Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кадышевский, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель, В. Н. Родионов, Пороговые явления в интенсивных электромагнитных полях, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 2, 227–242

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:30:15

© 2003 г. В. Г. Кадышевский*, Г. А. Кравцова†,
А. М. Мандель‡, В. Н. Родионов‡

ПОРОГОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

На основе точных решений квантовых уравнений движения заряженных частиц рассмотрено влияние интенсивных электромагнитных полей на формирование и распад квазистационарных состояний различных квантовых систем. Используемый метод позволяет исследовать как системы, способные к спонтанному распаду, так и явления, возникающие лишь под влиянием поля. При этом в рассмотрение включены различные значения полного углового момента систем. Последовательное использование метода аналитического продолжения позволило получить нелинейные уравнения, определяющие комплексные энергии во внешнем поле. Изучены асимптотические разложения вещественных и мнимых значений энергии при действии слабых и сильных электромагнитных полей. В рамках развиваемого подхода удастся установить характерные значения параметров длины, определяющие формирование процессов в сверхсильных полях. Отмечено, что существенное сокращение расстояний в сильных полях может приводить к эффектам с новым характерным масштабом длины, свойственным формализму модифицированной квантовой электродинамики (КЭД) – “КЭД с фундаментальной массой”.

Ключевые слова: квантовые процессы: ионизация, фотопоглощение, образование пар, ядерные распады; интенсивные электромагнитные поля сложных конфигураций; сокращение масштаба длины.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что большинство квантовых систем нестабильно, т. е. имеет конечное время жизни. Для их описания используется понятие *квазистационарности*. Учет влияния электромагнитных полей на различные процессы с участием заряженных частиц позволяет убедиться, что действие поля может вызвать распад даже тех систем, которые в отсутствие поля являлись стабильными. Таким образом, при последовательном изучении квантовых явлений во внешних электромагнитных полях нельзя обойтись

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: kadyshhev@jinr.ru

†Московский государственный университет, Москва, Россия

‡Московская государственная геологоразведочная академия, Москва, Россия.
E-mail: physics@msgpa.msgpa.ru

без квазистационарной трактовки состояний заряженных частиц. Отличительной особенностью указанного подхода является то, что математическое описание квазистационарных состояний характеризуется введением комплексной энергии [1].

Описание процессов рождения и превращения частиц традиционно является прерогативой релятивистской теории квантованных полей. В этой связи может показаться, что нерелятивистский подход к исследованию квантовых систем претендует лишь на модельное описание. Однако следует отметить, что существует ряд процессов, корректное рассмотрение которых требует именно нерелятивистского приближения. Это относится ко многим явлениям, в частности к процессам в конденсированных средах, взаимодействиям атомов и ионов с электромагнитными полями, а также к некоторым задачам квантовой электродинамики (КЭД), в которых рассматривается образование частиц с нерелятивистскими кинетическими энергиями.

Заметим, что теорию квазистационарных состояний нельзя считать завершенной. В последнее время все большее внимание привлекают интересные вопросы, выяснение которых требует развития подходов, использующих точные решения уравнений движения во внешних интенсивных электромагнитных полях. Укажем, например, что в работах [2], [3] для некоторых точно решаемых моделей проводился анализ ряда пороговых процессов на основе построения дисперсионных соотношений в интенсивных электромагнитных полях сложной конфигурации. В данной работе мы рассмотрим широкий круг нерелятивистских пороговых процессов, происходящих в присутствии интенсивных электромагнитных полей.

Важное свойство квазистационарных состояний заключается в том, что согласно теореме Крылова–Фока [4] закон их распада полностью определяется энергетическим спектром начального состояния. С формальной точки зрения необходимым и достаточным условием распада является непрерывность интегральной функции распределения энергии. Отметим, что во многих задачах функция распределения энергии удовлетворяет гораздо более жестким условиям, чем простая непрерывность. Простейший пример такого рода представляет задача о вылете α -частицы из потенциальной ямы, образованной ядерными силами тяжелых ядер, в которой плотность вероятности $w(E)$ описывается мероморфной функцией комплексной энергетической переменной.

Возвращаясь к изучению процессов в интенсивных электромагнитных полях, подчеркнем, что значительный прогресс в этом направлении достигнут в подходах, основанных на использовании точных решений уравнений движения заряженных частиц во внешнем поле [1], [5]–[9]. В частности, метод точных решений уравнения Шредингера применялся при анализе процессов ионизации атомов и ионов под действием интенсивного электрического поля [5], [7], [8], а также процессов электропоглощения света непроводящими кристаллами [6]. Особый подход к изучению квазистационарных состояний во внешнем поле был представлен в книгах [10], [11]. В них достаточно подробно изучен процесс ионизации в случае короткодействующего потенциала под действием интенсивных электромагнитных полей на основе использования граничных условий для точных решений уравнения Шредингера во внешнем поле. Получены нелинейные уравнения, определяющие комплексные значения энергии.

Недавно были рассчитаны вероятности $w_F(E)$ ряда процессов как функции энергии E и параметров поля F в электромагнитных полях, образующих довольно сложные кон-

фигурации [12]. Важной особенностью полученных выражений для этих вероятностей является возможность их представления в виде однократных интегралов независимо от типа конфигурации внешних полей. На основе этих выражений с помощью метода дисперсионных соотношений были получены уравнения для комплексной энергии в электромагнитных полях довольно общего вида [2], [3]. Указанный подход, базирующийся на аналитическом продолжении функций $w_F(E)$ в плоскости комплексной переменной E , может служить основой для обобщения на случай задач, характеризующихся произвольным значением полного углового момента системы. Как показано ниже, достаточным условием реализации этой программы является требование непрерывности функции $w_F(E)$ при выключении внешнего поля $F \rightarrow 0$.

