Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, Спектральные свойства гамильтонианов заряженных систем в однородном магнитном поле. II. О структуре чисто точечного спектра, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 2, 273–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 09:04:44

© 2003 г.

Г. М. Жислин*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТониАНОВ ЗАРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. II. О СТРУКТУРЕ ЧИСТО ТОЧЕЧНОГО СПЕКТРА

На основе результатов предыдущей работы автора исследуется чисто точечный спектр операторов энергии $H(P_\Sigma)$ многочастичных заряженных квантовых систем в однородном магнитном поле при фиксации суммы P_Σ компонент псевдомомента системы. Доказано, что для систем с короткодействием при некоторых условиях (выполняющихся, например, для системы двух разноименно заряженных частиц) дискретный спектр $H(P_\Sigma)$ бесконечен даже в случае финитных потенциалов; для систем с далекодействием типа (+)-ионов любых атомов (включая и сами ионы) дискретный спектр бесконечен.

Ключевые слова: гамильтониан, однородное магнитное поле, спектральные свойства, относительное движение, псевдомомент.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа завершает начатое в статье [1] исследование спектра гамильтонианов H заряженных многочастичных систем $Z_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ в однородном магнитном поле. В [1] была установлена общая характеристика спектра и найдено положение *сплошного* спектра как при фиксированном значении суммы $P_\Sigma = P_x + P_y$ компонент псевдомомента, так и без такой фиксации¹⁾. В данной работе мы изучаем структуру чисто точечного спектра рассматриваемых гамильтонианов.

Основные результаты статьи [1] при фиксации P_Σ (или без нее) таковы.

1. Для систем с короткодействием доказано, что если граница μ сплошного спектра Z_1 определяется распадом $Z_2 = (C_1, C_2)$ системы Z_1 на два устойчивых кластера C_j и потенциалы взаимодействия V_{ij} частиц из разных кластеров неположительны и не все равны нулю, то дискретный (или чисто точечный бесконечно вырожденный) спектр

¹⁾ Фиксация P_Σ заменяет невозможное в общем случае отделение движения центра масс системы в плоскости x, y [2].

* Научно-исследовательский радиофизический институт, Н. Новгород, Россия.
E-mail: greg@nirfi.sci-nnov.ru

бесконечен даже при финитных потенциалах V_{ij} . Установлено, что причиной этого является бесконечное вырождение числа μ как собственного значения гамильтониана составной системы Z_2 . Показано, что вышеупомянутые условия выполнены для системы двух частиц с зарядами e_1 и e_2 , если $e_1 + e_2 \neq 0$, $e_1 e_2 < 0$.

2. Для систем с длиннодействием типа (+)-ионов любых атомов (включая и сами ионы) доказана бесконечность дискретного (или чисто точечного бесконечно вырожденного) спектра.

Мы будем рассматривать только случай фиксированного значения P_Σ , после чего результаты без фиксации P_Σ получаются автоматически применением теоремы 2.1 из работы [1]. Доказательство утверждений 1 и 2 при фиксированном P_Σ состоит в построении для всех натуральных m таких подпространств L_m размерности m , что на любой нормированной функции $\psi \in L_m$ выполняется $(H\psi, \psi) < \mu$. Данное построение основано на том, что граница μ сплошного спектра H является собственным значением оператора энергии распавшейся системы. Для систем с короткодействием этот факт при $n > 2$ постулируется, для случая длиннодействия мы его доказываем. Именно в этом доказательстве преодолеваются главные трудности работы, ибо оно приводит к необходимости рассмотрения цепочки операторов, отвечающих составным системам и получаемых из Z_1 последовательным удалением “электронов”, причем для каждого из таких операторов требовалось найти положение сплошного спектра (в работе [1] такие операторы не изучались, за исключением первого оператора цепочки) и доказать, что нижняя граница каждого из них есть собственное значение.

