Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Кинетическое уравнение для квантовых ферми-газов и аналитическое решение граничных задач, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 2, 310–324

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:15:16

© 2003 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ФЕРМИ-ГАЗОВ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Построено кинетическое уравнение, описывающее поведение квантовых ферми-газов с частотой столкновений молекул, пропорциональной молекулярной скорости. Получено аналитическое решение обобщенной задачи Смолуховского, в которой вдали от поверхности заданы градиент температуры и скорость потока массы. Найдены точные формулы для скачков температуры газа, концентрации и химического потенциала. Анализ предельных случаев показывает переход квантового ферми-газа к классическому или вырожденному.

Ключевые слова: граничная задача, кинетическое уравнение, разреженный ферми-газ, функция распределения, обобщенная задача Смолуховского, скачки температуры, концентрации и химического потенциала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о скачке температуры на границе раздела разреженного газа и конденсированной среды (твёрдого тела, жидкости) относится к числу важнейших в кинетической теории газов [1], [2]. Рассмотрение этой задачи восходит к работам Смолуховского, поэтому ее называют задачей Смолуховского. Важность этой проблемы связана прежде всего с многочисленными практическими применениями [2], [3]. Поведение газа вблизи границы раздела представляет и теоретический интерес.

К задаче Смолуховского тесно примыкает задача об испарении газа (пара) с плоской поверхности. В связи с этим обе задачи в единой постановке естественно называть обобщенной задачей Смолуховского. Для случая классического газа эта задача рассматривалась в работах [1], [3]–[6].

В то же время представляет интерес рассмотрение этой задачи в ситуации, когда следует учесть квантовые эффекты, например при изучении поведения газа He^3 вблизи границы раздела газа и конденсированной фазы при низких температурах. Отметим, что оценка величины квантовых эффектов необходима и для выяснения области применимости результатов, полученных в классической постановке.

*Московский педагогический университет, Москва, Россия

Данная работа посвящена решению обобщенной задачи Смолуховского для случая ферми-газа. При этом используется подход, аналогичный рассмотренному ранее для задачи об изотермическом скольжении [7].

2. ВЫВОД КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим широко применяемое кинетическое уравнение в форме Больцмана–Крука–Веландера (БКВ) с частотой столкновений молекул, пропорциональной молекулярной скорости [1], [5], [6],

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f = \nu_0 w (f_M^* - f). \quad (2.1)$$

Здесь $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ – функция распределения, $\mathbf{v}$ – молекулярная скорость, $w = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$, $\mathbf{u}$ – среднемассовая скорость газа, $\mathbf{u} = n^{-1} \int \mathbf{v} f d\Omega$, n – концентрация газа, f_M^* – максвелловская функция распределения,

$$f_M^* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k T_*} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2k T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right],$$

ν_0 – параметр модели, имеющий смысл обратной длины свободного пробега молекул l , $\nu_0 \sim l^{-1}$. Параметры n_* , T_* , $\mathbf{u}_*$, входящие в функцию f_M^* , определяются из требования выполнения законов сохранения числа молекул, импульса и энергии

$$\begin{aligned} \int w f d\Omega &= \int w f_M^* d\Omega, \\ \int w \mathbf{v} f d\Omega &= \int w \mathbf{v} f_M^* d\Omega, \\ \int w \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f d\Omega &= \int w \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f_M^* d\Omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $d\Omega = d\Omega_M = d^3 v$.

Отметим, что уравнение (2.1) соответствует предположению о постоянстве (при отсутствии зависимости от скорости) длины свободного пробега молекул, что отвечает модели, в которой молекулы являются твердыми сферами.

Рассмотрим обобщение уравнения (2.1) на случай квантовых ферми-газов. Будем предполагать, что общий вид этого уравнения сохраняется, однако под функцией f_M^* необходимо понимать распределение Ферми [8]

$$f_F^* = \left[\exp \left(\frac{m}{2k T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 - \frac{\mu_*}{k T_*} \right) + 1 \right]^{-1}.$$

Здесь параметры μ_* , T_* , $\mathbf{u}_*$ определяются, как и ранее, условиями (2.2). При этом $d\Omega = d\Omega_F = (2s + 1)(2\pi\hbar)^{-3} d^3 \mathbf{p}$, $\hbar$ – постоянная Планка, s – спин частицы, $\mathbf{p}$ – ее импульс. Будем считать, что массовая скорость газа много меньше средней тепловой

скорости молекул, а возникающие характерные перепады температуры на длине свободного пробега молекул малы по сравнению с температурой газа. В этих предположениях возможна линеаризация задачи. Будем искать функцию распределения в виде $f = f_F^s + \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})g$, где

$$f_F^s = \left[\exp \left(\frac{mv^2}{2kT_s} - \frac{\mu_s}{kT_s} \right) + 1 \right]^{-1},$$

φ — неизвестная функция, T_s — температура поверхности, μ_s — химический потенциал газа, находящегося в термодинамическом равновесии с конденсированной фазой при температуре T_s . Обозначим также

