Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Априорные оценки для квантовых динамических полугрупп,
ТМФ, 2003, том 134, номер 2, 185–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 07:06:51

© 2003 г.

А. М. Чеботарев*

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

Получены априорные оценки для решений квантовых уравнений марковской эволюции в представлениях Гейзенберга и Шредингера.

Ключевые слова: квантовая динамическая полугруппа, уравнение марковской эволюции, априорные оценки минимальной квантовой динамической полугруппы.

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство с полуторалинейным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра фон Неймана, состоящая из всех ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Рассмотрим формальный генератор

$$\mathcal{L}(B) = \Phi(B) - \frac{1}{2}\Phi(I)B - \frac{1}{2}B\Phi(I) + i[H, B], \quad \Phi(B) = \sum_k \Phi_k^* B \Phi_k,$$

квантовой динамической полугруппы (КДП) $P_t(B) = e^{t\mathcal{L}}(B)$ на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Предполагается, что коэффициентами генератора $\mathcal{L}$ являются плотно определенный симметричный оператор H (гамильтониан, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$) и нормальное вполне положительное отображение Φ (диссипативная часть, действующая в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$). Структура генератора $\mathcal{L}$ сходна со структурой классического уравнения Колмогорова–Феллера. Аналогично классическому случаю уравнение марковской эволюции

$$\frac{d}{dt}P_t(B) = \mathcal{L}(P_t(B)), \quad P_0(B) = B, \quad (1)$$

при определенных условиях имеет минимальное решение, называемое *минимальной КДП* [1]–[3]. КДП в представлении Гейзенберга P_t и КДП в представлении Шредингера T_t двойственны относительно скалярного произведения $\langle T_t(\rho), B \rangle = \text{Tr}\{T_t(\rho)B\} = \text{Tr}\{\rho P_t(B)\} = \langle \rho, P_t(B) \rangle$, где ρ – элемент алгебры $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ операторов с конечным следом, а B – элемент алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов. Очевидно, что если $P_t(I) = I$, то $\text{Tr} T_t(\rho) = \text{Tr} \rho$. Пусть Λ и $\Phi_t(I)$ – самосопряженные положительные операторы такие, что $\Lambda \geq \Phi_t(I) \geq 0$, и $-G = -\Phi(I)/2 - iH$ – генератор сильно непрерывной сжимающей полугруппы $W_t = e^{-tG}$ в $\mathcal{H}$. Не теряя общности, будем считать, что для Λ

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: alex@chebotar.phys.msu.su

существует ограниченный обратный оператор. Ниже получены условия, при которых выполняется неравенство

$$\mathrm{Tr}\{BT_t(\rho)\} \leq e^{ct} \|\Lambda^{-1/2} B \Lambda^{-1/2}\| \mathrm{Tr}(\Lambda^{1/2} \rho \Lambda^{1/2}).$$

Неравенства такого вида важны для оценки погрешности численного решения уравнений марковской эволюции методом квантовых траекторий с переменным конечным базисом [4], [5].

Обозначим через $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$, $k = 0, 1, 2$, гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(g, h)_k = (\Lambda^{k/2} g, \Lambda^{k/2} h)$.

ЛЕММА 1. Если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$-2 \operatorname{Re}(\Lambda^{k/2} G \psi, \Lambda^{k/2} \psi) \leq c \|\Lambda^{k/2} \psi\|^2 \quad (2)$$

для любого $\psi \in \mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$, то полугруппа W_t ограничена и сильно непрерывна в $\mathcal{H}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ – решение резольвентного уравнения $(\lambda G + I)\psi = \varphi$ и $\varphi \in \mathcal{H}_k$, т.е. $\varphi = \Lambda^{-k/2} \theta$, $\theta \in \mathcal{H}$. Тогда $\|\Lambda^{k/2}(\lambda G + I)\psi\|^2 = \|\theta\|^2$, и в силу оценки (2) имеем $2 \operatorname{Re}(\Lambda^{k/2} G \psi, \Lambda^{k/2} \psi) \geq -c \|\Lambda^{k/2} \psi\|^2$. Поэтому при всех $\lambda > 2c$ выполняется неравенство

$$\|\theta\|^2 = \|\Lambda^{k/2}(\lambda G + I)\psi\|^2 \geq (1 - 2\lambda c) \|\Lambda^{k/2} \psi\|^2 = (1 - 2\lambda c) \|\Lambda^{k/2}(\lambda G + I)^{-1} \Lambda^{-k/2} \theta\|^2.$$