Обычно к пороговым относят такие процессы, которые без учета внешнего поля характеризуются отличной от нуля вероятностью лишь при определенных значениях энергии, передаваемой системе. Однако при анализе ряда задач выясняется, что эта категория включает в себя более широкий круг явлений. В частности, к этому типу реакций можно отнести вынужденные распады протона $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ и стабильного изотопа гелия $\text{He}^3 \rightarrow \text{T} + e^+ + \nu$. Подобные реакции могут происходить во внешнем поле, искажающем форму потенциального барьера, как, например, в случае постоянного электрического поля $\mathcal{E}$.

В пределе слабого поля асимптотические выражения для вероятностей нерелятивистских распадов можно качественно оценить, используя квазиклассическое приближение. Остановимся кратко на оценке вероятности индуцированного бета-распада с точностью до численного множителя с помощью формулы

$$W \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{2mU} dz\right). \quad (1)$$

Будем считать, что электрическое поле $\mathcal{E}$ ориентировано вдоль оси z , тогда $U(z) = U_0 - e\mathcal{E}z$. Если теперь учесть значения $z_0 = 0$ и $z_1 = U_0/(e\mathcal{E})$, то для проницаемости барьера имеем

$$W \sim A(\mathcal{E}, I_0) \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{F_0}{\mathcal{E}} (2I_0)^{3/2}\right), \quad (2)$$

где $F_0 = m^2 c^3 / (e\hbar)$ – характерное поле в КЭД, $I_0 = (M_n - M_p + m)/m = U_0/m$ – максимальная высота барьера, а M_n , M_p и m – массы нейтрона, протона и электрона, соответственно. Здесь и далее используется система единиц $\hbar = c = 1$. Предэкспоненциальный множитель при таком рассмотрении определяется весьма приближенно. Однако если ввести параметр $a = (e\mathcal{E}/m^2)/(2I_0)^{3/2} = \lambda_D/(2z_1) \ll 1$, где λ_D – де-Бройлевская длина волны электрона, а z_1 – ширина барьера, и учесть, что вероятность вырывания электрона электрическим полем из потенциальной ямы короткодействующих сил, в которой он находится в связанном s -состоянии, определяется соотношением [5]

$$W \sim ae^{-2/(3a)},$$

то предэкспоненциальный множитель в формуле (2) можно искать в виде $A(\mathcal{E}, I_0) = a^n$. Значение $n = 1$ соответствует распаду при фиксированной энергии нейтрино. Учет состояний нейтральной частицы приводит к дополнительному множителю a^3 . Таким образом, имеем $A(\mathcal{E}, I_0) = a^4$. Заметим, что полученный качественный результат согласу-

ется с оценкой вероятности индуцированного бета-распада, приведенной в работе [7]¹⁾. Обратим внимание также на то, что приведенный предварительный анализ позволяет непосредственно убедиться в справедливости распространения понятия *пороговой реакции* на случай индуцированных ядерных бета-распадов. Существенное отличие последних, однако, проявляется в том, что индуцированный распад происходит благодаря воздействию поля не на реальные, а на виртуальные заряженные частицы. Наконец, укажем, что подобная трактовка индуцированных ядерных распадов дает возможность включить их в общую схему расчета комплексных энергетических параметров.

2. ПОСТРОЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Выше уже говорилось, что известны выражения для вероятностей целого ряда пороговых процессов, происходящих в интенсивных электромагнитных полях сложной конфигурации [12]. Общее свойство квазистационарных процессов состоит в том, что из непрерывности распределения энергии $w_F(E)$ следует

$$W_F(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $W_F(t)$ – вероятность того, что к моменту t система еще не распалась. Таким образом, аналитические свойства функции $w_F(E)$ связаны со своеобразным условием причинности (3). Тесная связь между причинностью и аналитичностью хорошо известна. Существует много примеров физических систем, для которых простое условие причинности – следствие не может предшествовать причине – дает возможность определить функции энергии, голоморфные в верхней полуплоскости этой комплексной переменной [13].

Особенность условия (3) состоит в том, что оно становится однозначным лишь при фиксации начала отсчета времени, которое совпадает с моментом, когда в последний раз было констатировано состояние нераспавшейся системы. Таким образом, устанавливается временной порядок, согласно которому вслед за начальным моментом наступает время, когда с достоверностью происходит распад системы.

Функция $w_F(E)$ в пределе выключения поля $F \rightarrow 0$ должна переходить в распределение вероятности в отсутствие поля:

$$\lim_{F \rightarrow 0} w_F(E) \rightarrow w_0(E). \quad (4)$$

Проведем непосредственное построение дисперсионных соотношений. Известные выражения для функции $w_F(E)$ [12] не удовлетворяют условиям квадратичной интегрируемости и поэтому для построения аналитического продолжения в комплексную плоскость переменной E нуждаются в процедуре вычитания. Ее можно провести, выделяя в $w_F(E)$ вакуумное распределение вероятности процесса [2], [3],

$$w_F(E) = w_0(E) + [w_F(E) - w_0(E)].$$

¹⁾Точная формула может быть получена путем вычисления вероятности распада протона на основе решений уравнения Дирака для электрона, движущегося во внешнем поле [12].

Если функция $\Delta_F(E) = w_F(E) - w_0(E)$ регулярна в верхней полуплоскости комплексной переменной E и квадратично интегрируема вдоль произвольной прямой, параллельной вещественной оси, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_F(u + iv)|^2 du < C, \quad v > 0,$$

то достаточно одного вычитания. Следствием последнего условия является то, что функция $\Delta_F(E)$ удовлетворяет формулам Сохоцкого–Племеля, т.е. соотношениям, связывающим $\operatorname{Re} \Delta_F(E)$ и $\operatorname{Im} \Delta_F(E)$ [13] и известным также как дисперсионные соотношения,

$$\operatorname{Re} \Delta_F(E) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \Delta_F(E')}{E' - E} dE', \quad (5)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Одного вычитания может оказаться недостаточно для получения функции, удовлетворяющей указанным выше условиям. В этом случае требуются дополнительные вычитания. Для построения этой процедуры необходимо воспользоваться последующими членами разложения функции $w_F(E)$ по внешнему полю²⁾,

$$w_F(E) = w_0(E) + \frac{d}{dF} w_F(E) \Big|_{F=0} F + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dF^2} w_F(E) \Big|_{F=0} F^2 + \dots \quad (6)$$