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{mv^2}{2kT_s} - \frac{\mu_s}{kT_s}, & \mathbf{c} &= \sqrt{\frac{m}{2kT_s}} \mathbf{v}, \\ \alpha &= \frac{\mu_s}{kT_s}, & \varepsilon_* &= \frac{m}{2kT_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 - \frac{\mu_*}{kT_*}, \quad -\infty < \alpha < +\infty. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений можно записать

$$f_F^* = \frac{1}{e^{\varepsilon_*} + 1}, \quad f_F^s = \frac{1}{e^{c^2 - \alpha} + 1}.$$

Линеаризуем функцию f_F^* , переходя к безразмерным величинам. Заметим, что

$$\varepsilon_* = \frac{T_s}{T_*} \left[\frac{m}{2kT_s} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 - \frac{\mu_*}{kT_s} \right] = \frac{T_s}{T_*} [(\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{u}}_*)^2 - \alpha_*],$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_* = \sqrt{m/(2kT_s)} \mathbf{u}_*$, $\alpha_* = \mu_*/(kT_s)$. В случае вырожденного ферми-газа, когда $\mu > 0$, более естественным будет введение безразмерной скорости $\tilde{\mathbf{u}}_* = \sqrt{m/(2\mu)} \mathbf{u}_*$, где величина $v_F = \sqrt{2\mu/m}$ имеет смысл скорости Ферми.

Учитывая, что $T_* = T_s + \delta T_s$, $\alpha_* = \alpha + \delta\alpha_*$, получаем

$$\varepsilon_* = c^2 - \alpha - \frac{\delta T_*}{T_s} (c^2 - \alpha) - \delta\alpha_* - 2\mathbf{c}\tilde{\mathbf{u}}_*,$$

откуда следует, что

$$\delta\varepsilon_* = -\delta\alpha_* - 2\mathbf{c}\tilde{\mathbf{u}}_* - (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s},$$

где $\delta\varepsilon_* = \varepsilon_* - \varepsilon_s$, $\varepsilon_s = c^2 - \alpha$. Следовательно,

$$f_F^* = f_F^s + \left(\frac{\partial f_F^*}{\partial \varepsilon_*} \right)_{\varepsilon_* = \varepsilon_s} \delta\varepsilon_*,$$

или

$$f_F^* = f_F^s + g(c; \alpha) \left[\delta\alpha_* + 2\mathbf{c}\tilde{\mathbf{u}}_* + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} \right],$$

где

$$g = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} f_F^s = \frac{e^{c^2 - \alpha}}{(e^{c^2 - \alpha} + 1)^2}.$$

Поскольку массовая скорость $\mathbf{u}$ много меньше молекулярной скорости $\mathbf{v}$, величину w в линейном приближении [6] можно заменить на $|\mathbf{v}|$.

Введем безразмерные величины $t^* = t\nu_0 \sqrt{2kT_s/m}$ и $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}\nu_0$. В дальнейшем звездочки у этих величин будем опускать.

Уравнение (2.1) в безразмерных переменных принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{c} \nabla) \varphi = c \delta \alpha_* + 2c(\mathbf{c} \tilde{\mathbf{u}}_*) + c(c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - c\varphi. \quad (2.3)$$

Параметры этого уравнения находятся из законов сохранения (2.2), которые теперь принимают вид следующей системы уравнений:

$$\int (L\varphi) g d^3 c = 0, \quad \int (L\varphi) c^2 g d^3 c = 0, \quad \int (L\varphi) \mathbf{c} g d^3 c = 0,$$

где

$$L\varphi = c \delta \alpha_* + 2c \mathbf{c} \tilde{\mathbf{u}}_* + c(c^2 - \alpha) \frac{\delta T_*}{T_s} - c\varphi.$$

Из этой системы находим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_* &= \frac{3}{4\pi r_1(\alpha)} \int \varphi \mathbf{c} g c d^3 c, \\ \frac{\delta T_*}{T_s} &= -\frac{r_1(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi g c d^3 c + \frac{l(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi g c^3 d^3 c, \\ \delta \alpha_* - \alpha \frac{\delta T_*}{T_s} &= \frac{r_3(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi g c d^3 c - \frac{r_1(\alpha)}{2\pi \Delta(\alpha)} \int \varphi g c^3 d^3 c. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_1(\alpha) &= 4 \int_0^\infty c \ln(1 + e^{\alpha - c^2}) dc, \quad l(\alpha) = \ln(1 + e^\alpha), \\ r_3(\alpha) &= 12 \int_0^\infty c^3 \ln(1 + e^{\alpha - c^2}) dc, \quad \Delta(\alpha) = l(\alpha) r_3(\alpha) - r_1^2(\alpha). \end{aligned}$$

Представим уравнение (2.3) в стандартной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{c} \nabla) \varphi + c\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) = \frac{c}{2\pi} \int k(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}') d\Omega(\alpha), \quad (2.4)$$

