Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, О спектре и собственных функциях двумерного оператора Шредингера с магнитным полем, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 2, 243–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:29:06

© 2003 г.

Ю. П. Чубурин*

О СПЕКТРЕ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Доказан ряд теорем о собственных функциях и собственных значениях оператора Шредингера для большого постоянного магнитного поля.

Ключевые слова: оператор Шредингера, магнитное поле, собственная функция, собственное значение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим оператор Шредингера

$$H = H_0 + V(x),$$

действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$, где

$$H_0 = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - iBx_2 \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$$

(выбрана калибровка Ландау), $B = \text{const} > 0$ — величина магнитного поля. Предполагаем, что потенциал $V(x)$ является вещественным и принадлежит $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Исследование такого рода операторов важно в связи с изучением эффекта Холла (см., например, [1]). Спектр $\sigma(H_0)$ оператора H_0 , как известно, состоит из собственных значений бесконечной кратности (уровней Ландау) вида

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) B, \quad n = 0, 1, \dots$$

Из общих соображений легко вытекает включение $\sigma(H) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} [E_n - \|V\|_\infty, E_n + \|V\|_\infty]$ (ср. [2]). Наконец, отметим, что существенный спектр H совпадает с $\sigma(H_0)$ [3].

* Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: chuburin@otf.fti.udmurtia.su

Двумерные операторы Шредингера с магнитным полем изучались в ряде работ (см., например, [4]–[10]), но даже в случае убывающего потенциала и постоянного магнитного поля многие физически важные вопросы, связанные с местонахождением собственных значений и поведением собственных функций, остаются недостаточно исследованными. В данной работе получен ряд результатов о локализации собственных функций и собственных значений оператора H для больших B (или малых $V(x)$). В частности, в теореме 2 доказаны формулы, подобные формулам теории возмущений, но с остаточным членом, убывающим также при $B \rightarrow \infty$. Поясним в связи с этим, что теория возмущений для невозмущенного собственного значения бесконечной кратности теряет силу. В работе [4] получены обычные формулы теории возмущений для уровня бесконечной кратности, но для априорно взятых аналитических семейств собственных векторов и соответствующих собственных значений. В теореме 3 для случая $V(x)$ с компактным носителем доказана оценка для собственных функций двумерного магнитного оператора Шредингера, отвечающих собственным значениям, отделенным от уровня Ландау. Особенностью данной оценки, в отличие от известных [9], [10], является явное присутствие величины B в константах. Это позволило доказать предельную (при $B \rightarrow \infty$) локализацию собственных функций в круге, содержащем носитель $V(x)$ (см. следствие 2 и замечание 1). Результат, полученный в теореме 5, позволяет говорить о сгущении собственных значений при $B \rightarrow \infty$, что согласуется с результатами работ [7], [8] о плотности состояний. В теореме 6 доказано, что для потенциала с параметром вида $\mu V(x)$ существенный спектр (в данном случае уровни Ландау) при $\mu \rightarrow \infty$ служит источником собственных значений. Аналогичный результат для другой разновидности оператора Шредингера можно найти, например, в статье [11].

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть зависимость от магнитного поля, мы будем часто пользоваться обозначениями вида $H^{(B)}$ вместо H и т.п. Норму в $L^p(\mathbb{R}^2)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_p$.

2. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Обозначим через P_n ортогональные проекторы на собственные подпространства $L_n = P_n(L^2(\mathbb{R}^2))$ оператора H_0 , отвечающие уровням Ландау $E_n = (n+1/2)B$. Имеем для резольвенты $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$ очевидное равенство

$$R_0(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{(n + \frac{1}{2})B - E}. \quad (1)$$

Введем обозначение $\rho(\psi, L_n) = \inf_{\phi \in L_n} \|\psi - \phi\|_2$.

