выражения

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= -\mu, \quad \Gamma = 6(VK_{2,0} + \lambda P_U), \\ \Omega &= 48(3v^4 k_{2,0}^2 + 6\lambda uv^5 p_v + 12\lambda p_v^3 v^3 - \lambda v^6 p_u + \\ &\quad + 3\lambda^2 uv^4 + 18\lambda^2 v^2 p_v^2 + 12\lambda^3 v p_v + 3\lambda^4), \end{aligned} \quad (19)$$

можно получить следующее каноническое преобразование [5], [20]:

$$u = -\frac{3}{2} \left(-\frac{P_V}{V} + \frac{\lambda}{2V^2} \right)^2 - U, \quad v = \frac{\sqrt{\Gamma}}{V}, \quad (20)$$

$$p_u = \frac{1}{V^3} (3P_V^3 + 3UV^2P_V - P_UV^3) - \frac{3\lambda}{2V^6} \left(UV^4 + 3V^2P_V^2 - \frac{3}{2}\lambda VP_V + \frac{\lambda^2}{4} \right), \quad (21)$$

$$p_v = \frac{1}{4V^2} \left(-2P_V + \frac{\lambda}{V} \right) \sqrt{\Gamma} - \lambda \frac{V}{\sqrt{\Gamma}},$$

$$U = -6 \left(\frac{p_v}{v} + \frac{\lambda}{v^2} \right)^2 - u, \quad V = \frac{\sqrt{\Omega}}{2v^4}, \quad (22)$$

$$P_U = \frac{1}{v^3} (12p_v^3 + 6uv^2p_v - v^3p_u) + \frac{3\lambda}{v^6} (2uv^4 + 12v^2p_v^2 + 12\lambda vp_v + 4\lambda^2), \quad (23)$$

$$P_V = -\frac{1}{v^5} \left(p_v + \frac{\lambda}{v} \right) \sqrt{\Omega} + \lambda \frac{v^4}{\sqrt{\Omega}}. \quad (24)$$

Для случая $\mu = 0$ можно представить выражения (22)–(24) для U, V, P_U, P_V в терминах переменных, которые задают разделение переменных в гамильтониане СК,

$$\begin{aligned} Q_1 &= U + V, & P_1 &= \frac{1}{2}(P_U + P_V), \\ Q_2 &= U - V, & P_2 &= \frac{1}{2}(P_U - P_V). \end{aligned} \quad (25)$$

Это задает следующую замену переменных [21]:

$$\begin{aligned} q_1 &= -6 \frac{p_v^2 - k_{2,0}}{v^2} - u, & p_1 &= \frac{1}{2v^3} (12p_v^3 + 6uv^2p_v - v^3p_u - 12p_vk_{2,0}), \\ q_2 &= -6 \frac{p_v^2 + k_{2,0}}{v^2} - u, & p_2 &= \frac{1}{2v^3} (12p_v^3 + 6uv^2p_v - v^3p_u + 12p_vk_{2,0}), \end{aligned} \quad (26)$$

которую можно применить к гамильтониану КК (11) с учетом того, что $k_{2,0}$ не является константой движения при $\mu \neq 0$. Тогда получим

$$H \equiv k_1 = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{12}(q_1^3 + q_2^3) - \frac{c}{4}(q_1 + q_2) + \frac{\mu}{24} \frac{q_1 - q_2}{k_{2,0}}, \quad (27)$$

$$k_{2,0} = 2(p_2^2 - p_1^2) + \frac{1}{6}(q_2^3 - q_1^3) - \frac{c}{2}(q_2 - q_1), \quad (28)$$

$$q_1' = 2p_1 + \frac{\mu}{6} \frac{(q_1 - q_2)p_1}{k_{2,0}^2}, \quad (29)$$

$$q_2' = 2p_2 - \frac{\mu}{6} \frac{(q_1 - q_2)p_2}{k_{2,0}^2}. \quad (30)$$

Пользуясь этими новыми координатами и вводя выражения

$$f(q_i, p_i) = 2p_i^2 + \frac{1}{6}q_i^3 - \frac{c}{2}q_i, \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

в формулах (27) и (28), получаем, что уравнение Гамильтона–Якоби допускает разделение переменных при произвольном μ .