Применим описанную процедуру для ряда пороговых процессов, характерная зависимость энергетических распределений которых в отсутствие поля представима в виде

$$w_0(E) \sim (E - E_0)^{n-1/2},$$

где E_0 – значение пороговой энергии. Различные значения $n = 1, 2, 3, \dots$ соответствуют определенным процессам, отличающимся как полным угловым моментом, так и фазовым объемом состояний конечных частиц реакций. В частности, случай $n = 1$ соответствует следующим процессам:

1) образование электрон-позитронных пар двумя фотонами с одинаковой круговой поляризацией;

2) разрешенные фотопереходы электронов из валентной зоны в зону проводимости полупроводников;

3) ионизация из короткодействующей потенциальной ямы электрическим полем.

При $n = 2$ мы имеем дело с другими процессами:

1) образование электрон-позитронных пар двумя фотонами противоположной круговой поляризации;

2) запрещенные по угловому моменту фотопереходы электронов в полупроводниках;

²⁾Разложение (6) подразумевает аналитичность $w_F(E)$ в пределе слабого внешнего поля, что не всегда выполняется (см., например, [7]–[9], [12]). Однако даже в отсутствие аналитичности должно выполняться условие (4). Это означает, что в слабых полях неаналитическое поведение может проявляться лишь в определенных порядках разложения по полю. Поэтому использование разложения (6) подразумевает, что аналитический вклад в соответствующем порядке разложения по полю превышает полевой вклад, содержащий неаналитическую зависимость.

3) фоторасщепление дейтрона.

Значения $n \geq 3$ также определяют ряд процессов как в физике полупроводников, так и в атомной и ядерной физике.

Рассмотрим случай так называемого постоянного скрещенного поля $\vec{E}_s \perp \vec{H}_s$, $|\vec{E}_s| = |\vec{H}_s| = F_s$. Введем безразмерный параметр энерговыделения $I_0 = (E - E_0)/m$ для процесса в отсутствие поля и определим полевые параметры

$$z = -2I_0 \left(\frac{m^2}{eF_s} \right)^{2/3}, \quad |z| = \frac{1}{\chi^{2/3}}, \quad \chi = \frac{eF_s}{m^2 |2I_0|^{3/2}}.$$

Рассмотрим функции, задаваемые интегральными представлениями вида

$$f_{n+1}(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-izx}}{x^{n+1/2}} \left[e^{-ix^3/3} - \theta\left(n - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^N \left(-i\frac{x^3}{3}\right)^k \frac{1}{k!} \right] dx, \quad (7)$$

где номера $n = 1, 2, \dots$ отвечают набору процессов, описанных выше, $N = \theta(n - 7/2) + \theta(n - 13/2) + \dots$, а $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Используя процедуру аналитического продолжения [2], [3], из вероятностей энергетических распределений можно получить уравнения для комплексных значений энергии во внешнем поле,

$$(-2I_F)^{n-1/2} = (-2I_0)^{n-1/2} + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{\sqrt{\pi} 2^n} e^{-i\pi(2n-1)/4} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^{2n/3-1/3} f_{n+1}(z). \quad (8)$$

Таким образом, функции $f_n(z)$, по существу, определяют аналитические свойства соотношения (8). Отметим, что для построения аналитического продолжения в комплексную плоскость z при $n = 1, 2, 3$ достаточно провести лишь одно вычитание.

Простые выкладки позволяют получить представления, связывающие комплексные функции f_{n+1} на вещественной оси z с интегралами от функций Эйри $\text{Ai}(z)$,

$$e^{-i\pi(2n-1)/4} f_{n+1}(z) = \frac{2^n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \times \\ \times \left\{ (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} |z|^{n-1/2} \exp \left[(-1)^{n+1} i \frac{\pi}{4} [\text{sgn } z - 1] \right] + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^{n-1/2} \text{Ai}(z-x) + \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^{n-1/2} \text{Ai}(z+x) \right\}, \quad (9)$$

где

$$\text{Ai}(z) = \int_0^\infty \cos\left(xz + \frac{x^3}{3}\right) dx.$$

Аналитические свойства соотношения (8) рассмотрим на примере процессов при $n = 1$. Для этого введем в плоскости комплексной переменной z функцию

$$G(z) = \sqrt{z} + \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} f_2(z),$$

отличающуюся от правой части (8) лишь множителем $(m^2/eF_s)^{1/3}$. Двухзначность функции $G(z)$ устраняется проведением разреза по отрицательной действительной полуоси z . Поворачивая контур интегрирования в интеграле $f_2(z)$ на угол β , можно убедиться, что этот интеграл сходится в полуплоскости $\text{Im } z \leq -\text{tg } \beta \text{ Re } z$. Таким образом, получаем аналитическое продолжение функции $f_2(z)$, определенной формулой (7) только в нижней полуплоскости, на всю плоскость комплексной переменной z с разрезом, указанным выше. На физическом и нефизическом берегах разреза значения функции $G(z)$ соответственно равны

$$\begin{aligned} G(z + i0) &= i\sqrt{z} + \int_0^\infty g(x)e^{-ixz} dx, \\ G(z - i0) &= -i\sqrt{|z|} + \int_0^{-\infty} g(x)e^{-ixz} dx, \end{aligned}$$

где

$$g(x) = \frac{e^{-i\pi/4}(e^{-ix^3/3} - 1)}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}}.$$

В силу *принципа симметрии Шварца* справедливо равенство

$$G(z - i0) = G^*(z + i0)$$

и скачок на разрезе равен

$$\Delta G(z) = 2i \text{Im } G(z).$$

Отсюда следует, что величина $\Delta G(z)$ чисто мнимая. Таким образом, имеем

$$\text{Im } G(z) = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ixz - ix^3/3}}{(x - i\epsilon)^{3/2}} dx,$$

где $\epsilon \rightarrow 0$. Восстанавливая вид левой части формулы (8) $G(z)(eF_s/m^2)^{1/3} = \sqrt{-2I}$, получаем также

$$\text{Im } \sqrt{\frac{-I}{|I_0|}} = \frac{w_F(E)}{w_0(E)}.$$

Отметим, что последнее соотношение согласуется с исходными предположениями, сформулированными при получении дисперсионных соотношений (5).