ТЕОРЕМА 1. *Выберем произвольно $\epsilon_0 > 0$. Пусть ψ – любой собственный вектор оператора $H^{(B)}$ такой, что $\|\psi\|_2 = 1$, отвечающий собственному значению $E \in (E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2)$. Тогда имеет место равенство*

$$\rho(\psi, L_{n_0}) = O(\|V\|_{\infty}/B),$$

причем $|O(\|V\|_{\infty}/B)| \leq (2 + \epsilon_0)\|V\|_{\infty}/B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем равенство (1) в виде

$$R_0(E) = \frac{P_{n_0}}{(n_0 + \frac{1}{2})B - E} + Q(E), \quad (2)$$

где

$$Q(E) = \sum_{n \neq n_0} \frac{P_n}{(n + \frac{1}{2})B - E} \quad (3)$$

— операторнозначная функция, аналитическая по аргументу E в $(B/2)$ -окрестности точки E_{n_0} . Ее аналитичность вытекает из следующей равномерной по E оценки:

$$\|Q(E)\psi\|^2 = \sum_{n \neq n_0} \frac{\|P_n\psi\|^2}{|(n + \frac{1}{2})B - E|^2} \leq \left(\frac{2}{B}\right)^2 \sum_{n \neq n_0} \|P_n\psi\|^2 \leq \left(\frac{2}{B}\right)^2 \|\psi\|^2,$$

где $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Отсюда получаем

$$\|Q(E)\| \leq \frac{2}{B}. \quad (4)$$

Выберем малое вещественное $\epsilon \neq 0$. Равенство $H\psi = E\psi$, где предполагается, что $\|\psi\|_2 = 1$, перепишем в виде

$$(H_0 - (E + \epsilon))\psi = -(V + \epsilon)\psi.$$

Последнее равенство для E из ϵ -окрестности точки E_{n_0} с учетом соотношения (2) эквивалентно равенству

$$\psi = -R_0(E + \epsilon)(V + \epsilon)\psi = -\frac{P_{n_0}(V + \epsilon)\psi}{E_{n_0} - E - \epsilon} - Q(E + \epsilon)(V + \epsilon)\psi. \quad (5)$$

Для тех собственных значений E , которые попадут в ϵ -окрестность E_{n_0} , теорема вытекает из выражений (5), (4), если взять $\epsilon \leq \epsilon_0 \|V\|_\infty / 2$. Для, возможно, оставшегося вне этой окрестности конечного числа собственных значений рассуждение аналогично, если положить $\epsilon = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы $\|\psi - P_{n_0}^{(B)}\psi\| = O(\|V\|_\infty / B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим, пользуясь теоремой, вектору ψ вектор $\psi_0 \in \text{im } P_{n_0}^{(B)}$ такой, что $\|\psi - \psi_0\| = O(\|V\|_\infty / B)$. Тогда $\|\psi - P_{n_0}^{(B)}\psi\| \leq \|\psi - \psi_0\| + \|P_{n_0}^{(B)}(\psi_0 - \psi)\| = O(\|V\|_\infty / B)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ψ — собственный вектор оператора $H^{(B)}$ такой, что $\|\psi\|_2 = 1$, и отвечающий собственному значению $E \in (E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2)$, а $\psi_0 \in \text{im } P_{n_0}$ обладает тем свойством, что

$$\|\psi - \psi_0\| = O\left(\frac{\|V\|_\infty}{B}\right) \quad (6)$$

(см. теорему 1). Тогда для $\Delta E = E - E_{n_0}$ имеют место равенства

$$\Delta E = (V\psi, \psi) + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right) = (V\psi_0, \psi_0) + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условие (6) и неравенство Шварца, выполним преобразование

$$\begin{aligned}(H\psi, \psi_0) &= E(\psi, \psi_0) = E(\psi, \psi) + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right) = E + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right) = \\ &= (\psi, (H_0 + V)\psi_0) = E_{n_0}(\psi, \psi_0) + (\psi, V\psi_0).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}(E - E_{n_0})(\psi, \psi_0) &= \Delta E + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right) = (\psi, V\psi_0) = \\ &= (\psi_0, V\psi_0) + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right) = (\psi, V\psi) + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right).\end{aligned}$$

Полученные соотношения доказывают теорему.