Следовательно,

$$\left\| \left(I + \frac{Gt}{N} \right)^{-1} \right\|_k = \left\| \left(I + \frac{G_k t}{N} \right)^{-1} \right\| \leq \left(1 - \frac{2ct}{N} \right)^{-1/2},$$

где $G_k = \Lambda^{k/2} G \Lambda^{-k/2}$. Учитывая, что

$$W_t = \text{s-lim}_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{Gt}{N} \right)^{-N},$$

получаем

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{k/2} W_t \Lambda^{-k/2}\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \left(I + \frac{G_k t}{N} \right)^{-N} \right\| \leq \left\| \left(I + \frac{G_k t}{N} \right) \right\|^N \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2ct}{N} \right)^{-N/2} = e^{ct}, \end{aligned}$$

что доказывает ограниченность полугруппы W_t в $\mathcal{H}_k$. Попутно можно заметить, что оценка нормы резольвентного оператора $(I + \lambda G)^{-1}$ в $\mathcal{H}_k$ совпадает с оценкой нормы резольвентного оператора $(I + \lambda G_k)^{-1}$ в $\mathcal{H}$.

Нетрудно видеть, что поскольку оператор Λ замкнут и ограниченно обратим, а оператор $G \Lambda^{-k/2}$ замкнут, то G_k также замкнут в $\mathcal{H}$ (см. [6], гл. III, § 5, п. 2, задача 5.12).

Таким образом, оператор $-G_k$ удовлетворяет условиям теоремы о генераторе квазиограниченной сильно непрерывной полугруппы $W_t^{(k)} = \Lambda^{k/2} W_t \Lambda^{-k/2} = e^{-t\Lambda^{k/2} G \Lambda^{-k/2}}$, действующей в $\mathcal{H}$ (см. [6], гл. IX, § 1, п. 4).

Поскольку полугруппа W_t ограничена в $\mathcal{H}_k$, то достаточно доказать ее непрерывность на любом плотном подмножестве, например на $\mathcal{H}_{\mu,k} = \Lambda^{k/2}(\mu G + I)^{-N} \Lambda^{-k/2} \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. Пусть $h \in \mathcal{H}$ и $\psi = \Lambda^{k/2}(\mu G + I)^{-N} \Lambda^{-k/2} h \in \mathcal{H}_{\mu,k}$. Тогда $\|\Lambda^{k/2}(W_t - I) \Lambda^{-k/2} \psi\| = \|(W_t^{(k)} - I)\psi\|$. Теперь сильная непрерывность W_t в $\mathcal{H}_k$ следует из сильной непрерывности $W_t^{(k)}$ в $\mathcal{H}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Предположим, что условие (2) выполнено. Если*

$$A_{k,n} = \Lambda^{(k-1)/2} \Phi_n \Lambda^{-k/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \sum_n A_{k,n}^* A_{k,n} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

то квадратичная форма $f_{t,s} = \Phi(P_s)[W_{t-s}\psi]$, $\psi \in \mathcal{H}_k$, ограничена и непрерывна по t и s для любого ограниченного и сильно непрерывного в $\mathcal{H}_{k-1}$ семейства операторов P_t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $\Phi(X) = \sum_n \Phi_n^* X \Phi_n$, запишем квадратичную форму $f_{t,s}$ как сумму $\sum_n (h_k(t, s), B_{k,n}(t) h_k(t, s))$, где