При $n \geq 4$ для построения аналитического продолжения в комплексную плоскость энергетической переменной нельзя ограничиться лишь одним вычитанием. Так, при $n = 4, 5, 6$ требуется два вычитания. Для $n = 4$ формула (9) приобретает вид

$$\begin{aligned} e^{i\pi/4} f_5(z) &= -\frac{16\sqrt{\pi}}{105} |z|^{7/2} \exp\left[i\frac{\pi}{4}(1 - \text{sgn } z)\right] + \\ &+ \frac{16}{105\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\infty x^{7/2} [\text{Ai}(z - x) + i \text{Ai}(z + x)] dx \right\} + \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} |z|^{1/2} \exp\left[i\frac{\pi}{4}(\text{sgn } z - 1)\right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Выделение действительной и мнимой частей в представлении (9) при $n = 1, 2, 3$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left[e^{-i\pi(2n-1)/4}f_{n+1}(z)\right] &= (-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}(z)^{n-1/2}\theta(z) + \\ &\quad + \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\int_0^\infty x^{n-1/2}\operatorname{Ai}(z-x)dx, \\ \operatorname{Im}\left[e^{-i\pi(2n-1)/4}f_{n+1}(z)\right] &= -\sqrt{\pi}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}(-z)^{n-1/2}\theta(-z) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\int_0^\infty x^{n-1/2}\operatorname{Ai}(z+x)dx,\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Выполняя аналогичные преобразования для $f_5(z)$, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[f_5(z)e^{i\pi/4}\right] &= -\frac{16\sqrt{\pi}}{105}(-z)^{7/2}\theta(-z) - \frac{2\sqrt{\pi}}{3}(-z)^{1/2}\theta(-z) + \\ &\quad + \frac{16}{105\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{7/2}\operatorname{Ai}(z+x)dx, \\ \operatorname{Re}\left[f_5(z)e^{i\pi/4}\right] &= -\frac{16\sqrt{\pi}}{105}(z)^{7/2}\theta(z) + \frac{2\sqrt{\pi}}{3}(z)^{1/2}\theta(z) + \\ &\quad + \frac{16}{105\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{7/2}\operatorname{Ai}(z-x)dx.\end{aligned}\quad (12)$$

Интегралы в формулах (11), (12) выражаются через билинейные комбинации функций Эйри Ai , Bi и их производных Ai' , Bi' [3], [14].

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ШИРИНЫ И СДВИГА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ПРИ $n = 1$ И $n = 2$

В слабом поле $\chi \ll 1$ и $|z| \gg 1$. Используя асимптотики для билинейных комбинаций функций Эйри и их производных [2], [3], [12] при $z \gg 1$ ($I_0 < 0$), из выражения (8) при $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\sqrt{-2I_F} &= \sqrt{-2I_0}\frac{\chi}{4}e^{-2/3\chi}\left(1 - \frac{17}{12}\chi + \frac{1225}{288}\chi^2\right), \\ \operatorname{Re}\sqrt{-2I_F} &= \sqrt{-2I_0}\left(1 + \frac{1}{8}\chi^2 + \frac{105}{128}\chi^4\right).\end{aligned}\quad (13)$$

Из формул (13), в частности, следует, что мнимая часть $\sqrt{-2I_F}$ определяется экспоненциальной зависимостью от поля, а действительная содержит квадратичные полевые поправки к вакуумному значению величины $\sqrt{-2I_0}$.

При $I_0 > 0$ аргумент функций Эйри отрицателен, и в случае $\chi \ll 1$ имеем $-z \gg 1$. В этом пределе получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sqrt{-2I_F} &= \sqrt{2I_0} \left\{ 1 - \frac{\chi}{2} \cos \frac{2}{3\chi} + \frac{\chi^2}{24} \left[3 - 17 \sin \frac{2}{3\chi} \right] + \frac{1225\chi^3}{576} \cos \frac{2}{3\chi} \right\}, \\ \operatorname{Re} \sqrt{-2I_F} &= \sqrt{2I_0} \left\{ \frac{\chi}{2} \sin \frac{2}{3\chi} - \chi^2 \frac{17}{24} \cos \frac{2}{3\chi} - \frac{1225}{576} \chi^3 \sin \frac{2}{3\chi} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Полевые поправки к мнимой части функции $\sqrt{-2I_F}$ содержат как аналитические по полю (и совпадающие с разложениями теории возмущений), так и осциллирующие (имеющие неаналитическую зависимость от поля) вклады. Действительная часть функции $\sqrt{-2I_F}$ имеет лишь осцилляционные слагаемые и, следовательно, не может быть рассчитана методами теории возмущений. Отметим, что разложения (14) совпадают с результатами работ [2], [3], полученными другим способом.