В терминах переменных (26) второй инвариант k_2^2 может быть записан в двух эквивалентных формах:

$$k_2^2 = -\frac{\mu}{3}q_1 + \left(k_{2,0} + \frac{\mu}{12} \frac{q_1 - q_2}{k_{2,0}}\right)^2, \quad (32)$$

$$k_2^2 = -\frac{\mu}{3}q_2 + \left(k_{2,0} - \frac{\mu}{12} \frac{q_1 - q_2}{k_{2,0}}\right)^2, \quad (33)$$

которые после исключения $\mu(q_1 - q_2)/k_{2,0}$ и $k_{2,0}$ с использованием формул (27) и (28) принимают вид

$$k_2^2 = -\frac{\mu}{3}q_1 + \left(-4p_1^2 - \frac{q_1^3}{3} + cq_1 + 2k_1\right)^2, \quad (34)$$

$$k_2^2 = -\frac{\mu}{3}q_2 + \left(4p_2^2 + \frac{q_2^3}{3} - cq_2 - 2k_1\right)^2. \quad (35)$$

Исключая далее p_1 из уравнений (34) и (29) и p_2 из уравнений (35) и (30), получаем

$$q_1' = \sqrt{2k_1 - \frac{q_1^3}{3} + cq_1 - \sqrt{k_2^2 + \frac{\mu}{3}q_1}} \left(1 + \frac{\mu}{3} \frac{q_1 - q_2}{\left(\sqrt{k_2^2 + \frac{\mu}{3}q_2} + \sqrt{k_2^2 + \frac{\mu}{3}q_1}\right)^2}\right), \quad (36)$$

$$q_2' = \sqrt{2k_1 - \frac{q_2^3}{3} + cq_2 + \sqrt{k_2^2 + \frac{\mu}{3}q_2}} \left(1 - \frac{\mu}{3} \frac{q_1 - q_2}{\left(\sqrt{k_2^2 + \frac{\mu}{3}q_2} + \sqrt{k_2^2 + \frac{\mu}{3}q_1}\right)^2}\right). \quad (37)$$

При $\mu \neq 0$, полагая

$$s_1 = \sqrt{3\frac{k_2^2}{\mu} + q_1}, \quad s_2 = -\sqrt{3\frac{k_2^2}{\mu} + q_2} \quad (38)$$

и определяя выражение

$$P(s) = 2k_1 - \frac{1}{3}\left(s^2 - 3\frac{k_2^2}{\mu}\right)^3 + c\left(s^2 - 3\frac{k_2^2}{\mu}\right) - \sqrt{\frac{\mu}{3}}s, \quad (39)$$

можно привести уравнения (36), (37) к виду

$$s_1' = \frac{\sqrt{P(s_1)}}{s_1 - s_2}, \quad s_2' = -\frac{\sqrt{P(s_2)}}{s_1 - s_2}. \quad (40)$$

Эти уравнения можно решить путем обращения гиперэллиптических интегралов

$$\int_{\infty}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{P(s)}} + \int_{\infty}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{P(s)}} = k_3, \quad (41)$$

$$\int_{\infty}^{s_1} \frac{s ds}{\sqrt{P(s)}} + \int_{\infty}^{s_2} \frac{s ds}{\sqrt{P(s)}} = \xi + k_4, \quad (42)$$

что и дает общее решение системы КК:

$$u = -\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2) + \frac{3}{\mu}k_2^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{s_1' + s_2'}{s_1 + s_2} \right)^2, \quad v^2 = \frac{2\sqrt{3}\mu}{s_1 + s_2}. \quad (43)$$