$$\begin{aligned} h_k(t, s) &= W_{t-s}^{(k)} h, \quad W_t^{(k)} = \Lambda^{k/2} W_t \Lambda^{-k/2}, \quad \psi = \Lambda^{-k/2} h, \quad h \in \mathcal{H}, \\ A_{k,n} &= \Lambda^{(k-1)/2} \Phi_n \Lambda^{-k/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \\ B_{k,n}(t) &= A_{k,n}^* \Lambda^{-(k-1)/2} P_t \Lambda^{-(k-1)/2} A_{k,n} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Поскольку операторы $W_{t-s}^{(k)}$ ограничены и сильно непрерывны в $\mathcal{H}$, то векторы $h_k(t, s)$ непрерывны по норме $\mathcal{H}$ по переменным t и s , и в сумме

$$\begin{aligned} |f_{t,s} - f_{\tau,s}| &\leq \sum_n \{ (\|h_k(t, s)\| + \|h_k(\tau, s)\|) \|B_{k,n}(s)\| \|h_k(t, s) - h_k(\tau, s)\| + \\ &\quad + \|h_k(t, s)\| \| (B_{k,n}(t) - B_{k,n}(\tau)) h_k(t, s) \| \} \end{aligned}$$

каждое слагаемое сходится к нулю при $\tau \rightarrow t$. Заметим также, что имеет место неравенство

$$f_k(t, s) \leq \|B_t\| \sum_n (W_{t-s}^{(k)} h, A_{k,n}^* A_{k,n} W_{t-s}^{(k)} h),$$

где по условию ряд $\sum_n A_{k,n}^* A_{k,n}$ сильно сходится к ограниченному оператору. Поскольку сильная сходимость равномерна на компактных множествах, а множество векторов $\{W_{t-s}^{(k)} h, s \leq t, t \in T\}$ при фиксированном h компактно для любого компакта $T \in \mathbb{R}_+$, то в силу приведенного выше неравенства по теореме Лебега о предельном переходе в сумме возможен почленный предельный переход при $\tau \rightarrow t$. Лемма доказана.

Предположим, что для любого $\psi \in \text{dom } \Lambda$ выполнено следующее *условие относительной ограниченности* [2], [3]:

$$\sum_k \|\Lambda^{1/2} \Phi_k \psi\|^2 - 2 \text{Re}(\Lambda^{1/2} G \psi, \Lambda^{1/2} \psi) \leq c \|\Lambda^{1/2} \psi\|^2, \quad (4)$$

где $c \geq 0$.

ТЕОРЕМА. Если выполнены предположения лемм 1, 2 и условие (4), а оператор H симметричен на $\text{dom } \Lambda$, то для минимальной КДП выполнена априорная оценка

$$P_t^{\min}(\Lambda) \leq \Lambda e^{ct}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\text{CRn}(\mathcal{H})$ мы обозначаем конус ограниченных вполне положительных нормальных отображений, действующих в алгебре наблюдаемых $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ [7], [8]. Если выполнены предположения лемм 1, 2, то для любого ограниченного сильно непрерывного семейства операторов X_s семейство квадратичных форм

$$\Phi_*(X_s)[W_{t-s}\psi] = A_*(X_s)[\psi_{t-s}], \quad \psi_t = \Lambda^{1/2}W_t\Lambda^{-1/2}\psi \in \mathcal{H} \quad \forall \psi \in \mathcal{H},$$

где $A \in \text{CRn}(\mathcal{H})$, $A_*(B)[\psi] = \sum_k (\Phi_k \psi, B \Phi_k \psi)$ (т.е. в силу теоремы Крауза [8] A – ограниченное нормальное вполне положительное отображение), заведомо принадлежит $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ по переменной s и непрерывно по t . Последовательность вполне положительных отображений $P_t^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} P_t^{(0)}(B) &= W_t^* B W_t \stackrel{\text{def}}{=} V_t(B), \\ P_t^{(n+1)}(B) &\stackrel{\text{def}}{=} V_t(B) + \int_0^t ds V_{t-s} \Phi P_s^{(n)}(B) = \\ &= V_t(B) + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t ds_1 V_{t-s_1} \Phi \dots \int_0^{s_{k-1}} ds_k V_{s_{k-1}-s_k} \Phi V_{s_k-\tau}(B), \end{aligned} \quad (6)$$