Введем обозначение $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что для носителя V справедливо включение $\text{supp } V \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R\}$. Пусть $\epsilon, \delta > 0$. Существуют такие константы $C, k > 0$, что для произвольной собственной функции $\psi(x)$ оператора $H^{(B)}$ такой, что $\|\psi\| = 1$, а соответствующее собственное значение E удовлетворяет условию $B/2 > |E - E_{n_0}| \geq \epsilon$, и для всех x таких, что $|x| \geq R + \delta$, справедлива оценка*

$$|\psi(x)| \leq C\|V\|_\infty B e^{-k B x^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим функцию Грина (ядро резольвенты) $G_0^{(B)}(x, y, E)$ оператора $H_0^{(B)}$. Согласно [12] выбор калибровки приводит к переходу от оператора H к оператору $e^{-i\lambda(x)} H e^{i\lambda(x)}$, где $\lambda(x)$ — некоторая вещественная функция. Поэтому можно воспользоваться при оценке видом функции Грина в симметричной калибровке [5]:

$$\begin{aligned}G_0^{(B)}(x, y, E) &= \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{B}\right) e^{-iB(x \wedge y)/2} \cdot e^{-B(x-y)^2/4} \times \\ &\times \Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{B}, 1, \frac{B(x-y)^2}{2}\right),\end{aligned}\tag{7}$$

где Γ — гамма-функция, $x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1$, Ψ — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода. Имеем неравенства

$$\left(n_0 + \frac{1}{2}\right) B - \|V\|_\infty < E < \left(n_0 + \frac{1}{2}\right) B + \|V\|_\infty,$$

откуда

$$-n_0 + \frac{\|V\|_\infty}{B} > \frac{1}{2} - \frac{E}{B} > -n_0 - \frac{\|V\|_\infty}{B}.$$

Следовательно, для достаточно больших B величина $(1/2) - (E/B)$ находится в сколь угодно малой окрестности точки $-n_0$. Далее, функция Γ имеет полюс первого порядка в точке $-n_0$. С использованием условия теоремы для достаточно больших B получаем

$$\left| \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{B} \right) \right| \leq \frac{C}{\left| \frac{1}{2} - \frac{E}{B} + n_0 \right|} = \frac{CB}{|E_{n_0} - E|} \leq C_1 B. \quad (8)$$

Наконец, заметим, что согласно [13]

$$\Psi(\alpha, 1, z) = \frac{1}{z^\alpha} + O \left(\frac{1}{z^{\alpha+1}} \right), \quad (9)$$

где $-\pi < \arg z \leq \pi$, $z \neq 0$.

Пусть $\psi(x)$ – собственная функция оператора $H^{(B)}$, удовлетворяющая условию теоремы. Имеем

$$\psi(x) = - \int_{\mathbb{R}^2} G_0^{(B)}(x, y, E) V(y) \psi(y) dy, \quad (10)$$

откуда

$$|\psi(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |G_0^{(B)}(x, y, E)|^2 |V(y)|^2 dy \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Предположим, что $|y| \leq R$, $|x| \geq R + \delta$, тогда для достаточно больших B имеет место неравенство $B(x-y)^2/2 \geq 1$ (действительно, в противном случае $|x| \leq |x-y| + |y| < \sqrt{2/B} + R < R + \delta$ для больших B). Пусть $\sigma \in (0, 1)$ произвольно. Оценим $|\psi(x)|^2$ для достаточно больших B и $|x| \geq R + \delta$, пользуясь проведенными выше рассуждениями и соотношениями (7)–(11):

