Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, Термодинамический формализм и сингулярные инвариантные меры критических отображений окружности, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 2, 191–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:57:05

© 2003 г.

А. А. Джалилов*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ КРИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

Хорошо известно, что в пространстве аналитических гомеоморфизмов окружности с одной кубической критической точкой и числом вращения, равным “золотому сечению”, ренормгрупповое преобразование имеет единственную неподвижную точку T_0 . Для критического отображения T_0 построен термодинамический формализм и с его помощью вычислены гёльдеровские показатели сингулярной инвариантной меры отображения T_0 .

Ключевые слова: гомеоморфизмы окружности, критическая точка, термодинамический формализм, гёльдеровский показатель.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе изучаются инвариантные меры критических гомеоморфизмов окружности.

Обозначим через X множество пар $(\xi(x), \eta(x))$ аналитических возрастающих гомеоморфизмов прямой, удовлетворяющих следующим условиям [1]:

- а) $\xi(0) = \eta(0) + 1$;
- б) $\eta(\xi(0)) = \xi(\eta(0))$;
- в) $0 < \xi(0) < 1$;
- г) $\xi(\eta(0)) > 0$;
- д) $\xi'(0) = \eta'(0) = \xi''(0) = \eta''(0) = 0$; $\xi'''(0) \neq 0$, $\eta'''(0) \neq 0$;
- е) $(\xi \circ \eta)'''(0) = (\eta \circ \xi)'''(0)$.

Условия а–в позволяют при помощи $(\xi, \eta) \in X$ построить гомеоморфизм единичной окружности $[\eta(0), \xi(0))$:

$$T_{\xi, \eta} x = \begin{cases} \xi(x), & \text{если } x \in [\eta(0), 0), \\ \eta(x), & \text{если } x \in [0, \xi(0)). \end{cases} \quad (1.1)$$

Число вращения $\rho = \rho(\xi, \eta)$ для гомеоморфизма $T_{\xi, \eta}$ определяется обычным образом [2]. Точка $x = 0$ является единственной кубической критической точкой отображения $T_{\xi, \eta}$. Типичным примером таких отображений является семейство отображений

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: ahtam21@rambler.ru

Арнольда:

$$f_{\theta}(x) = x + \theta - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \pmod{1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма окружности T_1 и T_2 называются C^r -сопряженными, $r \geq 0$, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $G \in C^r(S^1)$ (при $r \geq 1$ необходимо, чтобы $G^{-1} \in C^1(S^1)$) такой, что выполняется следующее равенство:

$$G \circ T_1 = T_2 \circ G.$$

Гомеоморфизм G называется сопрягающим гомеоморфизмом или просто сопряжением. Наряду с этим часто используется также термин “замена переменных”. Йоккос показал [3], что аналитические критические отображения окружности с неплюской критической точкой и иррациональным числом вращения ρ топологически сопряжены с линейным поворотом $T_{\rho}x = \{x + \rho\}$ ($\{a\}$ обозначает дробную часть числа a). Как показал Ханин [4], в отличие от диффеоморфизмов (см. [5]) сопрягающий гомеоморфизм для критических отображений с иррациональным числом вращения является сингулярным. С другой стороны, де Фария и де Мело [6] доказали, что любые два аналитических критических отображения с кубической критической точкой и иррациональным числом вращения ρ “ограниченного типа” (т.е. элементы разложения ρ в непрерывную дробь ограничены в совокупности) гладко сопряжены. Обозначим через X_{γ} подмножество таких $(\xi, \eta) \in X$, что $\rho(T_{\xi, \eta}) = \gamma$, $\gamma = (\sqrt{5} - 1)/2$, – “золотое сечение”. Определим преобразование ренормгруппы $R_1: X_{\gamma} \longrightarrow X_{\gamma}$ формулой [1]

$$R_1(\xi(x), \eta(x)) = (\alpha\eta(\alpha^{-1}x), \alpha\eta(\xi(\alpha^{-1}x))), \quad (1.2)$$

где $\alpha = [\eta(0) - \xi(\eta(0))]^{-1}$.

В силу условий б и в константа $\alpha < -1$. В работе Остлунда и др. [1] изучены неподвижные точки преобразования R_1 и его структура вблизи неподвижной точки (линеаризация, устойчивые многообразия и т.д.). Преобразование ренормгруппы R_1 в подмножестве X_{γ} имеет единственную неподвижную точку (ξ_0, η_0) [1], [7]. Функции $\xi_0(x)$ и $\eta_0(x)$ являются вещественно аналитическими. Обозначим $T_{\xi_0, \eta_0} = T_0$.

Целью настоящей работы является построение термодинамического формализма для отображения T_0 и на этой основе вычисление гёльдеровских показателей сингулярности его инвариантной меры μ . В теории универсальности термодинамический формализм впервые использовали Вул, Синай и Ханин [5].

Одним из замечательных свойств “золотого сечения” является то, что его разложение в непрерывную дробь имеет простой вид $\gamma = [1, 1, \dots, 1, \dots]$. Обозначим через q_{n-1}/q_n n -ю подходящую дробь γ . Числа q_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad q_0 = q_1 = 1.$$

Числа q_n называются числами Фибоначчи. Определим последовательность конечных динамических разбиений τ_n . Разбиение τ_n получается при помощи части траектории особой точки $x_0 = 0$: $\{x_i = T_0^i x_0, 0 \leq i < q_{n+2}\}$. Для каждого $n \geq 1$ обозначим

отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n} , через $\Delta_0^{(n)}$. Положим $\Delta_i^{(n)} = T_0^i \Delta_0^{(n)}$, $i \geq 1$. Системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)}, 0 \leq i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)}, 0 \leq j < q_n\}$ образуют разбиение окружности [8], которое обозначим через τ_n и назовем n -м динамическим разбиением окружности. Отметим, что любые два отрезка разбиения τ_n могут пересекаться только концевыми точками. При переходе от τ_n к τ_{n+1} все отрезки $\Delta_j^{(n+1)}$, $0 \leq j < q_n$, сохраняются, а каждый из отрезков $\Delta_i^{(n)}$ разбивается на два:

$$\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \cup \Delta_{i+q_n}^{(n+1)}.$$

При помощи последовательности динамических разбиений $\{\tau_n, n \geq 1\}$ можно построить своеобразную символическую динамику для отображения T_0 . Возьмем произвольную точку $x \in S^1 \setminus \{x_i, i = 0, 1, \dots\}$ и сопоставим ей единственное слово $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ следующим индуктивным способом:

$$\begin{aligned} a_n &= a, \text{ если } x \in \Delta_j^{(n)}, \quad 0 \leq j < q_{n-1}, \\ a_n &= 1, \text{ если } x \in \Delta_{i+q_{n-1}}^{(n)}, \quad 0 \leq i < q_n, \\ a_n &= 0, \text{ если } x \in \Delta_i^{(n+1)}, \quad 0 \leq i < q_n. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие

$$\begin{aligned} \varphi: S^1 \setminus \{x_i, i \geq 0\} &\leftrightarrow \{\vec{a} = (a_1, \dots, a_n, \dots); \quad a_i = a, 0, 1; \\ &a_{i+1} = a \text{ тогда и только тогда, когда } a_i = 0, \quad i \geq 1\} = X_0. \end{aligned}$$

Отметим, что при этом каждому отрезку $\Delta^{(n)}$ динамического разбиения τ_n соответствует единственное слово длины n : $(a_1, \dots, a_n)$.