При $\mu = 0$ можно легко получить из (36), (37) и (26) известное решение [21] с эллиптическими функциями Вейерштрасса:

$$u = 6(\wp_1 + \wp_2) - \frac{3}{2} \left(\frac{\wp_1' - \wp_2'}{\wp_1 - \wp_2} \right)^2, \quad v^2 = \frac{k_{2,0}}{\wp_2 - \wp_1}, \quad (44)$$

где функции $\wp_i$ удовлетворяют уравнениям

$$\wp_i'^2 = 4\wp_i^3 - g_2\wp_i - g_3^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

$$g_2 = \frac{c}{12}, \quad g_3^{(1)} = -\frac{1}{144}(2k_{1,0} - k_{2,0}), \quad g_3^{(2)} = -\frac{1}{144}(2k_{1,0} + k_{2,0}).$$

В случае СК общее решение, получающееся из переменных (43) и канонического преобразования (22), имеет вид

$$U = \sqrt{-3}(s_1' + s_2') + s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2 - \frac{3}{\mu}K_2^2, \quad (46)$$

$$V^2 = -2\sqrt{-3}(s_1 + s_2)(s_1s_1' + s_2s_2') + 2(s_1 + s_2)^2 \left(s_1^2 + s_2^2 - \frac{9K_2^2}{2\mu} \right).$$

В частном случае $\mu = 0$ это решение принимает простой вид

$$U = -6(\wp_1 + \wp_2), \quad V = -6(\wp_1 - \wp_2). \quad (47)$$

3. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЖДУ РАСШИРЕННЫМИ ГАМИЛЬТониАНАМИ 1 : 6 : 1 И 1 : 6 : 8

Рассмотрим теперь гамильтониан четвертого порядка (2) с дополнительными линейными и обратными квадратичными членами в следующих двух случаях [9]:

$$1 : 6 : 1 : \quad H \equiv K_1 = \frac{1}{2}(P_U^2 + P_V^2) - \frac{1}{32}(U^4 + 6U^2V^2 + V^4) - \frac{c}{2}(U^2 + V^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{U^2} + \frac{\beta}{V^2} \right), \quad (48)$$

$$K_2^2 = K_{2,0}^2 - \beta U^2 - \alpha V^2 + 4 \left(\alpha \frac{P_V^2}{U^2} + \beta \frac{P_U^2}{V^2} \right) + \frac{4\alpha\beta}{U^2 V^2} - 4c(\alpha + \beta), \quad (49)$$

$$K_{2,0} = 2P_U P_V - \frac{1}{4}UV(U^2 + V^2 + 8c), \quad (50)$$

$$U' = P_U, \quad V' = P_V, \quad (51)$$

$$U'' = \frac{1}{8}U^3 + \frac{3}{8}UV^2 + cU + \frac{\alpha}{U^3}, \quad (52)$$

$$V'' = \frac{1}{8}V^3 + \frac{3}{8}U^2V + cV + \frac{\beta}{V^3};$$

$$1 : 6 : 8: \quad H \equiv k_1 = \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) - \frac{1}{16}(8u^4 + 6u^2v^2 + v^4) - \frac{c}{2}(4u^2 + v^2) - \gamma u + \frac{\delta}{2v^2}, \quad (53)$$

$$k_2^2 = k_{2,0}^2 + \frac{\delta^2}{v^4} - \gamma v^2 u^3 - \frac{\gamma}{2}uv^4 - \frac{\delta}{2}u^2 - 2\gamma^2 v^2 + 2\delta \frac{p_v^2}{v^2} - \frac{\delta}{4}v^2 + 4\gamma(vp_u p_v - up_v^2) - 4\gamma\delta \frac{u}{v^2} - 2\delta c - 4c\gamma v^2 u, \quad (54)$$

$$k_{2,0}^2 = \left(-p_v^2 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{4}u^2v^2 - uv p_v + \frac{1}{2}p_u v^2 + cv^2 \right) \times \left(-p_v^2 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{4}u^2v^2 + uv p_v - \frac{1}{2}p_u v^2 + cv^2 \right), \quad (55)$$

$$u' = p_u, \quad v' = p_v, \quad (56)$$

$$u'' = 2u^3 + \frac{3}{4}uv^2 + 4cu + \gamma, \quad v'' = \frac{1}{4}v^3 + \frac{3}{4}u^2v + cv + \frac{\delta}{v^3}, \quad (57)$$

где K_1, K_2 и k_1, k_2 — интегралы движения двух соответствующих систем.