где

$$k = 1 + 3 \frac{l(\alpha)}{r_1(\alpha)} \mathbf{c} \mathbf{c}' + \frac{l^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \left(c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) \left(c'^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right), \quad d\Omega(\alpha) = \frac{g(c'; \alpha) c'}{l(\alpha)} d^3 c'.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\alpha \rightarrow -\infty$ уравнение (2.4) переходит в классическое уравнение для одноатомного газа с частотой столкновений молекул, пропорциональной молекулярной скорости [1], [5], которое имеет тот же вид (2.4), но в котором

$$k = 1 + \frac{3}{2} \mathbf{c} \mathbf{c}' + \frac{1}{2} (c^2 - 2)(c'^2 - 2), \quad d\Omega = e^{-c'^2} c' d^3 c'.$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{g(c; \alpha)}{l(\alpha)} = e^{-c^2}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} = 2, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{l^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \frac{1}{2}.$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассматриваемой задаче газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской поверхностью, с которой происходит испарение (конденсация) молекул газа (пара), а также происходит теплообмен между конденсированной фазой и газом. Предположим, что вдали от поверхности существуют отличные от нуля градиент температуры, перпендикулярный поверхности (и соответствующий поток тепла), и некоторая среднемассовая скорость газа, направленная от поверхности или к поверхности (это соответствует испарению или конденсации газа), т.е.

$$\begin{aligned} T(x) &= T_0 + \left(\frac{dT}{dx} \right)_\infty x, & x \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{u}(x) &= \{u_\infty, 0, 0\}, & x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Температурное поле можно представить с помощью формулы, содержащей величину относительного скачка температуры $\varepsilon_t = (T_0 - T_s)/T_s$,

$$T(x) = T_s(1 + \varepsilon_t + k_t x), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$k_t = \frac{1}{T_s} \left(\frac{dT}{dx} \right)_\infty$$

— относительный градиент температуры.

Обобщенная задача Смолуховского состоит в нахождении величины ε_t как функции k_t и u_∞ . Учитывая линейный характер задачи, можно записать $\varepsilon_t = T_t k_t + T_u U$, $U = \sqrt{m/(2kT_s)} u_\infty$. Безразмерные величины T_t , T_u называются коэффициентами скачка температуры. У введенных величин индекс t соответствует температуре, а индекс u — скорости испарения (конденсации).

Принимая во внимание стационарный характер задачи и то обстоятельство, что функция φ не зависит от координат y и z , упростим уравнение (2.4),

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu, c) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty k(\mu, c; \mu', c') \varphi(x, \mu', c') d\Omega(\alpha), \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{c_x}{c}, & d\Omega(\alpha) &= \frac{g(c'; \alpha)}{l(\alpha)} d\mu' dc', \\ k &= 1 + 3 \frac{l(\alpha)}{r_1(\alpha)} \mu c \mu' c' + \frac{l^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \left(c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \right) \left(c'^2 - \frac{r_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (3.1) в качестве первых трех частных решений имеет инварианты столкновений $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = c^2$, $\varphi_3 = \mu c$. Кроме того, уравнение (3.1) имеет частное решение, описывающее перенос тепла в неоднородно нагретом газе,

$$\varphi_4 = x \left(c^2 - \frac{r_2(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} \right) - \mu \left[c^2 - \frac{r_2(\alpha) + c\Delta_1(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} \right].$$

Следовательно, функцией распределения Чепмена–Энскога [1] является функция

$$\varphi_{\text{as}}(x, \mu, c) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left(c^2 - \frac{3r_2(\alpha)}{5r_0(\alpha)} \right) + \left(u_1 - k_t \frac{\Delta_1(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} \right) \mu c + k_t (x - \mu) \left(c^2 - \frac{r_2(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} \right).$$

Здесь

$$\Delta_1(\alpha) = r_2(\alpha)l(\alpha) - r_1(\alpha)r_0(\alpha), \quad r_0(\alpha) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \ln(1 + e^{\alpha - c^2}) dc,$$

$$r_2(\alpha) = \frac{15}{2} \int_0^\infty c^2 \ln(1 + e^{\alpha - c^2}) dc,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и u_1 – произвольные постоянные. Выясним физический смысл этих величин.

Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения относительно функции f_{F}^{S} :

$$f_{\text{F}} = f_{\text{F}}^{\text{S}} + g \left(\delta\alpha + 2\mathbf{c}\mathbf{u} + (c^2 - \alpha) \frac{\delta T}{T_{\text{s}}} \right).$$

Отметим, что под локально-равновесной понимается фермиевская функция распределения, которая описывает состояние газа с теми же величинами концентрации, кинетической энергии молекулярного движения и среднemasсовой скорости газа, что и реальная неравновесная функция распределения. Тогда для определения величин абсолютного скачка химического потенциала $\delta\alpha$ и относительного скачка температуры $\varepsilon_t = \delta T(0)/T_{\text{s}}$ получаем с учетом очевидной симметрии следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \int (\delta\alpha + (c^2 - \alpha)\varepsilon_t) d^3c &= \int \varphi g d^3c, \\ \int (\delta\alpha + (c^2 - \alpha)\varepsilon_t) c^2 d^3c &= \int \varphi g c^2 d^3c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Среднемассовая скорость (в направлении оси x) определяется из уравнения

$$2 \int \mathbf{c}(\mathbf{c}\mathbf{u}) g d^3c = \int \mathbf{c} \varphi g d^3c. \quad (3.3)$$