Положим $\Delta^{(n)} = \Delta(a_1, \dots, a_n)$. Лебегова мера на окружности индуцирует вероятностную меру λ_0 на пространстве последовательностей X_0 : $\lambda_0(a_1, \dots, a_n) = |\Delta(a_1, \dots, a_n)|$.

Определим еще одно пространство односторонних последовательностей

$$\begin{aligned} I_0 &= \{\vec{\varepsilon}: \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots), \quad \varepsilon_i = a, 0, 1; \\ &\varepsilon_{i+1} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \varepsilon_i = a, \quad i \geq 1\}. \end{aligned}$$

Обозначим через α_0 константу масштабного преобразования, соответствующего паре (ξ_0, η_0) , т.е. $\alpha_0 = [\eta_0(0) - \xi_0(\eta_0(0))]^{-1} \approx -1.28$ [1]. Обозначим через V_1 окрестность точки $x_1 = \eta_0(0)$: $[\eta_0(0), x_3] \cup [x_2, \xi_0(0)]$. Положим

$$\tilde{\gamma}(\varepsilon) = \begin{cases} (0, a, 0, a, \dots), & \text{если } \varepsilon = a, \\ (a, 0, a, 0, \dots), & \text{если } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Теперь можно сформулировать теорему о термодинамическом формализме для отображения T_0 .

ТЕОРЕМА 1.1. Для отображения T_0 существует непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U: I_0 \longrightarrow R^1$, обладающая следующими свойствами:

1. Для любых $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ и $\vec{b} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, b_{k+1}, \dots, b_n, \dots)$ из пространства I_0 верна оценка

$$|U(\vec{\varepsilon}) - U(\vec{b})| \leq C_1 |\alpha_0|^{-k}, \quad k \geq 1, \quad (1.3)$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от $\vec{\varepsilon}$, $\vec{b}$ и k .

2. Пусть $\Delta(a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n) \subset \Delta(a_1, \dots, a_r) \subset V_1$, $1 \leq r < n$, тогда

$$|\Delta(a_1, \dots, a_n)| = |\Delta(a_1, \dots, a_r)| (1 + \psi_1(a_1, \dots, a_n)) \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{s=r+1}^n U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_r, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1)) \right\}, \quad (1.4)$$

где $|\psi(a_1, \dots, a_n)| \leq \text{const} |\alpha_0|^{-r}$.

Используя последнее утверждение теоремы, длину отрезка $\Delta^{(n)} \in \tau_n$ можно выразить в “гиббсовском” виде:

$$\text{const} \leq \frac{|\Delta^{(n)}|}{\exp \left\{ \sum_{s=1}^n U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_1, \vec{\gamma}) \right\}} \leq \text{Const}.$$

По этой причине, следуя терминологии статистической механики, функцию U назовем потенциалом, соответствующим отображению T_0 . Из теоремы 1.1 видно, что этот потенциал экспоненциально слабо зависит от далеких переменных, т.е. с точки зрения статистической механики является “хорошим” [9], [10]. Заметим, что потенциал U , удовлетворяющий утверждениям теоремы 1.1, единствен и инвариантен при гладкой замене переменных.

Описание многих физических явлений может быть сведено к изучению статических свойств сингулярных инвариантных мер [11]. Как уже отмечалось, инвариантные меры критических гомеоморфизмов окружности с иррациональными числами вращения являются сингулярными относительно меры Лебега λ . Определим два гёльдеровских показателя сингулярности инвариантной меры μ :

$$\underline{\tau}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu([x, x + \varepsilon])}{\ln |\varepsilon|}, \\ \overline{\tau}(x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu([x, x + \varepsilon])}{\ln |\varepsilon|}. \quad (1.5)$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ являются инвариантными относительно T_0 . Отсюда, а также из эргодичности T_0 относительно мер μ и λ [12] следует, что обе эти функции являются почти постоянными и по мере μ , и по мере λ . Эти постоянные обозначим $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ и $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$ соответственно. Грачек и Светек [12] показали, что для кубических критических гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения “ограниченного типа” справедливы неравенства

$$1 < \underline{\tau}(\lambda) \leq \overline{\tau}(\lambda) < +\infty, \\ 0 < \underline{\tau}(\mu) \leq \overline{\tau}(\mu) < 1. \quad (1.6)$$

Другой важной характеристикой сингулярной инвариантной меры μ является хаусдорфова размерность $HD(\mu)$ (точная нижняя грань размерностей множеств “полной” меры μ). Известная лемма Фростмана утверждает, что хаусдорфова размерность $HD(\mu)$ совпадает с $\underline{\tau}(\mu)$. Отсюда, используя (1.6), получаем оценку для хаусдорфовой размерности сингулярной инвариантной меры μ : $0 < HD(\mu) < 1$.

Построенный термодинамический формализм позволяет доказать, что для отображения T_0 нижний и верхний показатели сингулярной инвариантной меры μ совпадают. Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть μ – нормированная инвариантная мера критического гомеоморфизма T_0 . Тогда для почти всех x по мере Лебега λ (и по мере μ) существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu([x, x + \varepsilon])}{\ln |\varepsilon|} = \tau(\lambda) \quad (= \tau(\mu)),$$

и его значение не зависит от x .

2. ТРАЕКТОРИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ РАЗБИЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЯ T_0

В этом параграфе мы будем изучать свойства траектории и динамических разбиений критической точки отображения T_0 (см. рисунок).