Ранее какие-либо результаты о дискретном и чисто точечном спектре гамильтонианов заряженных систем в однородном магнитном поле отсутствовали как при фиксации какой-либо компоненты псевдомомента или суммы компонент P_Σ , так и без нее. Часть утверждений работы была анонсирована в статье [3].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Рассмотрим квантовую систему $Z_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ из n частиц в однородном магнитном поле $\mathcal{F} \in (0 \div 0.2B)$, где $B > 0$ — произвольная константа. Пусть $m_i, e_i, r_i = (x_i, y_i, z_i)$ — масса, заряды радиус-вектор i -й частицы, $r_{st} = r_s - r_t$, $V_{st}(r_{st})$ — потенциал взаимодействия частиц s и t между собой. Будем считать всюду, что

$$\begin{aligned} V_{st}(-r_1) &= V_{st}(r_1) = \overline{V}_{st}(r_1); & V_{st}(r_1) &\in \mathcal{L}_{2,loc}(R^3); \\ V_{st}(r_1) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |r_1| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть $M = \sum_{j=1}^n m_j$, $r_c = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}) = \sum_{j=1}^n m_j r_j M^{-1}$. Если ввести в гамильтониане $\mathcal{H}$ системы Z_1 [1] относительные координаты $q_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}) = r_j - r_c$, координаты $\xi_0 = (1/2)(\alpha_{01} - \alpha_{02})$, $\eta_0 = (1/2)(\alpha_{01} + \alpha_{02})$, $\zeta_0 = \alpha_{03}$ и отделить движение центра масс Z_1 в направлении поля, то получим оператор

$$\mathcal{H}_0 = T_\perp + T_{03} + V(q), \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{\perp} &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^2 m_j^{-1} \left\{ B_{jp} + \frac{m_j}{2Mi} \left[\frac{\partial}{\partial \eta_0} - (-1)^p \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{p+1} B e_j q_{j\bar{p}} + B e_j [(-1)^{p+1} \eta_0 - \xi_0] \right\}^2, \\
 T_{03} &= \sum_{j=1}^n m_j^{-1} B_{j3}^2, \quad B_{jp} = \frac{1}{i} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{sp}} (\delta_{sj} - m_j M^{-1}), \\
 \bar{p} &= 1 \quad \text{при } p = 2, \quad \bar{p} = 2 \quad \text{при } p = 1; \\
 V(q) &= \frac{1}{2} \sum_{s,t=1, s \neq t}^n V_{st}(q_s - q_t), \quad q = (q_1, \dots, q_n).
 \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{H}_0$ рассматривается в пространстве $\overline{R}_0^{(3n-1)} = \{q, \xi_0, \eta_0\}$. Согласно работе [1] $\mathcal{H}_0$ унитарно эквивалентен оператору

$$\mathcal{H}_0(\lambda_0) = T_{\perp}(\lambda_0) + T_{03} + V(q), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{\perp}(\lambda_0) &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^2 \frac{1}{m_j} \left(A_{jp}^{(0)} + h_{jp0} + \frac{m_j}{2M} \lambda_0 \right)^2, \quad h_{jp0} = \frac{m_j}{2Mi} (-1)^{p+1} \frac{\partial}{\partial \xi_0} - F_j \xi_0, \\
 A_{jp}^{(0)} &= B_{jp} - m_j (2M)^{-1} D_{-} - (-1)^p B e_j q_{j\bar{p}}, \quad D_{\pm} = D_{\pm}(q) = B \sum_{j=1}^n e_j (q_{j1} \pm q_{j2}), \\
 F_j &= B Q m_j M^{-1} + B e_j.
 \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ будет рассматриваться как в пространстве $R_0^{(3n-1)} = \{q, \xi_0, \lambda_0\}$, так и в $R_0^{(3n-2)} = \{q, \xi_0\}$ при фиксированном λ_0 . В последнем случае вместо $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ мы будем писать $\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0)$. Операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0(\lambda_0)$ и $\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0)$, определенные на C_0^2 , полуограничены снизу соответственно в $\mathcal{L}_2(\overline{R}_0^{(3n-1)})$, $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-1)})$ и $\mathcal{L}_2(R_0^{(3n-2)})$. Расширим их до самосопряженных, сохраняя прежние обозначения. Для произвольного оператора L обозначим через $\sigma_p(L)$, $\sigma_{pp}(L)$, $\sigma_d(L)$, $\sigma_{\text{ess}}(L)$ и $\sigma(L)$ соответственно точечный, чисто точечный, дискретный, существенный и полный спектры оператора L . Пусть $H = \hat{\mathcal{H}}_0(0)$. Согласно теореме 2.1 работы [1] $\sigma(\hat{\mathcal{H}}_0(\lambda_0))$ не зависит от λ_0 и $\sigma(\mathcal{H}_0(\lambda_0)) = \sigma(H)$, но каждая точка ν из $\sigma(\mathcal{H}_0(\lambda_0))$ имеет дополнительное бесконечное вырождение по сравнению с этой же точкой в $\sigma(H)$. Поэтому далее мы будем изучать спектр оператора H .