Из системы уравнений (3.2) находим

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \frac{r_2(\alpha) - \alpha r_0(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi g c^2 d\mu dc - \frac{r_0(\alpha) - \alpha s(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi g c^4 d\mu dc, \\ \varepsilon_t &= -\frac{r_0(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi g c^2 d\mu dc + \frac{s(\alpha)}{\Delta_2(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi g c^4 d\mu dc, \end{aligned}$$

где

$$s(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dc}{e^{c^2 - \alpha} + 1}, \quad \Delta_2(\alpha) = s(\alpha)r_2(\alpha) - r_0^2(\alpha).$$

Подставляя в эти равенства $\varphi = \varphi_{\text{as}}$, получаем

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_1 = \delta\alpha - \left(\alpha - \frac{3r_2(\alpha)}{5r_0(\alpha)} \right) \varepsilon_t.$$

Из уравнения (3.3) находим среднемассовую скорость

$$\mathbf{u} = \frac{3}{4\pi r_0(\alpha)} \int \mathbf{c} \varphi g d^3 c,$$

откуда для интересующей нас x -компоненты скорости будем иметь

$$u_x = \frac{3}{2r_0(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi g \mu c^3 d\mu dc.$$

Подставляя в последнее равенство $\varphi = \varphi_{\text{ас}}$, находим $u_1 = 2U$. Таким образом, распределение Чепмена–Энскога построено.

Помимо скачка температуры в обобщенной задаче Смолуховского важнейшей характеристикой является величина относительного скачка концентрации ε_n (индекс n соответствует концентрации),

$$\varepsilon_n = \frac{n_0 - n_s}{n_s} = \int \varphi g d^3 c \left(\int f_{\text{F}}^{(0)} d^3 c \right)^{-1} = \frac{3}{2r_0(\alpha)} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \varphi g c^2 d^3 c,$$

или

$$\varepsilon_n = \frac{3s(\alpha)}{2r_0(\alpha)} \left[\varepsilon_1 + \left(\frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)} - \frac{3r_2(\alpha)}{5r_0(\alpha)} \right) \varepsilon_t \right].$$

Теперь, предполагая отражение молекул от стенки чисто диффузным, запишем граничные условия в обобщенной задаче Смолуховского,

$$\begin{aligned} \varphi(0, \mu, c) &= 0, & 0 < \mu < 1, \\ \varphi(x, \mu, c) &= \varphi_{\text{ас}}(x, \mu, c) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. СВЕДЕНИЕ К ОДНОСКОРОСТНОЙ ЗАДАЧЕ. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем искать решение задачи (3.1), (3.4) в виде

$$\varphi = h_1(x, \mu) + c h_2(x, \mu) + \left(c^2 - \frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} \right) h_3(x, \mu).$$

Полученную задачу представим в векторном виде,

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(\mu, \mu'; \alpha) h(x, \mu') d\mu', \\ h(0, \mu) &= \mathbf{0}, & 0 < \mu < 1, \\ h(x, \mu) &= h_{\text{ас}}(x, \mu) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь матрицы-строки $\mathbf{0} = [000]^t$, $h = [h_1 h_2 h_3]^t$, матрица-столбец

$$h_{\text{ас}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_t \left(\frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} - \frac{3r_2(\alpha)}{5r_0(\alpha)} \right) + k_t(x - \mu) \left(\frac{r_1(\alpha)}{l(\alpha)} - \frac{r_2(\alpha)}{r_0(\alpha)} \right) \\ \left(2U - \frac{\Delta_1(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} k_t \right) \mu \\ \varepsilon_t + k_t(x - \mu) \end{bmatrix},$$

матрица

$$K(\mu, \mu'; \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_0(\alpha)}{l(\alpha)} & 0 \\ 3\mu\mu' \frac{r_0(\alpha)}{r_1(\alpha)} & 3\mu\mu' & 3\mu\mu' \frac{\Delta_1(\alpha)}{l(\alpha)r_1(\alpha)} \\ 0 & \frac{\Delta_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} & 1 \end{bmatrix}.$$

Перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{1}{2} K_0 n_0[h] + \frac{1}{2} \mu K_1 n_1[h], \quad (4.2)$$