Отметим, что отображение T_0 определяется при помощи пары $(\xi_0(x), \eta_0(x))$, являющейся неподвижной точкой ренормгруппового преобразования R_1 , т.е. $R_1(\xi_0(x), \eta_0(x)) = (\xi_0(x), \eta_0(x))$. Используя явный вид преобразования R_1 , напишем систему уравнений для $\xi_0(x)$ и $\eta_0(x)$:

$$\begin{cases} \xi_0(x) = \alpha_0 \eta_0(\alpha_0^{-1}x), \\ \eta_0(x) = \alpha_0 \eta_0(\xi_0(\alpha_0^{-1}x)). \end{cases} \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.1. Для любого $n \geq 1$ справедливы равенства

$$T_0^{q_n}(\alpha_0^{-n}x) = \alpha_0^{-n}\xi_0(x) \quad \text{при } x \in [\eta_0(0), 0), \quad (2.2)$$

$$T_0^{q_{n+1}}(\alpha_0^{-n}x) = \alpha_0^{-n}\eta_0(x) \quad \text{при } x \in [0, \xi_0(0)]. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму будем доказывать по индукции. Докажем сначала равенство (2.2). Пусть $x \in [\eta_0(0), 0)$. Если $n = 1$, то $q_1 = 1$ и $\alpha_0^{-1}x \in (0, \alpha_0^{-1}\eta_0(0)] \subset [0, \xi_0(0)]$. Используя определение T_0 и первое равенство системы (2.1), получим

$$T_0(\alpha_0^{-1}x) = \eta_0(\alpha_0^{-1}x) = \alpha_0^{-1}\xi_0(x).$$

Предположим, что равенство (2.2) справедливо для $k \leq n$. Отсюда, используя равенство $q_{i+1} = q_i + q_{i-1}$, $i \geq 1$, и систему уравнений (2.1), получаем

$$\begin{aligned} T_0^{q_{n+1}}(\alpha_0^{-(n+1)}x) &= T_0^{q_n}(T_0^{q_{n-1}}(\alpha_0^{-(n-1)}(\alpha_0^{-2}x))) = T_0^{q_n}(\alpha_0^{-(n-1)}\xi_0(\alpha_0^{-2}x)) = \\ &= T_0^{q_{n-1}}(T_0^{q_{n-2}}(\alpha_0^{-(n-2)}(\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-2}x)))) = \\ &= T_0^{q_{n-1}}(\alpha_0^{-(n-2)}\xi_0(\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-2}x))) = \dots = \\ &= T_0^{q_2}(\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-1} \dots (\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-2}x)) \dots))) = \\ &= T_0(\xi_0(\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-1} \dots (\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-2}x)) \dots)))) = \\ &= \eta_0(\underbrace{(\xi_0\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-1} \dots (\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-2}x)) \dots))}_{n \text{ раз}}) = \\ &= \eta_0(\alpha_0\eta_0(\alpha_0^{-2}(\underbrace{\xi_0(\alpha_0^{-1} \dots (\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-2}x)) \dots)}_{(n-1) \text{ раз}}))) = \\ &= \alpha_0^{-1}\eta_0(\xi_0(\alpha_0^{-1} \dots (\alpha_0^{-1}\xi_0(\alpha_0^{-2}x)) \dots)) = \\ &= \dots = \alpha_0^{-(n-1)}\eta_0(\xi_0(\alpha_0^{-2}x)) = \\ &= \alpha_0^{-(n-1)}\eta_0(\alpha_0\eta_0(\alpha_0^{-3}x)) = \alpha_0^{-n}\eta_0(\alpha_0^{-1}x) = \alpha_0^{-(n-1)}\xi_0(x). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что если $y \in [\eta_0(0), 0)$, то $\alpha_0^{-1}\xi_0(y) \in [\eta_0(0), 0)$.

Первое утверждение леммы 2.1 доказано. Второе утверждение доказывается аналогичным образом.

ЛЕММА 2.2. Пусть $x_0 = 0$ и $x_i = T_0^i x_0$, $i \geq 1$. Тогда для всех $n \geq 1$ справедливо равенство

$$x_{q_{n+1}} = \alpha_0^{-n}x_1. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_{q_i} = \alpha_0^{-(i-1)}x_1$ при $i \leq n$. Тогда, используя лемму 2.1, получаем

$$\begin{aligned} x_{q_{n+1}} &= T_0^{q_{n+1}}x_0 = T_0^{q_n}(x_{q_n}) = T_0^{q_n}(\alpha_0^{-(n-1)}x_1) = \\ &= \alpha_0^{-(n-1)}\xi_0(x_1) = \alpha_0^{-(n-1)}x_2 = \alpha_0^{-(n-1)}\alpha_0^{-1}x_1 = \alpha_0^{-n}x_1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Через A_n обозначим множество, состоящее из первых q_{n+2} точек траектории осой точки x_0 , которые являются точками деления динамического разбиения τ_n , т.е. $A_n = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_{q_{n+2}-1}\}$. Введем обозначения $A_n^{(1)} = A_n \cap [\eta_0(0), 0)$, $A_n^{(2)} = A_n \cap [x_2, \xi_0(0))$, $A_n^{(3)} = A_n \cap (0, x_2]$.

Ясно, что $A_n = A_n^{(1)} \cup A_n^{(2)} \cup A_n^{(3)}$. Используя определения $A_n^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$, и структуру динамических разбиений, можно показать, что

$$|A_n^{(1)}| = |A_n^{(2)}| = q_n, \quad |A_n^{(3)}| = q_{n-1}.$$

Здесь $|\cdot|$ обозначает мощность множества. Следующая лемма описывает переход от A_n к A_{n+1} .

ЛЕММА 2.3. *Для каждого натурального n имеют место следующие соотношения:*

$$A_{n+1}^{(1)} = \alpha_0^{-1}(A_n^{(2)} \cup A_n^{(3)} \cup \{\xi_0(0)\}), \quad A_{n+1}^{(3)} = \alpha_0^{-1}A_n^{(1)}, \quad A_{n+1}^{(2)} = \xi_0(A_{n+1}^{(1)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эту лемму тоже докажем по индукции. Утверждение леммы для $n = 1$ легко проверяется. Множества A_n и A_{n+1} напомним в виде

$$A_n = A_{n-1} \cup (A_n \setminus A_{n-1}), \quad A_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \setminus A_n).$$