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^2 &\leq \int_{\{B(x-y)^2/2 \geq 1\}} |G_0^{(B)}(x, y, E)|^2 |V(y)|^2 dy \leq \\ &\leq CB^2 \|V\|_\infty^2 \int_{\{B(x-y)^2/2 \geq 1\} \cap \{|y| \leq R\}} \left(\frac{1}{2} B(x-y)^2 \right)^{2(E/B-1/2)} \times \\ &\quad \times e^{-B(x-y)^2/2} dy \leq C_1 B^2 \|V\|_\infty^2 \int_{\{|y| \leq R\}} \exp \left[-\frac{1}{2} (1-\sigma) B(x-y)^2 \right] dy \leq \\ &\leq C_1 B^2 \|V\|_\infty^2 \int_{\{|y| \leq R\}} \exp \left[-\frac{1}{2} (1-\sigma) B |x| - |y| \right]^2 dy = \\ &= C_1 B^2 \|V\|_\infty^2 \int_{\{|y| \leq R\}} \exp \left[-\frac{1}{2} (1-\sigma) B |x|^2 \left| 1 - \frac{|y|}{|x|} \right|^2 \right] dy \leq \\ &\leq C_1 B^2 \|V\|_\infty^2 \exp \left[-\frac{1}{2} (1-\sigma) B \delta^2 (R + \delta)^{-2} |x|^2 \right] \pi R^2. \end{aligned}$$

Полученное неравенство и доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы имеет место неравенство

$$\int_{\{|x| \geq R+\delta\}} |\psi(x)|^2 dx \leq C e^{-aB}, \quad a > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к полярным координатам, получаем оценку

$$\int_{\{|x| \geq R+\delta\}} |\psi(x)|^2 dx \leq C B^2 \int_{R+\delta}^{\infty} e^{-2kB\rho^2} \rho d\rho = \frac{CB}{4k} e^{-2kB(R+\delta)^2} \leq C_1 e^{-aB},$$

где $a \in (0, 2k(R+\delta)^2)$ произвольно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае если $V(x) \geq 0$ или $V(x) \leq 0$ для всех x , из следствия 2 вытекает, что при $B \rightarrow \infty$ и $E \rightarrow E_{n_0}$

$$\int_{\{x: |V(x)| \geq \epsilon_0 > 0\}} |\psi(x)|^2 dx \rightarrow 0,$$

где ϵ_0 — любое положительное число. Это означает, что состояния частицы с данными энергиями E в пределе локализуются вне “области локализации” потенциала. Если же $B \rightarrow \infty$, но энергии E , наоборот, отделены от E_{n_0} , то в случае финитного потенциала согласно следствию 2 состояния частицы стремятся локализоваться там же, где сосредоточен потенциал.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В данном разделе будет предполагаться, что потенциал $V(x)$ ненулевой и знакопостоянный для всех x , т.е. $V(x) \geq 0$ (или $V(x) \leq 0$).

ЛЕММА 1 (по поводу доказательства см. [14]). Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и для некоторых $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\|\phi\| = 1$, $\|\psi\| = \epsilon$, выполнено равенство $A\phi = \lambda\phi + \psi$. Тогда

$$\rho(\lambda, \sigma(A)) = \inf_{\mu \in \sigma(A)} |\lambda - \mu| \leq \epsilon.$$

Заметим, что условие $V \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ обеспечивает квадратичную суммируемость ядер операторов $\sqrt{V} P_n \sqrt{V}$ и $P_n V$. Это вытекает из вида ядра P_n в симметричной калибровке [5] (калибровка здесь роли не играет, см. доказательство теоремы 3). Аналогично ядра операторов $\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V}$ и $R_0(E) V$ тоже квадратично-суммируемы. Это следует из вида ядра $R_0(E)$ и известных асимптотических свойств вырожденной гипергеометрической функции второго рода. Таким образом, все перечисленные операторы компактны.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\epsilon_0 > 0$. Для любого собственного значения $E \in (E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2) \setminus \{E_{n_0}\}$ оператора H найдется собственное значение λ оператора $\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V}$ (а также для достаточно малых $\|V\|_\infty/B$ для любого собственного значения $\lambda \neq 0$ оператора $\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V}$ найдется собственное значение E оператора H) такое, что имеет место равенство

$$E = E_{n_0} + \lambda + O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right),$$

причем

$$\left|O\left(\frac{\|V\|_\infty^2}{B}\right)\right| \leq (2 + \epsilon_0) \frac{\|V\|_\infty^2}{B}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение Шредингера $H\psi = E\psi$ для рассматриваемых E можно переписать в виде уравнения $\psi = -R_0(E)V\psi$ или, после известной замены $\phi = \sqrt{V}\psi$ [15], в виде (см. (2))

$$\phi = -\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V} \phi = -\frac{\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V} \phi}{E_{n_0} - E} - \sqrt{V} Q(E) \sqrt{V} \phi. \quad (12)$$

При этом операторы $\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V}$, $\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V}$ и $\sqrt{V} Q(E) \sqrt{V}$ являются самосопряженными в силу знакопостоянства V .