2.2. Пусть $Z_k = (C_1, \dots, C_k)$ — разбиение Z_1 на k , $2 \leq k \leq n$, не взаимодействующих между собой кластеров C_j , $Z_1 = \bigcup_{j=1}^k C_j$, $C_j \cap C_i = \emptyset$, $j \neq i$. Положим

$$H(Z_k) = H - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^k \sum_{s \in C_i, t \in C_j} V_{st}(q_s - q_t). \quad (2.4)$$

Далее считаем $Z_k = Z_2 = (C_1, C_2)$ и положим $M_j = \sum_{s \in C_j} m_s$, $Q_j = \sum_{s \in C_j} e_s$, $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3}) = \sum_{s \in C_j} m_s q_s M_j^{-1}$. Введем в каждом кластере C_j относительные координаты $q_s^{(1)} = q_s - \alpha_j$ при $s \in C_j$ и, кроме того, координаты

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{11} - \alpha_{12}), \quad \eta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{12}), \quad \zeta_1 = \alpha_{13} - \alpha_{23}.$$

Тогда в новых координатах оператор $H(Z_2)$ запишется в виде [1]

$$H(Z_2) = H_0(Z_2) - M M_1^{-1} M_2^{-1} \frac{d^2}{d\zeta_1^2}, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} H_0(Z_2) &= \sum_{k=1}^2 (T_\perp[C_k] + T_{03}[C_k] + V[C_k]), \\ T_\perp[C_k] &= \sum_{j \in C_k} \sum_{p=1}^2 \frac{1}{m_j} \left\{ \tilde{A}_{jp}(k) + h_{jp0} - (-1)^k \frac{m_j M_2}{2i M M_k} \left((-1)^{p+1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + B e_j (-1)^k M_1 M_k^{-1} (\xi_1 + (-1)^p \eta_1) - m_j M^{-1} M_2^{-1} (Q_1 M_2 - Q_2 M_1) \xi_1 B \right\}^2, \\ T_{03}[C_k] &= \sum_{j \in C_k} m_j^{-1} B_{j3}^2(k), \quad V[C_k] = \frac{1}{2} \sum_{s, t \in C_k, s \neq t} V_{st} (q_s^{(1)} - q_t^{(1)}), \\ \tilde{A}_{jp}(k) &= B_{jp}(k) - m_j (2M)^{-1} D_-(q^{(1)}) - (-1)^p B e_j q_{j\bar{p}}^{(1)}, \quad p = 1, 2, \\ B_{jp}(k) &= \frac{1}{i} \sum_{s \in C_k} \frac{\partial}{\partial q_{sp}^{(1)}} (\delta_{sj} - m_j M_k^{-1}). \end{aligned}$$

Оператор $H_0(Z_2)$ определен в пространстве $\overline{R}_0^{(3n-3)} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1, \eta_1\}$. Наряду с ним рассмотрим действующий в пространстве $R_0^{(3n-3)} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1, \lambda_1\}$ оператор