Уравнения движения связаны со стационарной редукцией $\xi = x - ct$ соответствующих УрЧП (3) и (4), где

$$r = -\frac{1}{4}(U^2 + V^2 + 4c), \quad s = \frac{1}{8}(U^2 - V^2), \quad (58)$$

$$f = u, \quad g = -\frac{1}{4}(v^2 + 2u^2 + 2p_u + 4c). \quad (59)$$

Как уравнение (3), так и уравнение (4) имеет пару Лакса четвертого порядка, и соответствующие операторы рассеяния L и $\tilde{L}$ допускают факторизации [5], [17],

$$1 : 6 : 1: \quad L \equiv (\partial_x^2 + r + s)(\partial_x^2 + r - s) = (\partial_x - v_1)(\partial_x + v_1)(\partial_x + v_2)(\partial_x - v_2), \quad (60)$$

$$1 : 6 : 8: \quad \tilde{L} \equiv (\partial_x^2 + f\partial_x + f_x + g)(\partial_x - f\partial_x + g) = (\partial_x + v_1)(\partial_x + v_2)(\partial_x - v_2)(\partial_x - v_1), \quad (61)$$

и задают отображения Миуры,

$$1 : 6 : 1: \quad r = \frac{1}{2}(v_{1,x} - v_{2,x} - v_1^2 - v_2^2), \quad s = \frac{1}{2}(v_{1,x} + v_{2,x} - v_1^2 + v_2^2), \quad (62)$$

$$1 : 6 : 8: \quad f = v_1 + v_2, \quad g = v_1 v_2 - v_{1,x}, \quad (63)$$

где v_1 и v_2 – решения системы УрЧП

$$\begin{aligned} v_{1,t} &= \frac{1}{8}(-2v_{1,xx} - 6v_{2,xx} - 12v_2 v_{2,x} - 12v_1 v_{2,x} - 12v_1 v_2^2 + 4v_1^3)_x, \\ v_{2,t} &= \frac{1}{8}(-2v_{2,xx} - 6v_{1,xx} + 12v_1 v_{1,x} + 12v_2 v_{1,x} - 12v_2 v_1^2 + 4v_2^3)_x. \end{aligned} \quad (64)$$

Из соотношений (62), (63), преобразований (58), (59) и уравнений движения (51), (52), (56), (57) следует, что условие стационарной редукции системы (64) можно разрешить относительно переменных v_1 и v_2 в терминах функций канонических переменных двух расширенных систем:

$$1 : 6 : 1: \quad v_1 = -\frac{P_U}{U} + \frac{\sqrt{-\alpha}}{U^2}, \quad v_2 = \frac{P_V}{V} + \frac{\sqrt{-\beta}}{V^2}, \quad (65)$$

$$1 : 6 : 8: \quad v_1 = \frac{u}{2} + \frac{p_v}{v} + \frac{\sqrt{-\delta}}{v^2}, \quad v_2 = \frac{u}{2} - \frac{p_v}{v} - \frac{\sqrt{-\delta}}{v^2}. \quad (66)$$

Если ввести определения

$$\alpha = -\kappa_1^2, \quad \beta = -\kappa_2^2, \quad \delta = -(\kappa_2 - \kappa_1)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad (67)$$

$$\Omega = -\frac{1}{4}(U^2 + V^2) + \frac{2}{UV} \left(P_U P_V + \kappa_2 \frac{P_U}{V} - \kappa_1 \frac{P_V}{U} - \frac{\kappa_1 \kappa_2}{UV} \right) - 2c, \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mp} &= -4 \left(\mp 2p_u + \frac{1}{2}v^2 + u^2 - 4\frac{p_v^2}{v^2} \pm 4\frac{up_v}{v} + 8(\kappa_2 - \kappa_1)\frac{p_v}{v^3} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp 4(\kappa_2 - \kappa_1)\frac{u}{v^2} - 4\frac{(\kappa_2 - \kappa_1)^2}{v^4} + 4c \right), \end{aligned} \quad (69)$$