Для множеств A_{n-1} и A_n по индуктивному предположению справедливо утверждение леммы 2.3. Но, с другой стороны, A_{n-1} является частью A_n , а A_n есть часть A_{n+1} . Следовательно, нам достаточно доказать утверждение леммы 2.3 для множеств $A_n \setminus A_{n-1}$ и $A_{n+1} \setminus A_n$. Используя определение множеств A_i и (2.4), получаем

$$\begin{aligned} A_{n+1} \setminus A_n &= \{x_{q_{n+1}}, x_{q_{n+1}+1}, \dots, x_{q_{n+2}-1}\}, \\ A_n \setminus A_{n-1} &= \{x_{q_n}, x_{q_n+1}, \dots, x_{q_{n+1}-1}\}, \\ |(A_{n+1} \setminus A_n)^{(1)}| &= |(A_{n+1} \setminus A_n)^{(2)}| = q_{n-2}, \quad |(A_{n+1} \setminus A_n)^{(3)}| = q_{n-3}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Возьмем первый элемент $x_{q_{n+1}}$ множества $A_{n+1} \setminus A_n$. В силу леммы 2.2 $x_{q_{n+1}} = \alpha_0^{-1}x_{q_n}$. Значит, первый элемент множества $A_{n+1} \setminus A_n$ получается умножением на α_0^{-1} первого элемента $A_{n+1} \setminus A_n$. Переходим ко второму элементу $A_{n+1} \setminus A_n$. Здесь в зависимости от знака x_{q_n} возможны только два случая:

1) если $x_{q_n} \in [\eta_0(0), 0)$, то в силу (2.2)

$$x_{q_{n+1}+1} = T_0(\alpha_0^{-1}x_{q_n}) = \alpha_0^{-1}\xi_0(x_{q_n}) = \alpha_0^{-1}x_{q_n+1}, \quad x_{q_n+1} \in (0, \xi_0(0));$$

2) если $x_{q_n} \in (0, \xi_0(0))$, то в силу (2.3)

$$\begin{aligned} x_{q_{n+1}+1} &= T_0(\alpha_0^{-1}x_{q_n}) = \xi_0(\alpha_0^{-1}x_{q_n}); \\ x_{q_{n+1}+2} &= T_0(\xi_0(\alpha_0^{-1}x_{q_n})) = \eta_0(\xi_0(\alpha_0^{-1}x_{q_n})) = \alpha_0^{-1}x_{q_n+1} \end{aligned}$$

и т.д. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не кончатся элементы множества $A_{n+1} \setminus A_n$. Из пунктов 1 и 2 видно, что при этом для каждого элемента $x_{q_{n+1}+j}$,

$0 \leq j \leq q_{n+2} - 1$, множества $A_{n+1} \setminus A_n$ найдется элемент x_{q_n+i} множества $B = \{x_{q_n}, x_{q_n+1}, \dots, x_{q_n+p}\}$ с некоторым $p > 0$ такой, что или $x_{q_{n+1}+j} = \alpha_0^{-1} x_{q_n+i}$, или $x_{q_{n+1}+j} = \xi_0(\alpha_0^{-1} x_{q_n+i})$. Отметим, что когда j последовательно растет от 0 до $q_n - 1$, то i тоже последовательно растет от 0 до p . Мы покажем, что множество B совпадает с $A_n \setminus A_{n-1}$, т.е. $p = q_{n-1} - 1$. Элементы множества $A_{n+1} \setminus A_n$, лежащие в $[\eta_0(0), 0)$, получаются умножением элементов множества $B \cap (0, \xi_0(0))$ на α_0^{-1} , а элементы множества $A_{n+1} \setminus A_n$, лежащие в $(0, x_2]$, получаются умножением элементов множества $B \cap [\eta_0(0), 0)$ на α_0^{-1} . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |B \cap (0, \xi_0(0))| &= |(A_{n+1} \setminus A_n) \cap (\eta_0(0), 0)| = q_{n-2}, \\ |B \cap (\eta_0(0), 0)| &= |(A_{n+1} \setminus A_n) \cap (0, x_2)| = q_{n-3}. \end{aligned}$$

Значит, $|B| = q_{n-2} + q_{n-3} = q_{n-1}$. Следовательно, что множество B совпадает с $A_{n+1} \setminus A_n$. Лемма доказана.

Обозначим $\bar{A}_k = \{x_1, \dots, x_{q_{k+1}-1}, \xi_0(0)\}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть t – нечетное число. Тогда

$$\begin{aligned} A_{m+k} \cap [x_{q_m}, 0) &= \alpha_0^{-(m-1)} \bar{A}_k \cap [\eta_0(0), 0), \\ A_{m+k} \cap (0, x_{q_{m-1}}] &= \alpha_0^{-(m-1)} \bar{A}_k \cap (0, \xi_0(0)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если t – четное число, то

$$\begin{aligned} A_{m+k} \cap [x_{q_{m-1}}, 0) &= \alpha_0^{-(m-1)} \bar{A}_k \cap (0, \xi_0(0)], \\ A_{m+k} \cap (0, x_{q_m}] &= \alpha_0^{-(m-1)} \bar{A}_k \cap [\eta_0(0), 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство леммы легко следует из леммы 2.3.

Теперь мы переходим к изучению свойств динамических разбиений критической точки отображения T_0 . Фиксируем k и n , $n > k$;

$$\tau_n = \{\Delta_i^{(n)}, \quad 0 \leq i < q_{n+1}; \quad \Delta_j^{(n+1)}, \quad 0 \leq j < q_n\}.$$

Рассмотрим два произвольных соседних отрезка Δ_1 и Δ_2 динамического разбиения τ_n . Известно, что $|\Delta_1| \sim |\Delta_2|$ [12], т.е. $C_1 \leq |\Delta_1|/|\Delta_2| \leq C_2$, где константы C_1 и C_2 зависят только от T_0 .

ЛЕММА 2.5. Пусть $\Delta^{(n)} \in \tau_n$, $\Delta^{(n-k)} \in \tau_{n-k}$, $n > k$, и $\Delta^{(n)} \subset \Delta^{(n-k)}$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{|\Delta^{(n)}|}{|\Delta^{(n-k)}|} \leq C_3 |\alpha_0|^{-k}, \quad C_4 |\alpha_0|^{-3n} \leq |\Delta_0^{(n)}|,$$

где константы C_3 и C_4 зависят только от T_0 .

Лемма доказывается так же, как аналогичное утверждение для отображения Фейгенбаума (см. [5]).

Обозначим через $\tau_k^{(1)}$ и $\tau_k^{(2)}$ множества отрезков разбиения τ_k , содержащихся в отрезках $[\eta_0(0), 0]$ и $[0, \xi_0(0)]$, соответственно. Обозначим

$$\tau_{n,i} = \{\Delta^{(n)} : \Delta^{(n)} \in \tau_n, \quad \Delta^{(n)} \subset \Delta_0^{(i)}\}, \quad i = (n-k-1), (n-k).$$

Следующая лемма играет важную роль при построении термодинамического формализма для T_0 .