$$H_0(Z_2, \lambda_1) = \sum_{k=1}^2 (T[C_k, \lambda_1] + V[C_k]), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} T[C_k, \lambda_1] &= T_\perp[C_k, \lambda_1] + T_{03}[C_k], \\ T_\perp[C_k, \lambda_1] &= \sum_{j \in C_k} \sum_{p=1}^2 m_j^{-1} \left\{ A_{jp}(k) + \sum_{s=0}^1 h_{jps}(k) + (-1)^{k+1} m_j M_2 (2M_k M)^{-1} \lambda_1 \right\}^2, \\ A_{jp}(k) &= B_{jp}(k) - m_j (2M_k)^{-1} D_-(q^{(1)}, k) + (-1)^{p+1} e_j q_{j\bar{p}}^{(1)} B, \\ D_-(q^{(1)}, k) &= B \sum_{t \in C_k} (q_{t1}^{(1)} - q_{t2}^{(1)}), \quad h_{jp0}(k) = (-1)^{p+1} \frac{1}{i} \frac{m_j}{2M} \frac{\partial}{\partial \xi_0} - F_j(k) \xi_0, \\ h_{jp1}(k) &= (-1)^k \frac{M_1}{M_k} \left(\frac{1}{2i} \frac{M_2 m_j}{M_1 M} (-1)^p \frac{\partial}{\partial \xi_1} + F_j(k) \xi_1 \right), \\ F_j(k) &= B e_j + Q_k M_k^{-1} B m_j, \end{aligned}$$

λ_1 — одномерная переменная.

Согласно результатам работы [1] $H_0(Z_2)$ унитарно эквивалентен $H_0(Z_2, \lambda_1)$. Если оператор $H_0(Z_2, \lambda_1)$ будет рассматриваться в пространстве $R_0^{(3n-4)} = \{q^{(1)}, \xi_0, \xi_1\}$ при фиксированном λ_1 , то мы обозначим его через $\hat{H}_0(Z_2, \lambda_1)$. В силу теоремы 2.3 из работы [1] спектр $\sigma(\hat{H}_0(Z_2, \lambda_1))$ не зависит от λ_1 и $\sigma(H_0(Z_2)) = \sigma(\hat{H}_0(Z_2, 0))$, но спектр $\sigma(H_0(Z_2))$ имеет дополнительное бесконечное вырождение по сравнению со спектром $\sigma(\hat{H}_0(Z_2, 0))$ и, в частности, любая точка $\nu \in \sigma_p(\hat{H}_0(Z_2, 0))$ есть бесконечно вырожденное собственное значение оператора $H_0(Z_2)$. Пусть

$$\mu := \min_{Z_2} \inf H_0(Z_2) \equiv \min_{Z_2} \inf \hat{H}_0(Z_2, 0).$$

В силу теоремы 2.2 из работы [1] $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_0) = [\mu, +\infty)$.

2.3. ТЕОРЕМА 2.1. Пусть существует такое $Z_2 = (C_1, C_2)$, что

$$\mu \in \sigma_p(\hat{H}_0(Z_2, 0)); \quad Q_1 Q_2 \neq 0; \quad V_{st}(r_1) \leq 0; \quad V_{st}(r_1) \neq 0 \quad (2.7)$$

для любых s, t , $s \in C_1$, $t \in C_2$. Тогда дискретный спектр оператора H бесконечен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условия (2.7) выполняются, например, для находящейся в однородном магнитном поле заряженной ($Q \neq 0$) системы $Z_1 = \{1, 2\}$ двух не нейтральных частиц с потенциалом $V_{12}(r_1) \leq 0$, $V_{12}(r_1) \neq 0$, ибо для этой системы существует единственное распадение $Z_2 = \{(1), (2)\}$ и, значит, оператор $\hat{H}_0(Z_2, 0)$ имеет чисто точечный спектр (совокупность орбит Ландау). Таким образом, для рассматриваемой системы Z_1 спектр $\sigma_d(H)$ будет бесконечным и при короткодействующем, и даже при финитном потенциале V_{12} . Причина этого — в бесконечном вырождении собственного значения μ оператора $H_0(Z_2)$. Те же причины имеют место и в произвольных n -частичных системах с $n > 2$ при выполнении условий (2.7) и короткодействующих потенциалах $V_{st}(r_1)$, $s \in C_1$, $t \in C_2$. В случае же длиннодействующих потенциалов бесконечность спектра $\sigma_d(H)$ в условиях теоремы 2.1 обуславливается не только тем, что собственное подпространство $\mathcal{U}_\mu$ оператора $H_0(Z_2)$, отвечающее его собственному значению μ , бесконечномерно, но и тем, что каждая функция из $\mathcal{U}_\mu$ порождает свою бесконечную серию дискретных собственных значений оператора H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Вместо условия $V_{st}(r_1) \leq 0$ для справедливости теоремы 2.1 можно потребовать выполнения следующего более слабого (но трудного для проверки) условия: в подпространстве $\mathcal{U}_\mu$ для любого $N > 0$ должно существовать такое подпространство L_N , $\dim L_N \geq N$, что для всех $u \in L_N$, $u \neq 0$, выполняется неравенство