Оценивая (8) в том же пределе слабого поля $z \gg 1$ ($I_0 < 0$), при $n = 2$ получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(-2I_F)^{3/2} &= (-2I_0)^{3/2} \frac{3\chi^2}{8} e^{-2/3\chi} \left(1 - \frac{35}{12}\chi + \frac{3745}{288}\chi^2 \right), \\ \operatorname{Re}(-2I_F)^{3/2} &= (-2I_0)^{3/2} \left(1 + \frac{\chi^2}{8} + \frac{35}{128}\chi^4 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

При $I_0 > 0$ в пределе слабого поля для мнимой и действительной частей функции $(-2I_F)^{3/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(-2I_F)^{3/2} &= (2I_0)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{\chi^2}{8} + \frac{35}{128}\chi^4 + \left(-\frac{3}{4}\chi^2 + \frac{3745}{384}\chi^4 \right) \sin \frac{2}{3\chi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{35}{16}\chi^3 \cos \frac{2}{3\chi} \right\}, \\ \operatorname{Re}(-2I_F)^{3/2} &= (2I_0)^{3/2} \left\{ \left(-\frac{3}{4}\chi^2 + \frac{3745}{384}\chi^4 \right) \cos \frac{2}{3\chi} - \frac{35}{16}\chi^3 \sin \frac{2}{3\chi} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Формулы (15), (16) подтверждают основные выводы, сделанные при анализе выражений (13), (14), однако в них экспоненциальный и осциллирующие вклады содержат дополнительный множитель порядка $\chi \ll 1$. Это означает, что с увеличением степени запрета по моменту системы n происходит уменьшение неаналитических по полю вкладов. В то же время порядок аналитических вкладов сохраняется. Таким образом, например, при $n > 1$ (для систем с ненулевым полным моментом) будут наблюдаться эффекты (сходные с туннельной ионизацией, эффектом Келдыша–Франца и т.п.), ослабленные в каждом порядке запрета по полному моменту. При этом сдвиг $\operatorname{Re}(-2I_F)^{n-1/2}$ в случае $I_0 < 0$ (аналог эффекта Штарка) остается квадратичным по полю для любых значений n .

В сильном поле (при $\chi \gg 1$) аргумент функций Эйри мал, $|z| \ll 1$, и характер энергетических зависимостей существенно меняется. Для процессов, описываемых уравнением (8) при $n = 1$, имеем

$$I_F = \frac{3^{2/3}}{2^{10/3}\pi^2} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^{2/3} \Gamma^4 \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} (-1 - i\sqrt{3}), \quad (17)$$

что также совпадает с выводами работ [2], [3].

Оценивая в этом пределе уравнение (8) при $n = 2$ и оставляя лишь главные члены разложений при $z \ll 1$, нетрудно получить, что

$$I_F = \frac{1}{3^{1/3} 2^{8/3}} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^{2/3} (-1 - i\sqrt{3}). \quad (18)$$

Из формул (17), (18), в частности, следует, что при значениях интенсивности поля, больших по сравнению с энергосвободением в распаде, т.е. когда выполняется условие $eF_s/m^2 \gg |2I_0|^{3/2}$, ширина уровня и его сдвиг пропорциональны $(eF_s/m^2)^{2/3}$ и отрицательны. При этом действительная и мнимая части энергии отличаются только числовым множителем $\sqrt{3}$.

4. БЕТА-РАСПАД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Развиваемый нами подход проиллюстрируем также на примере реакций, которые характеризуются значениями $n = 3$ и $n = 4$. Рассмотрим процесс ядерного бета-распада, протекающий в электромагнитном поле, которое представляет собой комбинацию постоянного скрещенного F_s (см. раздел 2) и постоянного магнитного $\vec{H}_1$ полей. При этом предположим, что ориентация поля $\vec{H}_1$ совпадает с направлением вектора $[\vec{E}_s, \vec{H}_s]$. Таким образом, суммарное внешнее поле $F = F_s + F_1$ можно считать обобщением постоянного скрещенного поля с не равным нулю инвариантом $\vec{E}_s^2 - \vec{H}^2 < 0$, где $\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_1$ и по-прежнему $\vec{E}_s \perp \vec{H}$ [15]. Важно подчеркнуть, что дополнительный учет “продольного” магнитного поля $\vec{H}_1$ в нерелятивистском пределе может приводить к нетривиальным результатам. Это видно хотя бы из того, что действие чисто скрещенного поля F_s при малых скоростях заряженных частиц эквивалентно действию только одной электрической составляющей $\vec{E}_s$ [5]–[9], [15].

Рассмотрим выражение для вероятности процесса бета-распада ядра с учетом его поляризации во внешнем поле $F = F_s + F_1$ [12], [16],

$$w_F = \frac{G}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \mu_* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\rho\mu_*}{2} - ik_N}{(\rho - i\varepsilon)^{7/2}} e^{iS} d\rho, \quad (19)$$

$$S = \rho I_0 - \frac{\rho}{2} \frac{\chi_*^2}{\mu_*^2} + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 \frac{\chi_*^2}{\mu_*} \operatorname{ctg} \frac{\rho\mu_*}{2}, \quad (20)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, константа G связана с вероятностью распада в отсутствие внешнего поля $w_0 = (4G/105)(2I_0)^{7/2}$, полевые параметры $\mu_* = H_1/F_0$, $\chi_* = F_s/F_0$, а $F_0 = m^2/e$. Величина k_N связана с проекциями спина ядра на направление магнитного поля $S_N = \pm 1$,

$$k_N = S_N \frac{2\alpha_0(\alpha_0 - 1)}{1 + 3\alpha_0^3},$$

где величина $\alpha_0 = G_A/G_V$, т.е. определяется отношением аксиальной G_A и векторной G_V констант в (V-A)-модели слабого взаимодействия. Мы считаем, что спин ядра равен $1/2$. Как известно, это соответствует случаю бета-распада трития, He^3 , нейтрона и протона. Для определенности рассмотрим бета-распад нейтрона. При этом, если не

будет оговорено особо, будем считать произвольным параметр энергосвечения в распаде I_0 , который в случае нейтрона определяется соотношением

$$I_0 = \frac{M_n - M_p - m}{m}.$$

Изменение знака энергосвечения

$$I_0 = \frac{-M_n + M_p - m}{m}$$

соответствует индуцированному распаду протона во внешнем поле³⁾.