корректно определена как последовательность *ограниченных* операторов, соответствующая последовательности квадратичных форм, определенных на W -инвариантном плотном множестве $\text{dom } \Lambda^{1/2} \subset \text{dom } \Lambda$ и равномерно ограниченных по норме $\mathcal{H}$. Действительно, поскольку операторы $W_{t,s}$ сжимающие, то $0 \leq V_t(I) \leq I$, и из тождества

$$I - V_t(I) = \int_0^t ds \frac{\partial}{\partial s} V_{t-s} = \int_0^t ds V_{t-s} \Phi(I) = - \int_0^t ds \frac{\partial}{\partial s} V_s = \int_0^t ds V_s \Phi(I), \quad (7)$$

справедливого в силу симметричности оператора H на плотном множестве $\text{dom } \Lambda \subseteq \text{dom } \Lambda^{1/2}$, следует, что

$$0 \leq \int_0^t ds V_{t-s} \Phi(I) = \int_0^t ds V_s \Phi(I) \leq I.$$

Очевидно, что $P_t^{(0)}(B) \leq \|B\|I$. Поэтому с помощью соотношений (6), (7) индукцией по n получаем

$$P_t^{(n+1)}(B) \leq \|B\| \left(V_t(I) + \int_0^t ds V_{t-s} \Phi(I) \right) = \|B\|I$$

для любого эрмитова оператора B . Таким образом, последовательность вполне положительных отображений $P_t^{(n)}$ монотонно возрастает с увеличением n и является равномерно ограниченной: $\|P_t^{(n)}(B)\| \leq \|B\|$. Поэтому существует наименьшая верхняя грань (l.u.b.)

$$P_t^{\min}(B) = \text{l.u.b.} P_t^{(n)}(B),$$

которая в силу нормальности отображения Φ удовлетворяет интегральному уравнению

$$P_t^{\min}(B) = V_t(B) + \int_0^t ds V_{t-s} \Phi P_s^{\min}(B).$$

В случае ограниченных коэффициентов H и Φ это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению (1) и поэтому называется *интегральным уравнением марковской эволюции*. Конструкция минимального решения аналогична конструкции минимального решения для уравнений Колмогорова–Феллера; существование верхней грани и ее минимальные свойства подробно обсуждались в работах [1]–[3], [6].

Заметим далее, что полугруппа W_t оставляет инвариантным пространство $\mathcal{H}_2$, поэтому оператор $V_{t-s}(\Lambda)$ корректно определен как оператор, соответствующий замыканию положительно определенной квадратичной формы $\|\Lambda^{1/2} W_{t-s} \psi\|^2$ на $\mathcal{H}_2$. По этой же причине очевидно, что из неравенства (4) следует оценка

$$\frac{d}{dt} \|\Lambda^{1/2} W_t \psi\|^2 = -2 \operatorname{Re}(\Lambda^{1/2} G_t W_t \psi, \Lambda^{1/2} W_t \psi) \leq c \|\Lambda^{1/2} W_t \psi\|^2.$$

Решая задачу Коши для приведенного выше дифференциального неравенства, мы получаем оценку $V_t(\Lambda)_*[\psi] \leq e^{ct}(\Lambda)_*[\psi]$. Следовательно, оператор $P_t^{(0)}(\Lambda)$, отвечающий квадратичной форме $\|\Lambda^{1/2} W_t \psi\|^2$, удовлетворяет неравенству

$$P_t^{(0)}(\Lambda) = W_t^* \Lambda W_t = V_t(\Lambda) \leq \Lambda e^{ct}.$$

Предположим, что $P_t^{(n)}(\Lambda)_*[\psi] \leq e^{ct} \|\Lambda^{1/2} \psi\|^2$ на $\operatorname{dom} \Lambda$, и докажем аналогичное неравенство для $P_t^{(n+1)}(\Lambda)$ по индукции. Из рекуррентного определения $P_t^{(n+1)}(\Lambda)$ и предположения (4) имеем