где

$$n_j[h] = \int_{-1}^1 \mu^j h(x, \mu) d\mu, \quad j = 0, 1,$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_0(\alpha)}{l(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1 = 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_0(\alpha)}{r_1(\alpha)} & 1 & \frac{\Delta_1(\alpha)}{l(\alpha)r_1(\alpha)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Общий метод разделения переменных приводит к выражению

$$h_\eta = e^{-x/\eta} \Phi(\eta, \mu),$$

подставляя которое в (4.2), получим характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta K_0 n_0[\Phi] + \frac{1}{2} \mu \eta K_1 n_1[\Phi].$$

Интегрируя по μ последнее уравнение, находим

$$n_1[\Phi] = \eta(E - K_0) n_0[\Phi],$$

где E — единичная матрица. Следовательно, характеристическое уравнение упрощается и принимает вид

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta D(\eta\mu) n_0[\Phi], \quad (4.3)$$

где

$$D(\mu\eta) = K_0 + d(\alpha) \mu \eta E_1, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$d(\alpha) = 3 \left[1 - \frac{r_0^2(\alpha) \Delta(\alpha) + \Delta_1(\alpha)}{l(\alpha) r_1(\alpha) \Delta(\alpha)} \right].$$

При $\eta \in (-1, 1)$ из уравнения (4.3) в пространстве обобщенных функций [9] находим собственные векторы [10] непрерывного спектра $\Phi(\eta, \mu) = F(\eta, \mu) n_0[\Phi]$, где

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta D(\mu\eta) P \frac{1}{\eta - \mu} + \Lambda(\eta) \delta(\eta - \mu)$$

– собственная матрица, обобщенная функция $P\frac{1}{x}$ – главное значение интеграла от $1/x$, $\delta(x)$ – δ -функция Дирака, $\Lambda(z)$ – дисперсионная матрица,

$$\Lambda(z) = E + z \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{D(\mu z)}{\mu - z} d\mu.$$

Представим дисперсионную матрицу в явном виде $\Lambda(z) = \lambda_c(z)D(z^2) + K_2$, где

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r_0(\alpha)}{l(\alpha)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_c(z) = 1 + z \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{u - z}.$$

Ее определитель (дисперсионная функция) выражается формулой

$$\lambda(z) = \det \Lambda(z) = \lambda_c(z)\omega(z; \alpha),$$

где $\omega(z; \alpha) = 1 + d(\alpha)z^2\lambda_c(z)$.

5. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Дискретным спектром по определению (см., например, [10], [11]) называют множество нулей дисперсионной функции. Найдем нули функции $\omega(z; \alpha)$, лежащие вне разреза $[-1, 1]$. Очевидно, что $\omega(\infty; \alpha) = 1 - d(\alpha)/3 > 0$ при всех действительных α . Возьмем контур γ_ε , охватывающий разрез $[-1, 1]$, отстоящий от него на расстоянии ε и такой, что внутри контура нет нулей функции $\omega(z; \alpha)$. Число N нулей функции $\omega(z; \alpha)$ вне контура согласно принципу аргумента [12] равно приращению аргумента этой функции, т.е. $N = (2\pi)^{-1} \Delta_{\gamma_\varepsilon} \arg \omega(z; \alpha)$, где символ $\Delta_{\gamma_\varepsilon} f$ означает приращение f вдоль контура γ_ε . Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в этом равенстве, получаем

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{(-1,1)} \arg \frac{\omega^+(\mu; \alpha)}{\omega^-(\mu; \alpha)},$$

где $\omega^\pm(\mu; \alpha)$ – граничные значения функции $\omega(z; \alpha)$ сверху и снизу на интервале $(-1, 1)$,

$$\omega^\pm(\mu; \alpha) = \omega(\mu; \alpha) \pm i \frac{\pi}{2} d(\alpha) \mu^3.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} \omega^+$ является четной функцией, а $\operatorname{Im} \omega^+$ – нечетной, имеем

$$N = \frac{1}{\pi} \Delta_{(0,1)} \arg G(\mu; \alpha), \quad G = \frac{\omega^+}{\omega^-}.$$

Пусть $\varepsilon(\mu; \alpha) = \arg \omega^+(\mu; \alpha)$ – главное значение аргумента, фиксированное условием $\varepsilon(0; \alpha) = 0$. Так как $\bar{\omega}^+ = \omega^-$, $|\omega^+| = |\omega^-|$, то $\arg G(\mu; \alpha) = 2\varepsilon(\mu; \alpha)$, поэтому $N = 2\pi^{-1} \Delta_{(0,1)} \varepsilon(\mu; \alpha)$. Можно показать, что угол $\varepsilon(\mu; \alpha)$ на отрезке $[0, 1]$ имеет приращение, равное π , независимо от величины параметра α , следовательно, число нулей N равно

двум. Обозначим эти нули через $\pm\eta_0$ ($\eta_0 > 1$). В силу равенства $\omega(z; \alpha) = \omega(\bar{z}; \alpha)$ нули действительны. Согласно (4.3) этим нулям отвечают два собственных решения

$$h_{\eta_0}(x, \mu) = \frac{1}{2}(\pm\eta_0) \frac{D(\pm\eta_0\mu)}{\pm\eta_0 - \mu} e^{-x/(\pm\eta_0)} n(\pm\eta_0), \quad n(\eta) = n_0[\Phi].$$