Пусть $E \in (E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2) \setminus \{E_{n_0}\}$, тогда для некоторого $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ с единичной нормой выполнено уравнение (12). Используя лемму 1 и оценку (4), получаем неравенство

$$\rho(E - E_{n_0}, \sigma(\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V})) \leq \frac{2\|V\|_\infty |E - E_{n_0}|}{B} \leq \frac{2\|V\|_\infty^2}{B},$$

из которого и вытекает первое утверждение теоремы.

Пусть, наоборот, $\lambda \in \sigma(\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V}) \setminus \{0\}$, ϕ — соответствующий собственный вектор такой, что $\|\phi\|_2 = 1$. Будем предполагать в соответствии с условием теоремы, что $\|V\|_\infty/B < 1/2$. Положим $E = E_{n_0} + \lambda$, тогда

$$|E - E_{n_0}| = |\lambda| = \|\sqrt{V} P_{n_0} \sqrt{V} \phi\|_2 \leq \|V\|_\infty < \frac{B}{2}.$$

Вследствие (2)

$$\sqrt{V} R_{n_0}(E) \sqrt{V} \phi = -\phi + \sqrt{V} Q(E) \sqrt{V} \phi,$$

откуда, как и выше, следует, что

$$\rho(-1, \sigma(\sqrt{V} R_{n_0}(E) \sqrt{V})) \leq \frac{2\|V\|_\infty}{B}.$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ существует собственное значение μ оператора $\sqrt{V} R_{n_0}(E) \sqrt{V}$, для которого

$$|\mu + 1| \leq \frac{(2 + \epsilon)\|V\|_\infty}{B}. \quad (13)$$

Пусть $\|V\|_\infty/B$ настолько мало, что $\mu < 0$ и $|\mu| \geq 1 - \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$. Число -1 , очевидно, является собственным значением оператора $\sqrt{V/|\mu|} R_{n_0}(E) \sqrt{V/|\mu|}$. Следовательно, E – собственное значение оператора $H_0 + V/|\mu|$. Имеем в силу (13)

$$\left| V(x) - \frac{V(x)}{|\mu|} \right| = |V(x)| \left| \frac{1 + \mu}{\mu} \right| \leq \frac{(2 + \epsilon)\|V\|_\infty^2}{B(1 - \delta)}. \quad (14)$$

Уравнение Шредингера $(H_0 + |\mu|^{-1}V)\psi = E\psi$ перепишем в виде

$$(H_0 + V)\psi = E\psi + V(1 - |\mu|^{-1})\psi.$$

В силу сказанного выше существует решение данного уравнения такое, что $\|\psi\|_2 = 1$. При этом из леммы 1 и выражения (14) для достаточно малых ϵ, δ вытекает неравенство

$$\rho(E, \sigma(H)) = \rho(E_{n_0} + \lambda, \sigma(H)) < \frac{(2 + \epsilon_0)\|V\|_\infty^2}{B},$$

что и доказывает второе утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (12) после скалярного умножения равенства на $\varnothing$ легко выводится, что если $\|V\|_\infty < B/2$, то собственные значения оператора H из $(E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2)$ лежат левее или правее E_{n_0} в зависимости от знака $V(x)$ (для $n_0 = 0$ это тривиально).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $E = E_{n_0}$ – собственное значение оператора H , ψ – соответствующая собственная функция. Тогда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора $P_{n_0}V$, отвечающее этой же собственной функции (если $\sqrt{V}\psi \neq 0$, то $\lambda = 0$ – собственное значение также и оператора $\sqrt{V}P_{n_0}\sqrt{V}$). Действительно, действуя на обе части равенства $(H_0 + V)\psi = E_{n_0}\psi$ оператором P_{n_0} , получаем $P_{n_0}V\psi = 0$.