$$\sum_{s \in C_1, t \in C_2} \int V_{st}(q_s - q_t) |u|^2 dq^{(1)} d\xi_0 d\eta_0 d\zeta_1 < 0. \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Автор считает, что если Z_1 не содержит нейтральных подсистем и условие $V_{st}(r_1) \leq 0$ выполняется для всех s, t , то для всех Z_2 выполняется первое из условий (2.7), т.е. спектр $\sigma_d(H)$ бесконечен, однако это пока не доказано.

2.4. Рассмотрим теперь систему $Z_1^+ = \{1, 2, \dots, n\}$ типа положительного атомарного иона. Пусть

$$\begin{aligned} V_{ij}(r_1) &= e_i e_j |r_1|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < \frac{3}{2}; \\ e_j &= e < 0, \quad m_j = m, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad e_1 > -(n-1)e. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Дискретный спектр гамильтониана H системы Z_1^+ бесконечен.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. При $\gamma = 1$ теорема 2.1 из работы [1] и теорема 2.2 обеспечивают бесконечность числа связанных состояний (+)-ионов произвольных атомов при любом фиксированном значении суммы компонент псевдомомента.

2.5. Из полученных выше результатов о спектре оператора H и из теорем 2.1 и 2.2 работы [1] вытекает следующее утверждение о спектре оператора $\mathcal{H}_0$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Спектр $\sigma(\mathcal{H}_0)$ состоит из всех точек луча $[\mu, +\infty)$ и (при выполнении условий (2.7) или (2.9)) из бесконечного числа бесконечно вырожденных собственных значений, накапливающихся к числу μ слева.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 2.1 И 2.2

3.1. Докажем сначала теорему 2.1. Раз $\mu \in \sigma_p(\hat{H}_0(Z_2, 0))$, то в силу теоремы 2.3 из работы [1] μ – бесконечно вырожденное собственное значение оператора $H_0(Z_2)$. Пусть $\mathcal{U}_\mu$ – отвечающее μ бесконечномерное собственное подпространство оператора $H_0(Z_2)$; $u_j = u_j(q^{(1)}, \xi_0, \xi_1, \eta_1)$, $j = 1, 2, \dots$, – бесконечная система ортонормированных функций из $\mathcal{U}_\mu$, $I_{Z_2} = I_{Z_2}(q) = V(q) - V[C_1] - V[C_2]$. Рассмотрим функционал

$$J[d] = \int \left| \sum_{i=1}^m d_i u_i \right|^2 I_{Z_2}(q) d\Omega,$$

где $d = (d_1, \dots, d_m)$, d_i – любые числа, $|d|^2 = \sum_{i=1}^m |d_i|^2 = 1$, $d\Omega = dq^{(1)} d\xi_0 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$, $m > 0$ – произвольное натуральное число. При выполнении третьего из условий (2.7) верно, что

$$2\alpha := \max_{d, |d|=1} J_0[d] < 0. \quad (3.1)$$

Пусть $f_k(\tau) = 1$ при $|\tau| \leq k$, $f_k(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq 2k$,

$$f_k(\tau) = 1 - 3(\tau - k)^2 k^{-2} + 2(\tau - k)^3 k^{-3}$$

при $k \leq \tau \leq 2k$, $f_k = f_k(\zeta_1)$, $f_{m,k} = (\sum_{i=1}^m d_i u_i) f_k$,

$$J_k[d] = \int |f_{m,k}|^2 I_{Z_2} d\Omega.$$

Очевидно, что при $|d| = 1$ и фиксированном m равномерно по d

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k[d] = J[d] \leq 2\alpha, \quad (3.2)$$