Далее понадобится убывающее решение h_{η_0} . Подставляя h_{η_0} в уравнение (4.1), получаем однородное уравнение

$$\Lambda(\eta_0)n(\eta_0) = 0, \quad (5.1)$$

определитель которого равен нулю: $\lambda(\eta_0) = \det \Lambda(\eta_0) = 0$. Из уравнения (5.1) находим

$$n(\eta_0) = \begin{bmatrix} -r_0(\alpha)\eta_0 t(\eta_0)l^{-1}(\alpha) \\ \lambda_c(\eta_0) \\ -\eta_0 t(\eta_0)\Delta_1(\alpha)\Delta^{-1}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad t(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{u-z}.$$

Заметим, что

$$D(\mu\eta_0)n(\eta_0) = \begin{bmatrix} r_0(\alpha)l^{-1}(\alpha) \\ -\mu\eta_0^{-1} \\ \Delta_1(\alpha)\Delta^{-1}(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, частное решение h_{η_0} построено в явном виде,

$$h_{\eta_0}(x, \mu) = \frac{\eta_0}{2(\eta_0 - \mu)} e^{-x/\eta_0} \begin{bmatrix} r_0(\alpha)l^{-1}(\alpha) \\ -\mu\eta_0^{-1} \\ \Delta_1(\alpha)\Delta^{-1}(\alpha) \end{bmatrix}.$$

В книге [10] показано, что $\lambda_c(z)$ имеет лишь двойной нуль в точке $z = \infty$. Согласно (4.3) эта точка является 4-кратной точкой дискретного спектра. Ей отвечают следующие частные решения:

$$h^{(1)}(x, \mu) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h^{(2)}(x, \mu) = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$h^{(3)}(x, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h^{(4)}(x, \mu) = (x - \mu) \begin{bmatrix} -\Delta_1(\alpha)(l(\alpha)r_0(\alpha))^{-1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Эти частные решения соответствуют четырем частным решениям φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, кинетического уравнения, физический смысл которых был выяснен выше.

6. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Покажем, что решение граничной задачи (4.1) записывается в виде разложения

$$h(x, \mu) = h_{\text{as}}(x, \mu) + A_0 h_{\eta_0}(x, \mu) + \int_0^\infty e^{-x/\eta} F(\eta, \mu) A(\eta) d\eta, \quad (6.1)$$

где неизвестными являются постоянные $A_0, \varepsilon_1, \varepsilon_t$ и вектор-функция $A(\eta)$ с элементами $A_j(\eta)$, $j = 1, 2, 3$.

Разложение (6.1) можно представить в виде

$$h(x, \mu) = h_{\text{as}}(x, \mu) + A_0 h_{\eta_0}(x, \mu) + e^{-x/\mu} \Lambda(\mu) A(\mu) \theta_+(\mu) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x/\eta} \eta D(\mu\eta) A(\eta) \frac{d\eta}{\eta - \mu}, \quad (6.2)$$

где $\theta_+(\mu) = 1$, $\mu \in (0, 1)$; $\theta_+(\mu) = 0$, $\mu \notin (-1, 0)$. Подставляя разложение (6.2) в первое из граничных условий (см. (4.1)), приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши [12],

$$h_{\text{as}}(0, \mu) + A_0 h_{\eta_0}(0, \mu) + \Lambda(\mu) A(\mu) + \frac{1}{2} \int_0^1 \eta D(\mu\eta) A(\eta) \frac{d\eta}{\eta - \mu} = \mathbf{0}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (6.3)$$

Введем вспомогательную вектор-функцию

$$N(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta D(z\eta) A(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z} \quad (6.4)$$

и матрицу $P(z) = \Lambda(z) D^{-1}(z^2)$. С помощью граничных значений $N(z)$, $\Lambda(z)$, $P(z)$ и соответствующих формул Сохоцкого сведем уравнение (6.3) к неоднородной векторной краевой задаче Римана–Гильберта

$$P^+(\mu) [N^+(\mu) + h_{\text{as}}(0, \mu) + A_0 h_{\eta_0}(0, \mu)] = \\ = P^-(\mu) [N^-(\mu) + h_{\text{as}}(0, \mu) + A_0 h_{\eta_0}(0, \mu)], \quad 0 < \mu < 1. \quad (6.5)$$

Сначала решим соответствующую однородную краевую задачу

$$P^+(\mu) X^+(\mu) = P^-(\mu) X^-(\mu), \quad 0 < \mu < 1. \quad (6.6)$$

Метод решения таких задач был развит в работе [5], поэтому решение задачи (6.6) приведем без вывода,

$$X(z) = \begin{bmatrix} U(z) & \frac{r_0(\alpha)}{l(\alpha)} [U(z) - V(z)] & 0 \\ 0 & V(z) & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} [U(z) - V(z)] & U(z) \end{bmatrix},$$