Обозначим через $A \subset \mathbb{R}^2$ совокупность точек, в которых функция $V(x)$ непрерывна. Положим $V(A) = \{V(x) : x \in A\}$.

ТЕОРЕМА 5. Для любой последовательности $B_m \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$) и для любого $\lambda \in V(A)$ существует последовательность собственных значений $E_m^{(n_0)} \in \sigma(H^{(B_m)})$ таких, что $\lim_{m \rightarrow \infty} E_m^{(n_0)} = E_{n_0} + \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4 достаточно доказать для $\lambda \neq 0$ существование последовательности собственных значений $\lambda_m \in \sigma(\sqrt{V}P_{n_0}^{(B_m)}\sqrt{V})$ таких, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lambda$. В случае $\lambda = 0$ требуемая последовательность $\{E_m^{(n_0)}\}$ всегда найдется, так как существенный спектр оператора H совпадает со спектром H_0 [3]. Поскольку сдвиг не меняет спектра оператора H [5], то можно считать, что $\lambda = V(0)$. Выясним поведение собственных значений оператора $\sqrt{V}P_{n_0}^{(B)}\sqrt{V}$ при $B \rightarrow \infty$. Для $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ имеем равенство

$$\sqrt{V}P_{n_0}^{(B)}\sqrt{V}\phi = B \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{V(x)} K_{n_0}^{(1)}(\sqrt{B}x, \sqrt{B}y) \sqrt{V(y)} \phi(y) dy, \quad (15)$$

где $K_{n_0}^{(B)}(x, y)$ – ядро оператора $P_{n_0}^{(B)}$ [5]. Определим в $L^2(\mathbb{R}^2)$ унитарный оператор формулой

$$U^{(B)}\phi(x) = B^{-1/2}\phi(B^{-1/2}x).$$

Из равенства (15) вытекает, что $U^{(B)}$ устанавливает унитарную эквивалентность операторов $\sqrt{V(x)}P_{n_0}^{(B)}\sqrt{V(x)}$ и $\sqrt{V(x/\sqrt{B})}P_{n_0}^{(1)}\sqrt{V(x/\sqrt{B})}$. Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. В силу теоремы Лебега о предельном переходе для всех $x \in \mathbb{R}^2$ имеем при $B = B_m \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \sqrt{V\frac{x}{\sqrt{B}}}P_{n_0}^{(1)}\sqrt{V\frac{x}{\sqrt{B}}}\phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{V\frac{x}{\sqrt{B}}}K_{n_0}^{(1)}(x, y)\sqrt{V\frac{y}{\sqrt{B}}}\phi(y)dy \rightarrow \\ &\rightarrow V(0) \int_{\mathbb{R}^2} K_{n_0}^{(1)}(x, y)\phi(y)dy = V(0)P_{n_0}^{(1)}\phi(x). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом (см. вид функции $K_n^{(1)}$ в работе [5])

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{V\frac{x}{\sqrt{B}}}K_{n_0}^{(1)}(x, y)\sqrt{V\frac{y}{\sqrt{B}}}\phi(y)dy \right| &\leq \\ &\leq \frac{\|V\|_\infty}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x-y)^2/4} \left| L_{n_0} \frac{(x-y)^2}{2} \right| |\phi(y)|dy, \end{aligned} \quad (17)$$