Далее рассмотрим случай слабого продольного магнитного поля $\mu_* \ll 1$. При этом по-прежнему будем считать параметр χ_* произвольным. В рассматриваемом пределе выражение (19) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{w_F}{w_0} = & \frac{105e^{-i\pi/4}}{32\sqrt{\pi}} z^{-7/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i\varepsilon)^{9/2}} e^{-izx-ix^3/3} - \\ & - ik_N \mu \frac{105e^{-i\pi/4}}{32\sqrt{\pi}} z^{-5/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i\varepsilon)^{7/2}} e^{-izx-ix^3/3}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\mu = \mu_*/(2I_0)$, а $z = -2I_0(m^2/(eF_e))^{-2/3}$. Особенности подынтегральных функций в формуле (21) сдвинуты с действительной оси x в верхнюю полуплоскость, и интегралы понимаются в смысле последующего предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$.

Используя полученный результат и выполняя процедуру аналитического продолжения в комплексную плоскость, уравнение для энергии во внешнем поле I_F представим в форме

$$(-2I_F)^{7/2} = (-2\tilde{I}_F)^{7/2} + \frac{7}{2} k_N \mu_* (-2\tilde{I}_F)^{5/2}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} (-2\tilde{I}_F)^{7/2} = & (-2I_0)^{7/2} + \frac{35}{8} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^2 \frac{(-2I_0)^{7/2}}{|2I_0|^3} + \frac{105}{16\sqrt{\pi}} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^{7/3} e^{i\pi/4} f_5(z), \\ (-2\tilde{I}_F)^{5/2} = & (-2I_0)^{5/2} + \frac{15}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^{5/3} e^{3i\pi/4} f_4(z). \end{aligned}$$

Обратимся теперь к более детальному рассмотрению сдвига и ширины энергетического уровня в слабом скрещенном поле, т.е. при $\chi \ll 1$. Как уже отмечалось, в этом пределе аргумент функций Эйри удовлетворяет условию $|z| \gg 1$. Оценивая часть выражения (22), соответствующую $n = 3$ при $I_0 < 0$, имеем

$$\begin{aligned} \text{Im}(-2\tilde{I}_F)^{5/2} = & (-2I_0)^{5/2} \frac{5\chi^3}{16} e^{-2/3\chi} \left(3 - \frac{59}{4}\chi \right), \\ \text{Re}(-2\tilde{I}_F)^{5/2} = & (-2I_0)^{5/2} \left(1 + \frac{5}{8}\chi^2 + \frac{25}{128}\chi^4 \right). \end{aligned}$$

³⁾ Знак m сохраняется, так как при этом происходит переход от частицы e^- к частице e^+ .

Для $n = 4$ аналогичные выражения приобретают вид

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(-2\tilde{I}_F)^{7/2} &= (-2I_0)^{7/2} \frac{105\chi^4}{32} e^{-2/3\chi}, \\ \operatorname{Re}(-2\tilde{I}_F)^{7/2} &= (-2I_0)^{7/2} \left(1 + \frac{35}{8}\chi^2 + \frac{35}{128}\chi^4 \right).\end{aligned}$$

В пределе слабого поля при $I_0 > 0$ для случая $n = 3$ получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(-2\tilde{I}_F)^{5/2} &= (2I_0)^{5/2} \left(1 + \frac{5}{8}\chi^2 + \frac{15}{8}\chi^3 \cos \frac{2}{3\chi} \right), \\ \operatorname{Re}(-2\tilde{I}_F)^{5/2} &= (2I_0)^{5/2} \frac{5\chi^3}{8} \left(-3 \sin \frac{2}{3\chi} + \frac{59}{4}\chi \cos \frac{2}{3\chi} \right).\end{aligned}$$

При $n = 4$ и $I_0 > 0$ аналогичные выражения имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(-2\tilde{I}_F)^{7/2} &= (2I_0)^{7/2} \left(1 + \frac{35}{8}\chi^2 + \frac{35}{128}\chi^4 \sin \frac{2}{3\chi} \right), \\ \operatorname{Re}(-2\tilde{I}_F)^{7/2} &= (2I_0)^{7/2} \frac{105\chi^4}{16} \cos \frac{2}{3\chi}.\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в уравнение (22), получаем окончательные результаты.

Анализ вкладов в $\operatorname{Im}(-2I_F)^{n-1/2}$ при $n = 3$ и $n = 4$ показывает, что, как и ранее, вероятность процесса при $I_0 < 0$ в пределе $\chi \ll 1$ определяется экспоненциальной зависимостью. Предэкспоненциальный множитель при $n = 4$ пропорционален χ^4 . Отметим, что эти выводы совпадают с оценкой вероятности распада $p \rightarrow n + e + \nu$ во внешнем скрещенном поле, проведенной в работах [7], [12] (см. также выше формулу (2)). При $I_0 > 0$, что соответствует бета-распаду, разрешенному в отсутствие поля, мы имеем степенные поправки к вероятности w_0 . При этом неаналитический вклад (осциллирующая часть) проявляется также лишь в порядке χ^4 (см. сноску 2 в разделе 2).

Вклады в действительную часть при $I_0 > 0$ определяются осцилляционными (неаналитическими по полю и заряду) членами. Без учета поляризации нейтрона они также пропорциональны χ^4 , однако их фаза сдвинута относительно мнимой части на $\pi/2$. В случае $I_0 < 0$ без учета поляризации возникают квадратичные полевые поправки к величине I_0 , причем $|I_F| > |I_0|$, что совпадает с основными закономерностями эффекта Штарка [5].