то каноническое преобразование между системами $1 : 6 : 1$ и $1 : 6 : 8$ приобретает вид [5]

$$\begin{aligned} u &= -\frac{P_U}{U} + \frac{P_V}{V} + \frac{\kappa_1}{U^2} + \frac{\kappa_2}{V^2}, \\ p_u &= -\frac{1}{4}(V^2 - U^2) + \frac{P_U^2}{U^2} - \frac{P_V^2}{V^2} - 2\kappa_1 \frac{P_U}{U^3} - 2\kappa_2 \frac{P_V}{V^3} + \frac{\kappa_1^2}{U^4} - \frac{\kappa_2^2}{V^4}, \end{aligned} \quad (70)$$

$$v = 2\sqrt{\Omega}, \quad p_v = \sqrt{\Omega} \left(-\frac{P_U}{U} - \frac{P_V}{V} + \frac{\kappa_1}{U^2} - \frac{\kappa_2}{V^2} \right) - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2\sqrt{\Omega}}, \quad (71)$$

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_-}, \quad P_U = -\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_-} \left(\frac{u}{2} + \frac{p_v}{v} - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{v^2} \right) + 2\kappa_1 \sqrt{\Gamma_-}, \quad (72)$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_+}, \quad P_V = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_+} \left(\frac{u}{2} - \frac{p_v}{v} + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{v^2} \right) - 2\kappa_2 \sqrt{\Gamma_+}. \quad (73)$$

4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ГАМИЛЬТониАНА СИСТЕМЫ 1 : 6 : 8 ПРИ $\gamma = 0$

При $\alpha = \beta = 0$ можно построить преобразование (72), (73) в терминах переменных

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(U + V)^2, & P_1 &= \frac{1}{2} \frac{P_U + P_V}{U + V}, \\ Q_2 &= \frac{1}{2}(U - V)^2, & P_2 &= \frac{1}{2} \frac{P_U - P_V}{U - V}, \end{aligned} \quad (74)$$

которые задают разделение переменных для гамильтониана (48) системы 1 : 6 : 1 в полиномиальном случае. Это дает замену переменных

$$q_1 = 4 \frac{k_{2,0} + p_v^2}{v^2} - \frac{v^2}{2} - u^2 - 4c, \quad (75)$$

$$p_1 = \frac{-8vp_v p_u + 8up_v^2 + 2v^2 u^3 + u(v^4 + 8k_{2,0}) + 8cuv^2}{16v(vp_u - 2up_v)}, \quad (76)$$

$$q_2 = 4 \frac{-k_{2,0} + p_v^2}{v^2} - \frac{v^2}{2} - u^2 - 4c, \quad (77)$$

$$p_2 = \frac{-8vp_v p_u + 8up_v^2 + 2v^2 u^3 + u(v^4 - 8k_{2,0}) + 8cuv^2}{16v(vp_u - 2up_v)}, \quad (78)$$

которую можно применить к гамильтониану системы (53) при $\kappa_1 \kappa_2 \neq 0$, т.е. когда $k_{2,0}$ не является постоянной движения. Это преобразование, будучи ограниченным на $\kappa_2 = -\kappa_1$ ($\delta = -4\kappa_1^2$, $\gamma = 0$) задает координаты, которые разделяют переменные [11], [12] для уравнения Гамильтона–Якоби. В самом деле, получим

$$H \equiv k_1 = \frac{1}{16}(32q_1 p_1^2 - q_1^2 + 32q_2 p_2^2 - q_2^2 - 8c(q_1 + q_2)) - \kappa_1^2 \frac{(q_1 - q_2)}{4k_{2,0}}, \quad (79)$$