где L_{n_0} – многочлен Лагерра. Интеграл в правой части (17) представляет собой свертку функций из $L^1(\mathbb{R}^2)$ и $L^2(\mathbb{R}^2)$ и в силу неравенства Юнга [16] принадлежит $L^2(\mathbb{R}^2)$. Опять применяя теорему Лебега, получаем, что сходимость в (16) имеет место в $L^2(\mathbb{R}^2)$. По теореме Банаха–Штейнхауза операторы $\sqrt{V(x/\sqrt{B})}P_{n_0}^{(1)}\sqrt{V(x/\sqrt{B})}$ сходятся поточечно к оператору $V(0)P_{n_0}^{(1)}$ при $B = B_m \rightarrow \infty$. Вследствие теоремы VIII.25 из книги [17] имеет место сильная резольвентная сходимость этих операторов. Спектр оператора $V(0)P_{n_0}^{(1)}$ состоит из чисел 0 и $V(0)$. Согласно теореме VIII.24 из той же книги существуют собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_m \in \sigma\left(\sqrt{V(x/\sqrt{B_m})}P_{n_0}^{(1)}\sqrt{V(x/\sqrt{B_m})}\right) &= \sigma(\sqrt{V(x)}P_{n_0}^{(B_m)}\sqrt{V(x)}), \\ m &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

такие, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = V(0)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из результатов работ [7], [8] о плотности состояний вытекает, что в условиях теоремы 5 для каждой точки $\lambda \in V(A)$ найдется, вообще говоря, своя последовательность $B_m = B_m(\lambda) \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, для которой справедливо утверждение теоремы.

Положим $H(\mu) = H_0 + \mu V(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$ (μ – “константа связи”). Если $E = E(\mu_0) \neq E_{n_0}$ – собственное значение оператора $H(\mu_0)$ кратности N , то в окрестности μ_0 собственные значения E , находящиеся вблизи E_{n_0} , задаются N аналитическими функциями $E = E_i(\mu)$, $i = 1, \dots, N$ (см. [18], добавление 2, теорема 3.1).

ТЕОРЕМА 6. (ср. [11], раздел 3). *Предположим, что $V(x)$ не обращается в нуль и для некоторого $N > 0$ справедлива оценка $|V(x)|^{-1} \leq (1+|x|)^N$. Пусть $E \in (E_{n_0} - B/2, E_{n_0} + B/2)$, $E \neq E_{n_0}$ и $\text{sign}(E - E_{n_0}) = \text{sign} V$. Предположим, что величина $|E - E_{n_0}|$ достаточно мала или B достаточно велико. Тогда существуют такие $\mu_m > 0$, $m = 1, 2, \dots$, что $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^{-2} < \infty$ и $E \in \sigma(H(\mu_m))$. При этом функции $E_i(\mu)$, $i = 1, \dots, N$, с возрастанием μ переходят точку E при $\mu = \mu_m$, $m = 1, 2, \dots$, справа налево, если $V \leq 0$, и слева направо, если $V \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V}$ самосопряжен и ограничен. В силу леммы Глазмана ([18], добавление 1) необходимым и достаточным условием наличия у такого оператора бесконечного множества отрицательных собственных значений является существование бесконечномерного линейного многообразия $M \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ такого, что для $\psi \in M \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $(\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V} \psi, \psi) < 0$.

Докажем вначале, что линейное многообразие $L = \text{im } P_{n_0} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, где $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ –пространство быстроубывающих функций, бесконечномерно. Уравнение Шредингера $H_0 \psi = E \psi$ после преобразования Фурье по переменной x_1 приводится к уравнению для собственных значений для гармонического осциллятора (см., например, [7], [8]). Пользуясь этим, легко усмотреть, что функции вида

$$\psi = \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1 p_1} C(p_1) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{B} x_2 - \frac{p_1}{\sqrt{B}} \right)^2 \right] H_{n_0} \left(\sqrt{B} x_2 - \frac{p_1}{\sqrt{B}} \right) dp_1,$$

где $H_{n_0}(x)$ –полином Эрмита, а $C(p_1) \in L^2(\mathbb{R})$, принадлежат $\text{im } P_{n_0}$ (константы в преобразовании Фурье выбираем как в [16], раздел IX.2). Без труда доказывается, что в случае $C(p_1) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место включение $\psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Выбирая бесконечную последовательность линейно независимых функций $C(k) = C_\nu(k)$, $\nu = 1, 2, \dots$, получаем линейную независимость соответствующих собственных функций $\psi = \psi_\nu(x)$. Следовательно, линейное многообразие L бесконечномерно. Поэтому бесконечномерным будет и линейное многообразие $M = \{\phi/\sqrt{V} : \phi \in L\} \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ (последнее включение выполнено в силу условия теоремы).