где

$$U(z) = ze^{-u(z)}, \quad V(z) = ze^{-v(z)},$$

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\theta(u) - \pi}{u - z} du, \quad v(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\varepsilon(u; \alpha) - \pi}{u - z} du,$$

$$\theta(u) = \arg \lambda_c^+(u), \quad \theta(0) = 0, \quad \varepsilon(u; \alpha) = \arg \omega^+(u; \alpha), \quad \varepsilon(0; \alpha) = 0.$$

Вернемся к решению неоднородной задачи (6.5). Подставляя матрицу $P^+(\mu)$, найденную на основании (6.6), в (6.5), приходим к задаче определения аналитической вектор-функции по нулевому скачку. Общее решение этой задачи имеет вид

$$N(z) = -h_{as}(0, z) - A_0 h_{\eta_0}(0, z) + X(z) \left[\frac{1}{z - \eta_0} B + C \right], \quad (6.7)$$

где $B = [b_1 b_2 b_3]^t$, $C = [c_1 c_2 c_3]^t$ – векторы с произвольными элементами.

Неизвестная вектор-функция $A(\eta)$ находится из формулы Сохоцкого

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = \pi i \mu D(\mu^2) A(\mu), \quad 0 < \mu < 1, \quad (6.8)$$

после подстановки решения (6.7) в (6.8).

Решение (6.7) имеет простые полюсы в точке η_0 и в точке $z = \infty$, в то время как вектор-функция $N(z)$, введенная равенством (6.4), в точке η_0 является аналитической, а в точке $z = \infty$ исчезает ее первый (верхний) и третий (нижний) элементы, а второй элемент имеет конечный предел. Чтобы общее решение можно было принять в качестве вспомогательной функции (6.4), устраним указанные особенности общего решения и приравняем пределы у второго элемента в точке $z = \infty$. При этом получим

$$B = \frac{\eta_0 A_0}{2V(\eta_0)} \begin{bmatrix} -\frac{r_0(\alpha)}{l(\alpha)} \\ 1 \\ -\frac{\Delta_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1(\alpha)}{l(\alpha)r_0(\alpha)} \\ 2U - \frac{\Delta_1(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} k_t \\ -k_t \end{bmatrix}.$$

7. СКАЧКИ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ. АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ

Опуская громоздкие преобразования, приведем формулы для скачка температуры ε_t и для коэффициента ε_1 ,

$$\varepsilon_t(\alpha) = T_t(\alpha) k_t + T_u(\alpha) 2U, \quad \varepsilon_1(\alpha) = M_t(\alpha) k_t + M_u(\alpha) 2U,$$

где

$$T_t(\alpha) = U_1 - \frac{\Delta_1(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} T_u(\alpha), \quad T_u(\alpha) = \frac{\Delta_1(\alpha)}{\Delta(\alpha)} [V_1(\alpha) - U_1 - \eta_0],$$

$$M_t(\alpha) = -\frac{2r_2(\alpha)}{5r_0(\alpha)} U_1 - \frac{\Delta_1(\alpha)}{r_0^2(\alpha)} M_u(\alpha), \quad M_u(\alpha) = T_u(\alpha) \left[\frac{\Delta_3(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)} + \frac{3r_2(\alpha)}{5r_0(\alpha)} \right],$$

$$\Delta_3(\alpha) = r_0(\alpha) r_3(\alpha) - r_1(\alpha) r_2(\alpha), \quad U_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (\theta(u) - \pi) du = 0.71045 \dots,$$

$$V_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (\varepsilon(u, \alpha) - \pi) du.$$

Подставляя ε_1 в полученную выше формулу для скачка концентрации ε_n , приведем последнюю к виду

$$\varepsilon_n(\alpha) = N_t(\alpha)k_t + N_u(\alpha)2U,$$

где

$$\begin{aligned} N_t(\alpha) &= -\frac{3\Delta_0(\alpha)}{2r_0^2(\alpha)}U_1 - \frac{\Delta_1(\alpha)}{r_0^2(\alpha)}N_u(\alpha), \\ N_u(\alpha) &= T_u(\alpha)\frac{3s(\alpha)}{2r_0(\alpha)}\left(\frac{\Delta_3(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)} + \frac{r_0(\alpha)}{s(\alpha)}\right), \\ \Delta_0(\alpha) &= s(\alpha)r_2(\alpha) - r_0^2(\alpha). \end{aligned}$$

С помощью ε_1 и ε_t находится и величина скачка химического потенциала

$$\delta\alpha = \varepsilon_1(\alpha) + \left(\alpha - \frac{3r_2(\alpha)}{5r_0(\alpha)}\right)\varepsilon_t.$$

Зависимости кинетических коэффициентов T_t , T_u , N_t , N_u от величины химического потенциала α представлены на рис. 1–4.

Рис. 1

Рис. 2

Рассмотрим предельные случаи кинетических коэффициентов при $\alpha \rightarrow -\infty$ и $\alpha \rightarrow +\infty$. Находя пределы $\varepsilon_t(\alpha)$ и $\varepsilon_n(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow -\infty$, в точности получаем значения кинетических коэффициентов [5] для бoльцмановского газа.