где

$$k_{2,0} = \frac{1}{8}(32q_1 p_1^2 - q_1^2 - 32q_2 p_2^2 + q_2^2 + 8c(q_2 - q_1)), \quad (80)$$

$$q'_1 = 4q_1 p_1 + 2\kappa_1^2 \frac{(q_1 - q_2)q_1 p_1}{k_{2,0}^2}, \quad (81)$$

$$q'_2 = 4q_2 p_2 - 2\kappa_1^2 \frac{(q_1 - q_2)q_2 p_2}{k_{2,0}^2}. \quad (82)$$

Вводя определения

$$f(q_i, p_i) \equiv 32q_i p_i^2 - q_i^2 - 8c q_i, \quad i = 1, 2,$$

можно получить уравнение Гамильтона–Якоби в разделенных переменных

$$f(q_1, p_1)^2 - f(q_2, p_2)^2 - 32\kappa_1^2(q_1 - q_2) = 16k_1(f(q_1, p_1) - f(q_2, p_2)), \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (83)$$

По аналогии со случаем КК можно записать второй инвариант двумя эквивалентными способами,

$$k_2^2 = -2\kappa_1^2 q_1 + \left(k_{2,0} + \frac{\kappa_1^2 (q_1 - q_2)}{2k_{2,0}} \right)^2 \quad (84)$$

или

$$k_2^2 = -2\kappa_1^2 q_2 + \left(k_{2,0} - \frac{\kappa_1^2 (q_1 - q_2)}{2k_{2,0}} \right)^2, \quad (85)$$

с помощью которых можно исключить $\kappa_1^2 (q_1 - q_2) / k_{2,0}$ из равенств (79), (84) и (79), (85), соответственно. Далее, исключим p_1 и p_2 из получившихся выражений и равенств (81), (82). В итоге будем иметь

$$q_1' = q_1 \sqrt{\frac{q_1}{2} + 4c + 4\frac{k_1}{q_1} + \frac{2}{q_1} \sqrt{k_2^2 + 2\kappa_1^2 q_1}} \times \left(1 + \frac{2\kappa_1^2 (q_1 - q_2)}{(\sqrt{k_2^2 + 2\kappa_1^2 q_1} + \sqrt{k_2^2 + 2\kappa_1^2 q_2})^2} \right), \quad (86)$$

$$q_2' = q_2 \sqrt{\frac{q_2}{2} + 4c + 4\frac{k_1}{q_2} - \frac{2}{q_2} \sqrt{k_2^2 + 2\kappa_1^2 q_2}} \times \left(1 - \frac{2\kappa_1^2 (q_1 - q_2)}{(\sqrt{k_2^2 + 2\kappa_1^2 q_1} + \sqrt{k_2^2 + 2\kappa_1^2 q_2})^2} \right). \quad (87)$$

Общее решение уравнений (86), (87) при $\kappa_1 = 0$ может быть выражено через эллиптические функции Вейерштрасса:

$$q_1 + \frac{8}{3}c = 8\wp \left(\xi - \xi_1, \frac{4}{3}c^2 - \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{4}, \frac{c}{12} \left(2k_1 + k_2 - \frac{32}{9}c^2 \right) \right) \equiv 8\wp_1, \quad (88)$$

$$q_2 + \frac{8}{3}c = 8\wp \left(\xi - \xi_2, \frac{4}{3}c^2 - \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{4}, \frac{c}{12} \left(2k_1 - k_2 - \frac{32}{9}c^2 \right) \right) \equiv 8\wp_2. \quad (89)$$

При $\kappa_1 \neq 0$, полагая в выражениях (86), (87)

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{2\kappa_1^2} k_2^2 + q_1}, \quad s_2 = -\sqrt{\frac{1}{2\kappa_1^2} k_2^2 + q_2} \quad (90)$$