Пусть $\psi = \phi/\sqrt{V} \in M \setminus \{0\}$, где $\phi \in L$. Считаем для определенности, что $V < 0$. Если $E_{n_0} - E$ или B^{-1} мало, для всех $\psi \in M \setminus \{0\}$, пользуясь выражениями (2) и (4), выполним следующее преобразование:

$$\begin{aligned} (\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V} \psi, \psi) &= -(R_0(E) \phi, \phi) = -\frac{(P_{n_0} \phi, \phi)}{E_{n_0} - E} - (Q(E) \phi, \phi) = \\ &= \|\phi\|^2 \left(-\frac{(\phi/\|\phi\|, \phi/\|\phi\|)}{E_{n_0} - E} - (Q(E)(\phi/\|\phi\|), \phi/\|\phi\|) \right) = \\ &= \|\phi\|^2 \left(-\frac{1}{E_{n_0} - E} + O(B^{-1}) \right) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, у оператора $\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V}$ имеется бесконечное число отрицательных собственных значений $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots < 0$. Так как оператор $\sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V}$ является оператором Гильберта–Шмидта, то $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. Положим $\mu_n = |\lambda_n|^{-1}$, тогда

оператор

$$\mu_n \sqrt{V} R_0(E) \sqrt{V} = \sqrt{\mu_n V} R_0(E) \sqrt{\mu_n V}$$

имеет собственное значение, равное -1 , а следовательно, $E \in \sigma(H(\mu_n))$ (см. доказательство теоремы 4). Из сказанного вытекает первое утверждение теоремы.

Для каждой из аналитических функций $E_i(\mu)$ (см. замечание 4) из формулы Рэлея ([18], приложение 1) вытекает соотношение

$$\frac{dE_i(\mu)}{d\mu} = (V\psi_i(x, \mu), \psi_i(x, \mu)) < 0,$$

где через $\psi_i(x, \mu)$ обозначена собственная функция оператора $H(\mu)$, по норме равная единице, отвечающая собственному значению $E_i(\mu)$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] *S. M. Girvin, R. E. Pranger (Eds).* The Quantum Hall Effect. Berlin: Springer, 1987.
- [2] *М. М. Скриганов.* Тр. МИАН. 1985. Т. 171. С. 1.
- [3] *A. Iwatsuka.* J. Math. Kyoto Univ. 1983. V. 23. P. 475.
- [4] *А. С. Лыскова.* ТМФ. 1985. Т. 65. № 3. С. 368.
- [5] *В. А. Гейлер.* Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 1.
- [6] *H. Grosse.* Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 59.
- [7] *G. D. Raikov.* Commun. Part. Diff. Equat. 1998. V. 23. P. 1583.
- [8] *M. Dimassi, G. D. Raikov.* Spectral asymptotics for quantum Hamiltonians in strong magnetic fields. Preprint mp-arc 01-294. Texas Math. Physics archive, 2001.
- [9] *H. D. Cornean, G. Nenciu.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 192. P. 671.
- [10] *H. D. Cornean, G. Nenciu.* Two-dimensional magnetic schrödinger operators: width of mini-bands in the tight binding approximation. Preprint E.S.I. № 608. Vienna, 1998.
- [11] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 2001. Т. 126. С. 196.
- [12] *Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кириш, Б. Саймон.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [13] *А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
- [14] *В. Ф. Лазуткин.* Квазиклассическая асимптотика собственных функций. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. Дифференциальные уравнения с частными производными-5. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1988. С. 135.
- [15] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
- [16] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
- [17] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [18] *Ф. А. Березин, М. А. Шубин.* Уравнение Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.

Поступила в редакцию 11.I.2002 г.,
после доработки 17.VII.2002 г.