ЛЕММА 2.6. Пусть $(n - k)$ – нечетное число. Тогда

$$\tau_{n,n-k} = \alpha_0^{-(n-k)} \tau_k^{(1)}, \quad \tau_{n,n-k-1} = \alpha_0^{-(n-k)} \tau_k^{(2)}.$$

Если $(n - k)$ – четное число, то

$$\tau_{n,n-k-1} = \alpha_0^{-(n-k)} \tau_k^{(2)}, \quad \tau_{n,n-k} = \alpha_0^{-(n-k)} \tau_k^{(1)}.$$

Эти утверждения следуют из леммы 2.4.

Рассмотрим окрестность точки x_1 :

$$V_{n-k} = \Delta_1^{(n-k)} \cup \Delta_1^{(n-k+1)}.$$

Возьмем два отрезка Δ' и Δ такие, что $\Delta' \subset \Delta \subset V_{n-k}$ и $\Delta' \in \tau_{n+1}$, $\Delta \in \tau_n$. Нас интересует поведение $R_0 = |\Delta'|/|\Delta|$ при динамическом процессе. Обозначим

$$R_i = \frac{|T^i \Delta'|}{|T^i \Delta|}, \quad s_{n-k} = \begin{cases} q_{n-k+1}, & \text{если } \Delta \subset \Delta_1^{(n-k)}, \\ q_{n-k}, & \text{если } \Delta \subset \Delta_1^{(n-k+1)}. \end{cases}$$

ЛЕММА 2.7 [4]. Существует константа $C(T_0) > 0$ такая, что при достаточно больших $n > N(T_0)$ справедливо неравенство

$$\left| \ln \frac{R_i}{R_0} \right| \leq C(T_0) |\alpha_0|^{-k}, \quad 0 < i < s_{n-k}. \quad (2.8)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ T_0

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1, т.е. построим потенциал U , соответствующий отображению T_0 . В конце параграфа мы сформулируем необходимую нам в дальнейшем эргодическую теорему для оператора трансфер-матрицы, соответствующего потенциалу U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Построим потенциал U при помощи следующих действий.

1. Определим допредельные потенциалы

$$U_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}), \quad \bar{U}_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}), \quad n > k \geq 1.$$

2. Докажем, что при каждом фиксированном натуральном k потенциалы $U_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$ и $\bar{U}_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$ при $n \rightarrow \infty$ экспоненциально сходятся к одному и тому же пределу $U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$.

3. Докажем существование предела $\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$, который обозначим через $U(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}, \dots)$.

Поскольку $x = x_0$ является критической точкой T_0 , с технической точки зрения удобнее рассматривать окрестность точки x_1 : $[\eta_0(0), x_3] \cup [x_2, \xi_0(0))$.

Фиксируем $k \geq 1$. Для каждого n , $n \geq k$, рассмотрим окрестность точки x_1 :

$$V_1^{(n-k)} = \Delta_1^{(n-k)} \cup \Delta_1^{(n-k+1)}.$$

Ясно, что $V_1^{(n-k)} \subset [\eta_0(0), x_3] \cup [x_2, \xi_0(0))$.

Для определенности предположим, что $(n-k)$ – четное число. Тогда $\Delta_1^{(n-k)} \subset [x_1, x_3]$ и $\Delta_1^{(n-k+1)} \subset [x_2, \xi(0))$. Пусть $\Delta' \subset \Delta \subset \Delta_1^{(n-k)}$ и $\Delta' \in \tau_n$, $\Delta \in \tau_{n-1}$. Из определения символической динамики следует, что отрезкам Δ' и Δ соответствуют следующие слова длины n : $(a, 1, 0, a, \dots, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})$ и $(a, 1, 0, a, \dots, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})$. Определим функцию

$$U_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) = \ln \frac{|\Delta(a, 1, 0, a, \dots, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})|}{|\Delta(a, 1, 0, a, \dots, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})|}.$$

Если же $\Delta' \subset \Delta \subset \Delta_1^{(n-k+1)}$ и $\Delta' \in \tau_{n+1}$, $\Delta \in \tau_n$, то отрезкам Δ' и Δ соответствуют слова вида

$$\underbrace{(1, 0, a, 0, \dots, a, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})}_{(n-k+1)}$$

и $(1, 0, a, 0, \dots, a, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})$ соответственно. Обозначим

$$\bar{U}_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) = \ln \frac{|\Delta(1, 0, a, 0, \dots, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})|}{|\Delta(1, 0, a, 0, \dots, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})|}.$$

Из структуры динамических разбиений и определения символической динамики следует

$$|\Delta(1, 0, a, 0, \dots, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, 0, a)| = |\Delta(1, 0, a, 0, \dots, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, 0)|.$$

Учитывая последнее равенство, легко увидеть, что

$$U_k^{(n)}(a, 0, \varepsilon^{(3)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) = \bar{U}_k^{(n)}(a, 0, \varepsilon^{(3)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) = 0.$$

Докажем существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} U_k^{(n)}$. Используя лемму 2.6, получим

$$\begin{aligned} \Delta(a, 1, 0, a, \dots, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(1)}) &= \eta_0(\Delta(0, a, 0, a, \dots, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(1)})) = \\ &= \eta_0(\alpha_0^{-(n-k-1)} \Delta(\varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(1)})), \\ \Delta(\varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(1)}) &\in \tau_k; \\ \Delta(a, 1, 0, a, \dots, 0, a, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}) &= \eta_0(\alpha_0^{-(n-k-1)} \Delta(\varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})), \\ \Delta(\varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}) &\in \tau_{k-1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Обозначим отрезки $\Delta(\varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(1)})$ и $\Delta(\varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})$ через (β_1, β_2) и (β_3, β_4) , соответственно. Ясно, что $(\beta_1, \beta_2) \subset (\beta_3, \beta_4)$. Используя определение $U_k^{(n)}$ и (3.1), а также аналитичность функции $\eta_0(x)$, получаем

$$\begin{aligned} U_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) &= \ln \frac{|\eta_0(\alpha_0^{-(n-k-1)} \beta_2) - \eta_0(\alpha_0^{-(n-k-1)} \beta_1)|}{|\eta_0(\alpha_0^{-(n-k-1)} \beta_4) - \eta_0(\alpha_0^{-(n-k-1)} \beta_3)|} = \\ &= \ln \frac{\beta_2^3 - \beta_1^3}{\beta_4^3 - \beta_3^3} + O(\alpha_0^{-3(n-k)}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Обозначим

$$U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) = \ln \frac{\beta_2^3 - \beta_1^3}{\beta_4^3 - \beta_3^3}.$$