и определяя переменную

$$\tilde{P}(s) \equiv \frac{1}{2} \left(s^2 - \frac{k_2^2}{2\kappa_1^2} \right)^3 + 4c \left(s^2 - \frac{k_2^2}{2\kappa_1^2} \right)^2 + (4k_1 + 2\sqrt{2}\kappa_1 s) \left(s^2 - \frac{k_2^2}{2\kappa_1^2} \right), \quad (91)$$

получаем уравнения

$$s_1' = \frac{\sqrt{\tilde{P}(s_1)}}{s_1 - s_2}, \quad s_2' = -\frac{\sqrt{\tilde{P}(s_2)}}{s_1 - s_2}, \quad (92)$$

которые можно решить путем обращения гиперэллиптических интегралов,

$$\int_{\infty}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{P}(s)}} + \int_{\infty}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{\tilde{P}(s)}} = k_3, \quad (93)$$

$$\int_{\infty}^{s_1} \frac{s ds}{\sqrt{\tilde{P}(s)}} + \int_{\infty}^{s_2} \frac{s ds}{\sqrt{\tilde{P}(s)}} = \xi + k_4. \quad (94)$$

Таким образом, если параметр δ произволен, а $\gamma = 0$, то общее решение гамильтониана системы 1 : 6 : 8 выражается через симметрические комбинации переменных s_1, s_2 ,

$$u^2 = -\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2) + \frac{k_2^2}{2\kappa_1^2} + \left(\frac{s_1' + s_2'}{s_1 + s_2}\right)^2 - \frac{2\sqrt{2}\kappa_1}{s_1 + s_2} - 4c, \quad v^2 = \frac{4\sqrt{2}\kappa_1}{s_1 + s_2}, \quad (95)$$

и представляет собой однозначную функцию комплексной переменной ξ . При $\kappa_1 = 0$ это решение вырождается и принимает вид

$$u^2 = -4(\wp_1 + \wp_2) + \left(\frac{\wp_1' - \wp_2'}{\wp_1 - \wp_2}\right)^2 + \frac{k_{2,0}}{2(\wp_2 - \wp_1)} - \frac{4}{3}c, \quad v^2 = \frac{k_{2,0}}{\wp_1 - \wp_2}. \quad (96)$$

5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ РАСШИРЕННОГО ГАМИЛЬТониАНА СИСТЕМЫ 1 : 6 : 1

Для построения общего решения гамильтониана системы 1 : 6 : 1 можно опять использовать каноническое преобразование (72), (73).

При $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ можно подставить выражения (96) в формулы (72), (73), получив при этом решение уравнений движения

$$U^2 + V^2 = 8\left(\wp_1 + \wp_2 - \frac{2}{3}c\right), \quad UV = 4(\wp_1 - \wp_2). \quad (97)$$

Далее, при $\alpha\beta \neq 0$ и $\alpha = \beta$ получаются выражения

$$U^2 + V^2 = -2\sqrt{2}(s_1' + s_2') + 2(s_1^2 + s_2^2 + s_1 s_2) - \frac{K_2^2}{\kappa_1^2}, \quad (98)$$

$$U^2 V^2 = -2\sqrt{2}(s_1 + s_2)(s_1 s_1' + s_2 s_2' - 2\kappa_1) + 2(s_1 + s_2)^2 \left(s_1^2 + s_2^2 - \frac{3}{4} \frac{K_2^2}{\kappa_1^2} + 4c \right), \quad (99)$$

которые зависят от симметрических комбинаций переменных s_1, s_2 и потому являются однозначными функциями ξ .

Так как гамильтониан (48) при $\alpha = \beta$ представляет собой четную функцию κ_1 , можно применить каноническое преобразование (70), (71) при $\kappa_1 = \kappa_2$ к выражениям (98), (99), получив при этом общее решение гамильтониана системы 1 : 6 : 8 в расширенном случае при $\delta = 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ромейрас [22] описал процедуру, которая соотносит расширенный кубический потенциал $\tilde{V}_3(u, v) = V_3(u, v) + \mu v^{-2}/2$ в случае КК с расширенным потенциалом четвертого порядка $\tilde{V}_4(u, v) = V_4(u, v) + \delta v^{-2}/2$ в случае 1 : 6 : 8. Это объясняет, почему комбинация $u^2 + v^2/2 + 4c$ решений вида (95) идентична решению вида (43). Проблема распространения наших результатов на случай $\alpha \neq \beta$, т.е. на случай $\gamma\delta \neq 0$, остается открытой.