Учет поляризации позволяет выделить полевые поправки к I_0 , зависящие от начальной ориентации спина протона и линейно зависящие от напряженности магнитного поля,

$$(-2I_F)^{7/2} = (-2I_0)^{7/2} + \frac{7}{2}k_N\mu_*(-2I_0)^{5/2}. \quad (23)$$

Для мнимой части при $I_0 > 0$ имеем

$$\operatorname{Im}(2I_F)^{7/2} = (2I_0)^{7/2} - \frac{7}{2}k_N\mu_*(2I_0)^{5/2}, \quad (24)$$

что согласуется с результатом, определяющим вероятность бета-распада поляризованного нейтрона в магнитном поле [16]. При рассмотрении распада покоящегося протона

действительную часть поправки к энергии $\text{Re } \Delta(-mI_F)$, зависящую от спина, можно интерпретировать как энергию взаимодействия магнитного момента $\Delta\mu_{pn}$ с магнитным полем $\vec{H}$,

$$\text{Re } \Delta(-2mI_F)_{S_p} = -\Delta\mu_{pn}(\vec{S}_p \vec{H}). \quad (25)$$

Из формулы (23) следует, что

$$\text{Re}[I_0 - I_F] = \frac{k_N}{2} \frac{H}{F_0}, \quad (26)$$

откуда получаем

$$\Delta\mu_{pn} = \frac{m|k_N|}{2F_0} = 2 \frac{\alpha_0(\alpha_0 - 1)}{1 + 3\alpha_0^2} \mu_B, \quad (27)$$

где $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ – магнетон Бора.

Выражения (25)–(27) позволяют сделать вывод о том, что в магнитном поле значение I_0 расщепляется на два “подуровня”, положение которых определяется ориентацией спина протона, величиной α_0 и значением μ_B . Величина расщепления определяется вкладом нуклонного слабого тока перехода, который, как известно, не сохраняет пространственную четность.

Подставляя в (27) значение $\alpha_0 \sim 1.2$, известное из экспериментов по распаду нейтрона в рамках (V-A)-модели слабого взаимодействия [17], получим $\Delta\mu_{pn} = 0.09\mu_B$. Легко видеть, что поправка $\Delta\mu_{pn}$ исчезает при $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = 1$, т.е. в случаях, когда вклад аксиальной части взаимодействия отсутствует или в точности равен вкладу векторной части.

В сильном поле, т.е. при $\chi \gg 1$, имеем

$$\begin{aligned} (-2I_F)^{7/2} = & \frac{105}{16\sqrt{\pi}} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^{7/3} \left\{ \frac{2\Gamma(5/6)}{3^{1/6}7} (-\sqrt{3} + i) + \right. \\ & \left. + k_N \mu \left(\frac{m^2}{eF_s} \right)^{2/3} \frac{\Gamma(1/6)}{3^{5/6}5} (1 + i\sqrt{3}) \right\}, \end{aligned}$$

откуда можно получить

$$I_F = \frac{1}{4} \left(\frac{15\Gamma(5/6)}{3^{1/6}4\sqrt{\pi}} \right)^{2/7} \left(\frac{eF_s}{m^2} \right)^{2/3} (-1 - i\sqrt{3}),$$

что по-прежнему означает рост абсолютной величины энергии с ростом поля пропорционально той же степени поля $(eF_s/m^2)^{2/3}$. Как и в случаях $n = 1$ и $n = 2$, действительная и мнимая части различаются множителем $\sqrt{3}$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Универсальность развиваемого нами подхода проявляется прежде всего в том, что с его помощью удастся исследовать как системы, способные к спонтанному распаду, так и явления, возникающие лишь под влиянием поля. При этом в рассмотрение включаются различные значения полного углового момента системы. Среди реакций подобного типа

выделяются процессы ионизации атомов и процессы электропоглощения света непроводящими кристаллами в интенсивных электромагнитных полях сложных конфигураций.

Численные расчеты вероятности вырывания электрона w_F/E_0 из короткодействующей потенциальной ямы как функции электрического и магнитного полей представлена на рисунке. Легко видеть, что характер зависимости с повышением интенсивности электромагнитных полей существенно меняется. Отличительной чертой является линейный рост вероятности ионизации с ростом магнитного поля.

Для изучения нелинейных квантовых явлений, протекающих в интенсивных электромагнитных полях определенного типа, в настоящее время применяется ряд экспериментальных и теоретических методов. В последнее время все больший интерес вызывает изучение процессов в суперпозиции интенсивных электромагнитных полей. Обратим внимание, что в теории ионизации атомов были получены уравнения для комплексной энергии, подобные уравнению (8) при $n = 1$ (см., например, [10], [11]). Однако способ их получения существенно отличен от пути, использованного нами. Подход, развитый в этих работах, сводится к построению функции Грина для уравнения Шредингера во внешнем поле, переходу к энергетическому фурье-представлению решения и его подчинению граничным условиям потенциала нулевого радиуса. Единственным, хотя и немаловажным, отличием полученного таким путем уравнения для квазиэнергии от нашего уравнения (8) является комплексность энергетического параметра z , содержащего комплексную энергию $E = E_r - i\Gamma/2$, где $\Gamma > 0$ – ширина уровня. В результате уравнение (8) превращается в трансцендентное уравнение для комплексной энергии.

Естественно возникает вопрос о сопоставлении двух описываемых подходов. Важной особенностью процедуры получения уравнений для определения комплексной энергии $E = E_r - i\Gamma/2$ методом функций Грина [10], [11] является экспоненциальная расходимость интегралов в правых частях формул (7), (8). Тем самым для получения физически обоснованных результатов эти интегралы нуждаются в дополнительной регуляризации. Одним из предлагаемых приемов регуляризации является метод аналитического продолжения. Однако несмотря на многочисленные попытки устранения расходимос-

тей с помощью этого подхода, полностью удовлетворительная процедура до сих пор не найдена. Так, в частности, в недавней работе [18] для указанного аналитического продолжения использовалось соотношение, основанное на интегральном преобразовании однократного интеграла в двукратный. Нетрудно убедиться, что получаемый авторами работы [18] двукратный интеграл оказывается якобы сходящимся “при любых значениях параметра” лишь из-за неверного определения пределов интегрирования.