Из (3.2) непосредственно вытекает оценка

$$|U_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) - \overline{U}_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})| \leq \text{const} |\alpha_0|^{-3(n-k)}. \quad (3.3)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$|\overline{U}_k^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) - U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})| \leq \text{const} |\alpha_0|^{-3(n-k)}. \quad (3.4)$$

Теперь докажем существование предела $\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$. Фиксируем слово $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots) \in I_0$. Возьмем два произвольных натуральных числа k и m . Рассмотрим $U_{k+m}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(k+m)})$ и $U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$. Для краткости записи обозначим их через U_{k+m} и U_k , соответственно. Обозначим также

$$r_{n,i} = U_i^{(n)}(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(i)}) - U_i(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(i)}),$$

где $i = k, k+m$. Используя (3.2), (3.3) и (3.4), запишем

$$U_{k+m} = \ln \frac{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(\varepsilon^{(k+m)}), \varepsilon^{(k+m)}, \dots, \varepsilon^{(1)})|}{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(\varepsilon^{(k+m)}), \varepsilon^{(k+m)}, \dots, \varepsilon^{(2)})|} + O(\alpha_0^{-6n}), \quad (3.5)$$

где $\vec{\gamma}_{2n}(\varepsilon^{(k+m)}) - 2n$ -мерный вектор вида

$$\vec{\gamma}_{2n}(\varepsilon^{(k+m)}) = \begin{cases} (1, 0, a, 0, \dots, a, 0), & \text{если } \varepsilon^{(k+m)} = a, \\ (a, 1, 0, a, \dots, 0, a), & \text{если } \varepsilon^{(k+m)} = 0 \vee 1. \end{cases}$$

Отрезок $\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(\varepsilon^{(k+m)}), \varepsilon^{(k+m)}, \dots, \varepsilon^{(1)})$ является элементом динамического разбиения τ_{2n+k+m} , и из определения символической динамики следует, что он принадлежит траектории отрезка $\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k+m)}), \varepsilon^{(k+m)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})$, где вектор $\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)})$ определяется аналогично вектору $\vec{\gamma}_{2n}(\varepsilon^{(k+m)})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{\gamma}_{2n}(\varepsilon^{(k+m)}), \varepsilon^{(k+m)}, \dots, \varepsilon^{(k+1)}, \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)}) = \\ = T_0^i(\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь $0 \leq i < q_{2n+m}$, если $\varepsilon^{(k)} = a$, и $0 \leq i < q_{2n+m+1}$, если $\varepsilon^{(k)} = 0 \vee 1$. Используя (2.8), получаем

$$\begin{aligned} \left| \ln \left\{ \frac{|T_0^i \Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})|}{|T_0^i \Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})|} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})|}{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})|} \right)^{-1} \right\} \right| \leq \text{const} |\alpha_0|^{-k}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Но, с другой стороны, в силу (3.2) (3.3) и (3.4)

$$\ln \frac{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(1)})|}{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}, \dots, \varepsilon^{(2)})|} = U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)}) + O(\alpha_0^{-(2n+m)}). \quad (3.8)$$

Используя (3.5), (3.7) и (3.8), при достаточно больших n , получаем оценку

$$|U_{k+m} - U_k| \leq \text{Const} |\alpha_0|^{-k}, \quad (3.9)$$

где Const зависит только от T_0 . Отсюда видно, что $\{U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})\}_{k=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность. Тем самым существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$$

доказано. Обозначим предельную функцию через $U(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$. Переходя в (3.9) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$|U(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots) - U_k(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})| \leq \text{Const} |\alpha_0|^{-k}.$$

Отсюда легко вытекает первое утверждение теоремы 1.1.

Докажем теперь второе утверждение теоремы.

Пусть $\Delta(a_1, \dots, a_n) \subset \Delta(a_1, \dots, a_r) \subset [\eta_0(0), x_3] \cup [x_2, \xi_0(0)]$, $r < n$. Для каждого i , $1 \leq i \leq n - r$, отрезки $\Delta(a_1, \dots, a_{r+i})$ и $\Delta(a_1, \dots, a_{r+i-1})$ обозначим через (β_i, β_{i+1}) и (d_i, d_{i+1}) соответственно. Очевидно, что $(\beta_i, \beta_{i+1}) \subset (d_i, d_{i+1})$. Используя те же рассуждения, что и при получении (3.2), можно показать, что

$$\begin{aligned} U_{r+i}^{(2n+r+i)}(a_{r+i}, \dots, a_1) &= \frac{\beta_{i+1}^3 - \beta_i^3}{d_{i+1}^3 - d_i^3} + O(\alpha_0^{-6n}) = \\ &= \frac{|\Delta(a_1, \dots, a_{r+i-1}, a_{r+i})|}{|\Delta(a_1, \dots, a_{r+i-1})|} \cdot \frac{\beta_{i+1}^2 + \beta_{i+1}\beta_i + \beta_i^2}{d_{i+1}^2 + d_{i+1}d_i + d_i^2} + O(\alpha_0^{-6n}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Учитывая, что $[d_i, d_{i+1}] \subset [\eta_0(0), x_3] \cup [x_3, \xi_0(0)]$ и $[d_i, d_{i+1}]$ — отрезок $(r+i-1)$ -го ранга, получаем

$$\frac{\beta_{i+1}^2 + \beta_{i+1}\beta_i + \beta_i^2}{d_{i+1}^2 + d_{i+1}d_i + d_i^2} = 1 + O(\alpha_0^{-(r+i)}).$$

Подставляя правую часть последнего равенства в (3.10), при достаточно больших n получим, что

$$\frac{|\Delta(a_1, \dots, a_{r+i-1}, a_{r+i})|}{|\Delta(a_1, \dots, a_{r+i-1})|} = U_{r+i}^{(2n+r+i)}(a_{r+i}, \dots, a_1) + O(\alpha_0^{-(r+i)}).$$

Взяв произведение по $i = \overline{1, (n-r)}$ от обеих частей последнего равенства, получаем второе утверждение теоремы 1.1.

Определим теперь оператор трансфер-матрицы, соответствующий потенциалу U .

Сдвиг $\sigma: I_0 \rightarrow I_0$ определим по формуле $\sigma(\vec{\varepsilon})_i = \varepsilon_{i+1}$, $i \geq 1$. Для каждого $\beta \in R^1$ введем оператор трансфер-матрицы, т.е. линейный оператор $D_\beta: C(I_0) \rightarrow C(I_0)$, действующий по формуле

$$(D_\beta f)(\vec{\varepsilon}) = \sum_{\vec{x} \in \sigma^{-1}(\vec{\varepsilon})} e^{\beta U(\vec{x})} f(\vec{x}). \quad (3.11)$$

Обозначим через $M(I_0)$ пространство действительных мер на I_0 . Тогда сопряженный оператор $D_\beta^*: M(I_0) \rightarrow M(I_0)$ задается формулой $(D_\beta^* \mu)(b, \vec{\varepsilon}) = e^{\beta U(b, \vec{\varepsilon})} \mu(\vec{\varepsilon})$.