В случае $\alpha \rightarrow +\infty$ для оценки интегралов, входящих в кинетические коэффициенты, воспользуемся асимптотической формулой (см. [8], с. 191, формула (58,1))

$$\int_0^\infty \frac{f(x) dx}{e^{x-\alpha} + 1} = \int_0^\alpha f(x) dx + \frac{\pi^2}{6}f'(\alpha) + \frac{7\pi^2}{360}f'''(\alpha) + \dots, \quad (7.1)$$

Рис. 3

Рис. 4

с помощью которой найдем, что $d(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow +\infty$; следовательно, $\eta_0(\alpha) \rightarrow 1$, $\alpha \rightarrow +\infty$, причем $\eta_0(-\infty) = 1 + 3 \cdot 10^{-40}$ [1]. На основании формулы (7.1) найдем, что при $\alpha \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} r_1(\alpha) &= \alpha^2 + \frac{\pi^2}{3} + \dots, & r_3(\alpha) &= \alpha^3 + \pi^2 \alpha + \dots, \\ \Delta(\alpha) &= \frac{\pi^2}{3} \left(\alpha^2 - \frac{\pi^2}{3} + \dots \right), & r_2(\alpha) &= \alpha^{5/2} + \frac{5}{8} \pi^2 \alpha^{1/2} + \dots, \\ r_0(\alpha) &= \alpha^{3/2} + \frac{1}{8} \pi^2 \alpha^{-1/2} + \dots, & s(\alpha) &= \alpha^{1/2} - \frac{1}{24} \pi^2 \alpha^{-1/2} + \dots, \\ \Delta_1(\alpha) &= \frac{1}{6} \pi^2 \left(\alpha^{3/2} - \frac{1}{4} \pi^2 \alpha^{-1/2} + \dots \right), & \Delta_3(\alpha) &= \frac{1}{6} \pi^2 \left(\alpha^{5/2} + \frac{1}{2} \pi^2 \alpha^{1/2} + \dots \right). \end{aligned}$$

С учетом этих равенств находим асимптотику кинетических коэффициентов при $\alpha \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} T_t(\alpha) &\approx U_1, & T_u(\alpha) &\approx -\frac{U_1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \\ N_t(\alpha) &\approx -\frac{3}{8} \pi^2 U_1 \frac{1}{\alpha^2}, & N_u(\alpha) &\approx -\frac{3U_1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

На рис. 2–4 последние три асимптотики изображены пунктиром.

Случай $\alpha \rightarrow +\infty$ соответствует случаю вырожденного ферми-газа. При этом использованное ранее введение безразмерной скорости газа $\tilde{\mathbf{u}}_* = \sqrt{m/(2kT_s)} \mathbf{u}_*$ становится неэффективным, так как энергия молекул определяется в этом случае не температурой газа, а величиной энергии Ферми. Более естественным будет введение безразмерной скорости $\tilde{\mathbf{u}} = \sqrt{m/(2\alpha)} \mathbf{u}_*$, что возможно только при $\alpha > 0$, т.е. не во всем диапазоне значений химического потенциала. При этом формулы для коэффициентов $T_u(\alpha)$, $N_u(\alpha)$ принимают вид $T_u^*(\alpha) = \sqrt{\alpha} T_u(\alpha)$, $N_u^*(\alpha) = \sqrt{\alpha} N_u(\alpha)$. Согласно приведенной выше асимптотике $T_u^*(\alpha) = -U_1/2$, $N_u^*(\alpha) = -3U_1/2$.

Из приведенных рисунков видно, что поведение кинетических коэффициентов принципиально различно в трех диапазонах. Например, для коэффициента $T_t(\alpha)$ (рис. 1) при $\alpha < -4$ наблюдается переход к классическому значению $T_t(-\infty) = 0.79$, а в случае $\alpha > 10$ наблюдается поведение, характерное для вырожденного ферми-газа, при этом $T_t(+\infty) = U_1 = 0.71045$. Область значений $-4 < \alpha < 10$ соответствует переходному режиму от классического к вырожденному ферми-газу.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00336).

Список литературы

- [1] К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1977.
- [2] М. Н. Коган. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967.
- [3] О. А. Коленчиц. Тепловая аккомодация систем газ – твердое тело. Минск: Наука и техника, 1977.
- [4] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ТМФ. 1993. Т. 95. № 3. С. 530.
- [5] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1996. Т. 1996. № 3. С. 140.
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 3(9). С. 956.
- [7] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ТМФ. 2001. Т. 129. № 3. С. 491.
- [8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976.
- [9] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2001.
- [10] К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
- [11] Т. А. Гермогенова. О полноте системы собственных функций характеристического уравнения теории переноса. Препринт № 103. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1976.
- [12] Ф. Д. Газов. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 14.XII.2001 г.,
после доработки 22.IV.2002 г.