Благодарности. К.В., научный исследователь Фонда научных исследований Фландрии, благодарна организаторам за финансовую поддержку, которая позволила ей принять участие в конференции. Работа поддержана бельгийско-французской “Programme d’actions intégrées” (Tournesol T99/040), правительством Бельгии (IUAP P4/08), а также СЕА.

Список литературы

- [1] *T. Bountis, H. Segur, F. Vivaldi.* Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 1257–1264.
- [2] *Y. F. Chang, M. Tabor, J. Weiss.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 531–538.
- [3] *B. Grammaticos, B. Dorizzi, R. Padjen.* Phys. Lett. A. 1982. V. 89. P. 111–113.
- [4] *A. P. Fordy.* Physica D. 1991. V. 52. P. 204–210.
- [5] *S. Baker.* Squared eigenfunction representation of integrable hierarchies. PhD Thesis. Leeds: University of Leeds, 1995.
- [6] *C. Verhoeven, M. Musette, R. Conte.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 1906–1915; nlin.SI/0112030.
- [7] *B. Grammaticos, B. Dorizzi, A. Ramani.* J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 2289–2295.
- [8] *J. Hietarinta.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 1833–1844.
- [9] *J. Hietarinta.* Phys. Rep. 1987. V. 147. P. 87–154.
- [10] *B. Grammaticos, B. Dorizzi, A. Ramani.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 3470–3473.
- [11] *V. Ravoson, A. Ramani, B. Grammaticos.* Phys. Lett. A. 1994. V. 191. P. 91–95.
- [12] *F. J. Romeiras.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 3559–3565.
- [13] *С. В. Манаков.* ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 505–516.
- [14] *R. Garnier.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1919. V. 43. P. 3559–3565.
- [15] *S. Wojciechowski.* Physica Scripta. 1985. V. 31. P. 433–438.
- [16] *В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов.* Тр. семин. Л. С. Соболева. 1981. Т. 2. С. 5–9.
- [17] *S. Baker, V. Z. Enolskii, A. P. Fordy.* Phys. Lett. A. 1995. V. 201. P. 167–174.
- [18] *J. Satsuma, R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. P. 3390–3397.
- [19] *A. P. Fordy, J. Gibbons.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2508–2510.
- [20] *M. Błaszak, S. Rauch-Wojciechowski.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 1693–1709.
- [21] *V. Ravoson, L. Gavrilov, R. Caboz.* J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 2385–2393.
- [22] *F. J. Romeiras.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 5633–5642.

Исправление к статье:

Ф. Калоджеро. “Разрешимая задача трех тел и гипотезы Пенлеве”
(ТМФ. 2002. Т. 133. № 2. С. 149–159)

Таблица на с. 152 должна иметь следующий вид:

a_{12}	0	0	0	0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	-1
a_{23}	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	-1	-1	$-3/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	-1	-1
a_{31}	$-1/2$	-1	$-3/2$	-1	-2	$-3/2$	$-1/2$	-1	-2	$-3/2$	-1
β_{12}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
β_{23}	1	1	1	2	2	3	1	1	1	2	2
β_{31}	1	2	3	2	4	3	1	2	4	3	2
γ_{12}	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	∞
γ_{23}	2	2	2	∞	∞	-2	2	2	2	∞	∞
γ_{31}	2	∞	-2	∞	-1	-2	2	∞	-1	-2	∞
Γ	3	∞	-3	-3	-1	-1	∞	-3	-1	-1	-1

Редакция приносит свои извинения за эту ошибку.