Обозначим $\mu(f) = \int f(\vec{\varepsilon}) d\mu(\vec{\varepsilon})$. Сформулируем рюэлевский вариант эргодической теоремы Перрона–Фробениуса.

ТЕОРЕМА 3.1 [10]. 1. Для каждого $\beta \in R^1$ существуют $\lambda_\beta > 0$, $h_\beta(\vec{\varepsilon}) \in C(I_0)$, $\nu_\beta \in M(I_0)$ такие, что $h_\beta(\vec{\varepsilon}) > 0$ для каждого $\vec{\varepsilon} \in I_0$, ν_β – вероятностная мера на I_0 и

$$D_\beta h_\beta = \lambda_\beta h_\beta, \quad D_\beta^* \nu_\beta = \lambda_\beta \nu_\beta, \quad (3.12)$$

причем выполнено условие нормировки $\int h_\beta(\vec{\varepsilon}) d\nu_\beta = 1$.

2. Если $f \in C(I_0)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_\beta^{-n} D_\beta^n f - (E_\beta f) h_\beta\| = 0,$$

где $E_\beta f$ – математическое ожидание f по мере ν_β .

3. Если $\mu \in M(I_0)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_\beta^{-n} (D_\beta^*)^n \mu = (E_\beta h_\beta) h_\beta$$

в слабой топологии.

4. ГЁЛЬДЕРОВСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СИНГУЛЯРНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ ОТОБРАЖЕНИЯ T_0

В этом разделе мы докажем теорему 1.2. Как уже отмечалось, лебегова мера λ на S^1 при переходе к символической динамике порождает вероятностную меру λ_0 на пространстве последовательностей X_0 . Следующая лемма играет важную роль при доказательстве теоремы 1.2.

ЛЕММА 4.1. Существует вероятностная мера P_0 на X_0 такая, что она инвариантна относительно сдвига σ и меры P_0 и λ_0 эквивалентны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор трансфер-матрицы D_β при $\beta = 1$, т.е. D_1 (см. (3.11)). По утверждению теоремы 3.1 этот оператор имеет положительное собственное значение λ_1 и собственный вектор $h_1(\vec{\varepsilon})$. Соответствующий сопряженный оператор D_1^* имеет собственный вектор ν_1 с тем же собственным значением λ_1 . Отметим, что кратность λ_1 равна 1. Определим вероятностную меру $\check{\nu}_1: d\check{\nu}_1 = h_1 d\nu_1$. Покажем, что мера $\check{\nu}_1$ инвариантна относительно сдвига σ . Для этого нам достаточно показать, что $\check{\nu}_1(f) = \nu_1(f \circ \sigma)$ для каждого $f \in C(I_0)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} ((D_1 f) \cdot g)(\vec{\varepsilon}) &= \sum_{\vec{y} \in \sigma^{-1}(\vec{\varepsilon})} e^{U(\vec{y})} f(\vec{y}) g(\vec{\varepsilon}) = \\ &= \sum_{\vec{y} \in \sigma^{-1}(\vec{\varepsilon})} e^{U(\vec{y})} f(\vec{y}) g(\sigma(\vec{y})) = D_1(f \cdot (g \circ \sigma))(\vec{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1(f) &= \nu_1(h_1 \cdot f) = \nu_1(\lambda_1^{-1} D_1 h_1 \cdot f) = \lambda_1^{-1} \nu_1(D_1(h_1 \cdot (f \circ \sigma))) = \\ &= \lambda_1^{-1} (D_1^* \nu_1)(h_1 \cdot (f \circ \sigma)) = \nu_1(h_1 \cdot (f \circ \sigma)) = \tilde{\nu}_1(f \circ \sigma).\end{aligned}$$

Обозначим через I естественное расширение пространства I_0 на пространство двусторонних последовательностей:

$$I = \{\vec{\varepsilon} = (\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots), \varepsilon_i = a, 0, 1; \varepsilon_{i+1} = 0 \iff \varepsilon_i = a, i \geq 1\}.$$

Аналогичным образом определяется расширение X пространства X_0 . Определим меру μ_1 на I по мере $\tilde{\nu}_1$:

$$\begin{aligned}\mu_1(\vec{\varepsilon}) &\in I: \vec{\varepsilon}_{i_1} \in A_1, \vec{\varepsilon}_{i_2} \in A_2, \dots, \vec{\varepsilon}_{i_r} \in A_r = \\ &= \tilde{\nu}_1(\vec{\varepsilon} \in I_0: \varepsilon_{i_1+n} \in A_1, \varepsilon_{i_2+n} \in A_2, \dots, \varepsilon_{i_r+n} \in A_r),\end{aligned}$$

где n таково, что все $i_k + n \geq 0$, $k = \overline{1, r}$, а $A_i \subset \{a, 0, 1\}$, $i = \overline{1, r}$. Мера μ_1 , очевидно, инвариантна относительно сдвига σ , действующего на I . Определим “отражение” $\psi: I \longleftrightarrow X$ следующим образом: $\psi(\vec{\varepsilon})_i = a_{-i}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При отражении мера μ_1 на I порождает меру P на X . Заметим, что мера P тоже инвариантна относительно сдвига σ . Обозначим через P_0 проекцию меры P на X_0 . Очевидно, что P_0 тоже инвариантна относительно сдвига σ .

Покажем теперь, что меры P_0 и λ_0 эквивалентны между собой. Для этого нужно сравнить $\lambda_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $P_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$. По определению

$$\lambda_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = |\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)|. \quad (4.1)$$

Из последнего утверждения теоремы 1.1 вытекает, что

$$\text{const} \leq \frac{|\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)|}{\exp(\sum_{s=1}^n U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1)))} \leq \text{Const}. \quad (4.2)$$

Имеем

$$P_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = \tilde{\nu}_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int h_1(\vec{\varepsilon}) \chi_n(\vec{\varepsilon}) d\tilde{\nu}_1(\varepsilon) = \tilde{\nu}_1(h_1 \cdot \chi_n), \quad (4.3)$$

где $\chi_n(\vec{\varepsilon})$ — характеристическая функция цилиндрического множества $\{\vec{\varepsilon}: \vec{\varepsilon} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, \vec{y}) \in I_0\}$.