$$\begin{aligned} P_t^{(n+1)}(\Lambda)_*[\psi] &\stackrel{\text{def}}{=} V_t(\Lambda)_*[\psi] + \sum_k \int_0^t ds \sum_k P_s^{(n)}(\Lambda)_*[\Phi_k W_{t-s} \psi] \leq \\ &\leq V_t(\Lambda)_*[\psi] + \int_0^t ds e^{cs} \sum_k \Lambda_*[\Phi_k W_{t-s} \psi] = \\ &= \Lambda_*[W_t \psi] + \int_0^t ds e^{cs} \sum_k \|\Lambda^{1/2} \Phi_k W_{t-s} \psi\|^2 \leq \\ &\leq \Lambda_*[W_t \psi] + \int_0^t ds e^{cs} (c \Lambda_*[W_{t-s} \psi] + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(\Lambda^{1/2} G W_{t-s} \psi, \Lambda^{1/2} W_{t-s} \psi)) = \\ &= \Lambda_*[W_t \psi] + \int_0^t ds \frac{\partial}{\partial s} (e^{sc} \|\Lambda^{1/2} W_{t-s} \psi\|^2) = \|\Lambda^{1/2} \psi\|^2 e^{ct}, \end{aligned}$$

где все неравенства понимаются в смысле неравенств для замыкаемых квадратичных форм, корректно определенных на $\text{dom } \Lambda$ и непрерывно зависящих от s . Отсюда следует оценка, указанная в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Пусть T_t – квантовая динамическая полугруппа, двойственная к $P_t^{\min}$ относительно билинейной формы $\langle \rho, B \rangle = \text{Tr } \rho B$. Из оценки (5) следует, что для любого оператора B такого, что $\|\Lambda^{-1/2} B \Lambda^{-1/2}\| < \infty$, выполнена оценка

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{BT_t(\rho)\} &= \text{Tr}\{(\Lambda^{-1/2} B \Lambda^{-1/2})(\Lambda^{1/2} T_t(\rho) \Lambda^{1/2})\} \leq \\ &\leq \|\Lambda^{-1/2} B \Lambda^{-1/2}\| \text{Tr}\{P_t^{\min}(\Lambda)\rho\} \leq e^{ct} \|\Lambda^{-1/2} B \Lambda^{-1/2}\| \text{Tr}\{\Lambda^{1/2} \rho \Lambda^{1/2}\}. \end{aligned}$$

Эта оценка означает, что при условии (4) существует подалгебра операторов с конечным следом $\rho = \Lambda^{-1/2} \sigma \Lambda^{-1/2}$, $\sigma \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, инвариантная относительно разрешающего оператора квантового уравнения марковской эволюции T_t . С другой стороны, в работах [3], [7] показано, что наличие оценки (5) гарантирует консервативность минимальной КДП (т.е. $P_t(I) = I \ \forall t > 0$) и единственность этого решения в классе консервативных КДП.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-00545).

Список литературы

- [1] *E. B. Davies.* Rep. Math. Phys. 1979. V. 11. № 2. P. 169.
- [2] *A. S. Holevo.* Stochastic differential equations in Hilbert space and quantum Markovian evolutions. In: Probability Theory and Mathematical Statistics. Proc. of the Seventh Japan–Russian Symposium. Eds. S. Watanabe et al. Singapore: World Scientific, 1996. P. 122.
- [3] *A. M. Chebotarev, F. Fagnola.* J. Funct. Anal. 1998. V. 153. № 2. P. 382.
- [4] *R. Schack, T. A. Brun, I. C. Percival.* Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 2694.
- [5] *R. Schack, T. A. Brun.* Comput. Phys. Commun. 1997. V. 102. № 1–3. P. 210.
- [6] *T. Kato.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [7] *A. M. Chebotarev, J. C. Garcia, R. B. Quezada.* RIMS Kokyuroku. 1998. V. 1035. P. 44.
- [8] *K. Kraus.* Ann. Phys. 1971. V. 64. P. 311.

Поступила в редакцию 28.I.2002 г.,
после доработки 13.III.2002 г.