Давно известно [19], что существует корректная процедура устранения сингулярностей подынтегральной функции интегралов вида

$$f(E) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iEt} F(t) dt.$$

Их сходимость обеспечивается выполнением определенных условий в смысле интегрируемости функции $F(t)$, удовлетворяющей требованию $F(t) = 0$ при $t < 0$, что является следствием условия причинности. Это утверждение остается в силе, даже если $F(t)$ обращается в нуль лишь при $t < -a$, где $a > 0$. Тем самым можно определить новую функцию $f_1(E)$, связанную с $f(E)$ простым соотношением $f_1(E)e^{-iaE} = f(E)$, уже не имеющую существенной особенности на бесконечности, хотя e^{-iaE} и $f(E)$ таковой обладают. Таким образом, чтобы получить функцию $f(E)$, обладающую регулярным аналитическим продолжением на верхнюю полуплоскость комплексной энергии, ее необходимо умножить на $e^{i\alpha E}$ при $\alpha \geq a$. Проблема применения указанного подхода к решению уравнений состоит в том, что параметр a , называемый “элементарной длиной”, для устранения расходимости интеграла должен принимать *фиксированное значение*, которое становится известным лишь после нахождения самого решения $E = E_r - i\Gamma/2$.

Эту трудность можно обойти, если к решению трансцендентного уравнения (8) применить, например, метод итерации. Законность такого подхода в нашем случае обоснована тем, что сдвиг уровня E_0 , вообще говоря, имеет физический смысл лишь при выполнении условия

$$\left| \frac{E - E_0}{E_0} \right| < 1. \quad (28)$$

На первом шаге в интеграле типа (7) (с заменой $E_0 \rightarrow E = E_r - i\Gamma/2$) можно положить $E_{(1)} = E_0$, т.е. считать, что $\Gamma_{(1)} = 0$. В итоге интегралы сходятся, представляя собой функции, аналитические в верхней полуплоскости комплексной энергетической переменной, и позволяют определить комплексное значение энергии $E_{(2)}$. На следующем шаге процедура регуляризации интеграла строится по указанному правилу на основе уже найденного значения $\text{Im } E_{(2)} = -\Gamma_{(2)}/2$ и т.д.

Легко видеть, что при замене $E \rightarrow E_0$ в экспоненте интеграла (7) полученное уравнение превращается в уравнение (8) и совпадает с точным результатом работы [2], где изучались пороговые явления во внешнем интенсивном электромагнитном поле той же конфигурации. Для получения аналогичных уравнений в этой работе был использован метод дисперсионных соотношений без непосредственного использования свойств функций Грина.

В заключение остановимся на одном из важнейших вопросов статьи – универсальности полученных выражений в области сильных полей. Ее можно объяснить тем, что изучаемые при этом характеристики полностью определяются именно действием внешнего поля. Характерными параметрами оказываются так называемые магнитная $r_H =$

$\lambda_c(m^2/(eF))^{1/2}$ или электрическая $r_E = \lambda_c(m^2/(eF))^{1/3}$ длины [20], где λ_c — комптоновская длина волны электрона. Существенное сокращение расстояний, характеризующих формирование процессов в таких полях ($\lambda_H, \lambda_E \ll \lambda_c$), может приводить к эффектам, определяемым уже другим масштабом длины, свойственным формализму модифицированной КЭД. Последовательное изучение подобных явлений может быть проведено, например, в рамках “КЭД с фундаментальной массой” [21]–[23]. В этом подходе основные эффекты, обусловленные действием интенсивного внешнего поля, определяются соотношением фундаментальной и электромагнитной длин [20]. Отметим также, что экспериментальные предложения по изучению процессов в электромагнитных полях сложной конфигурации содержатся в недавно опубликованной работе [24].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-16784) и при частичном финансировании гранта поддержки ведущих научных школ № 00-15-96046, а также гранта Фонда фундаментальных исследований при С-ПбГУ № Е00-3.1-457.

Список литературы

- [1] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966.
- [2] В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов. ТМФ. 2000. Т. 125. № 3. С. 432.
- [3] В. Г. Кадышевский, Г. А. Кравцова, В. Н. Родионов. ТМФ. 2002. Т. 130. № 2. С. 275.
- [4] Н. С. Крылов, В. А. Фок. ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 93.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
- [6] Л. В. Келдыш. ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1945.
- [7] А. И. Никишов, В. И. Ритус. Тр. ФИАН. 1979. Т. 111. С. 84.
- [8] А. И. Никишов, В. И. Ритус. Тр. ФИАН. 1986. Т. 168. С. 232.
- [9] И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [10] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов. Атом в сильном световом поле. М.: Атомиздат, 1978.
- [11] Л. П. Рапопорт, Б. А. Зон, Н. П. Манаков. Теория многофотонных процессов в атомах. М.: Атомиздат, 1978.
- [12] В. Н. Родионов. ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 3; 1998. Т. 113. С. 21; Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1999. № 2. С. 5.
- [13] Х. М. Нуссенцвейг. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976.
- [14] D. E. Aspin. Phys. Rev. 1966. V. 147. P. 554.
- [15] В. Н. Родионов, А. М. Мандель. Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 2001. № 3. С. 25.
- [16] И. М. Тернов, В. Н. Родионов, О. Ф. Дорофеев. ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 51.
- [17] Л. Б. Окунь. Лептоны и кварки. М.: Наука, 1981.
- [18] Н. Л. Манаков, М. В. Фролов, Б. Борка, А. Ф. Старасе. ЖЭТФ. 2000. Т. 72. С. 426.
- [19] Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматлит, 1958.
- [20] В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов. Электромагнитная длина и фундаментальная масса в электродинамике. В сб.: Труды семинара “Симметрии и интегрируемые системы”. Ред. А. Н. Сисакян. Дубна: ОИЯИ, 1999. С. 103.
- [21] В. Г. Кадышевский. ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. С. 5.
- [22] В. Г. Кадышевский. ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 563.
- [23] В. Г. Кадышевский, Д. В. Фурсаев. ТМФ. 1990. Т. 83. С. 197.
- [24] В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель. Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. С. 435.

Поступила в редакцию 11.III.2002 г.