Используя (3.12) и (4.3), получаем

$$\begin{aligned}P_0(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \nu_1(h_1 \cdot \chi_n) = \lambda_1^{-1} (D_1^* \nu_1)(h_1 \cdot \chi_n) = \\ &= \dots = \lambda_1^{-n} ((D_1^*)^n \nu_1)(h_1 \cdot \chi_n) = \lambda_1^{-n} \nu_1(D_1^n(h_1 \cdot \chi_n)) = \\ &= \int \exp\left(\sum_{s=1}^n U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_1, \vec{y})\right) h_1(\vec{y}) d\nu_1(\vec{y}).\end{aligned} \quad (4.4)$$

В силу теоремы 1.1

$$|U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_1, \vec{y}) - U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1))| \leq \text{const} |\alpha_0|^{-s}. \quad (4.5)$$

Из (4.1), (4.2), (4.4) и (4.5) легко можно получить

$$\text{const} \leq \frac{\lambda_0(a_1, \dots, a_n)}{P_0(a_1, \dots, a_n)} \leq \text{Const}.$$

Лемма полностью доказана.

Докажем теперь теорему 1.2 относительно меры Лебега, а относительно инвариантной меры μ она доказывается аналогично. Отметим, что для гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения “ограниченного типа” гёльдеровские показатели сингулярной инвариантной меры можно выразить при помощи элементов динамических разбиений [12]

$$\overline{\tau_\lambda}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Delta^{(n)}(x)|}{\ln |\Delta_n|}, \quad \tau_\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Delta^{(n)}(x)|}{\ln |\Delta_n|},$$

где $|\Delta^{(n)}(x)|$ — длина отрезка n -го динамического разбиения, содержащего x , а $|\Delta_n| = |q_n \rho - q_{n-1}|$ — длина отрезка n -го ранга линейного поворота T_ρ .

Покажем, что для отображения T_0 для почти всех x (по мере λ) предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Delta^{(n)}(x)|}{\ln |\Delta_n|} = \tau_\lambda(x) \quad (4.6)$$

существует и не зависит от x . Поскольку число вращения T_0 равно “золотому сечению” т.е. $\rho(T_0) = \gamma_0 = (\sqrt{5} - 1)/2$, легко убедиться, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Delta_n|}{n} = \ln \gamma.$$

Достаточно показать существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta^{(n)}(x)|/n$ почти для всех x (по мере Лебега λ).

Возьмем произвольную точку $x \in ([x_1, x_3] \cup [x_2, \xi_0(0)]) \setminus \{x_n, n \geq 0\}$ (случай $x \in [x_3, x_2]$ при помощи леммы 2.6 редуцируется к рассматриваемому случаю). Пусть ей соответствует слово $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in X_0$. Используя теорему 1.1, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln |\Delta^{(n)}(x)| &= \frac{1}{n} \ln |\Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)| = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1)) + \tilde{\psi}_1(a_1, a_2, \dots, a_n), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $|\tilde{\psi}_1(a_1, a_2, \dots, a_n)| \leq \text{const}(1/\sqrt{n})$.

Обозначим через V естественное расширение функции $U: I_0 \rightarrow R^1$ на пространство двусторонних последовательностей I :

$$V(\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) = U(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots).$$

Отсюда и из (4.7) следует

$$\frac{1}{n} \ln |\Delta^{(n)}(x)| = \frac{1}{n} \sum_{s=2}^{n+2} V(\sigma^{-s}(\dots, a_n, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1)) + \psi_1(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (4.8)$$

Здесь в слове $(\dots, a_n, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1))$ буква a_1 стоит на первом месте.

Функция V является непрерывной (в тихоновской топологии) и ограниченной, а вероятностная мера μ_1 инвариантна относительно сдвига σ . Используя эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина, получаем, что почти для всех x (по мере μ_1) существует конечный предел суммы, стоящей в правой части (4.8). Предельную функцию обозначим через $\tilde{V}(\dots, a_2, a_1, \vec{\gamma}(a_1))$ (a_1 стоит на первом месте). Отметим, что функция $\tilde{V}$ определена на множестве B по “полной” мере (мере μ_1). Ясно, что $B \subset \{\dots, a_n, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1)\} \in I$: a_1 стоит на первом месте}. Напомним, что $\psi: I \longleftrightarrow X$ есть “отражение”: $\psi(\vec{\varepsilon})_i = a_{-i}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Проекцию множества $\psi^{-1}(B)$ на пространство односторонних последовательностей X_0 обозначим через A . Ясно, что $P_0(A) = 1$ и для элементов $(a_1, a_2, \dots)$ этого множества существует предел

$$\overline{\tau_\lambda}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta^{(n)}(x)|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)| = \tilde{V}(\dots, a_n, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1)).$$

В силу эквивалентности P_0 и λ_0 $\lambda_0(A) = 1$. С другой стороны, функция $\tau_\lambda(x)$ является инвариантной относительно T_0 . Отсюда, а также из эргодичности относительно T_0 меры Лебега λ [1] следует, что $\tau_\lambda(x)$ является “почти” постоянной (по мере Лебега). Теорема 1.2 полностью доказана.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую благодарность Я. Г. Синаю и К. М. Ханину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *R. Ostlund, D. Rand, J. Sethna, E. Sigg.* Physica D. 1983. V. 8. P. 303.
- [2] *И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [3] *J. C. Yoccoz.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1984. V. 298. Ser. I. P. 141.
- [4] *K. M. Khanin.* Chaos. 1991. V. 1. P. 181.
- [5] *Е. Б. Вул, Я. Г. Синай, К. М. Ханин.* УМН. 1984. Т. 39. № 3. С. 3.
- [6] *E. de Faria, W. de Melo.* Rigidity of critical circle mappings I. Preprint № 16. IMS Stony Brook, 1997.
- [7] *B. D. Mestel.* Computer Assisted Proof of Universality for Cubic Critical Maps of the Circle with Golden Mean Rotation Number. Ph.D. Thesis. Warwick University, 1985; *J.-P. Eckmann, H. Epstein.* Commun. Math. Phys. 1986. V. 107. P. 213.
- [8] *Я. Г. Синай.* Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995.
- [9] *Я. Г. Синай.* УМН. 1972. Т. 27. № 4. С. 21; *D. Ruelle.* Thermodynamic Formalism. The Mathematical Structures of Classical Equilibrium. Statistical Mechanics. Reading, MA: Addison-Wesley, 1978.
- [10] *Р. Боуэн.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
- [11] *A. Chhabra, R. V. Jensen.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1327.
- [12] *J. Graczyk, G. Swiatek.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 157. P. 213.

Поступила в редакцию 15.I.2002 г.