поэтому при любых значениях m и $|d| = 1$ существует $\bar{k} = \bar{k}(m)$ такое, что при $k > \bar{k}$

$$J_k[d] \leq \alpha < 0. \quad (3.3)$$

Вычислим величину $L[f_{m,k}] = (Hf_{m,k}, f_{m,k}) \|f_{m,k}\|^{-2}$. В силу (2.4), (2.5) и так как $\|f_{m,k}\| = |d| \|f_k\| = \|f_k\|$, выполняется равенство

$$L[f_{m,k}] = \mu + \left(\frac{M}{M_1 M_2} \left\| \frac{df_k}{d\zeta_1} \right\|^2 + \int I_{Z_2}(q) |f_{m,k}|^2 d\Omega \right) \|f_k\|^{-2}. \quad (3.4)$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \|df_k/d\zeta_1\| = 0$, то существует k_1 такое, что $M(M_1 M_2)^{-1} \|df_k/d\zeta_1\| \leq (1/2)|\alpha|$ при $k > k_1$. Отсюда и из условия (3.3) следует, что при $k > k_1 + \bar{k}$

$$L[f_{m,k}] \leq \mu + \frac{1}{2} \alpha \|f_k\|^{-2} < \mu. \quad (3.5)$$

Фиксируем какое-либо k , $k > k_1 + \bar{k}$. Тогда из (3.5) следует, что на любой нормированной функции $f_{m,k}$ из m -мерной линейной оболочке $\mathcal{L}\{u_1 f_k, u_2 f_k, \dots, u_m f_k\}$ квадратичная форма оператора H меньше μ . Значит, размерность линейной оболочке собственных функций дискретного спектра H , лежащего слева от μ , не меньше m . Так как m произвольно, то теорема 2.1 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2.2 проведем в предположении, что при $Z_2 = \{(1, 2, \dots, n-1), (n)\}$

$$\mu \in \sigma_p(H_0(Z_2)), \quad (3.6)$$

а потом докажем, что это предположение верно (п. 3.4 и раздел 4). Заметим, что именно в проверке условия (3.6) заключается основная трудность доказательства теоремы 2.2. Итак, пусть (3.6) верно, u – нормированная собственная функция оператора $H_0(Z_2)$, отвечающая его собственному значению μ , m – фиксированное натуральное число, $g_{i1}(\zeta_1)$, $i = 1, \dots, m$, – произвольные ортонормированные в $\mathcal{L}_2(R^1)$ функции из C_0^2 , $\text{supp } g_{i1}(\zeta_1) \subseteq [1, 2]$, $k > 0$ – любое число, $g_{ik} := g_{i1}(k\zeta_1)k^{1/2}$. Пусть $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}\{ug_{1k}, ug_{2k}, \dots, ug_{mk}\}$. Очевидно, что функции g_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$, ортонормированы и $\dim \mathcal{L}_k = m$. Докажем, что при малых k для всех функций v_k из $\mathcal{L}_k$, $\|v_k\| = 1$, выполняется неравенство

$$(Hv_k, v_k) < \mu. \quad (3.7)$$

Отсюда, так же как из неравенства (3.5) при доказательстве теоремы 2.1, будет следовать, что спектр $\sigma_d(H)$ бесконечен.

3.3. Так как $v_k \in \mathcal{L}_k$, то $v_k = g_k u$, где $g_k = \sum_{i=1}^m d_i g_{ik}$, $d = (d_1, \dots, d_m)$ – любые числа. Всюду считаем, что $|d|^2 := \sum_{i=1}^m |d_i|^2 = 1$; тогда $\|v_k\| = \|g_k\| = |d| = 1$. В силу (2.4) и (2.5)

$$(Hv_k, v_k) = \mu + M M_1^{-1} M_2^{-1} \left\| \frac{dg_k}{d\zeta_1} \right\|^2 + L_k(d), \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} L_k(d) &= \sum_{s=1}^{n-1} e_s e J_{sk}(d), \quad J_{sk}(d) = \int |v_k|^2 |P_s|^{-\gamma} d\Omega, \\ P_s &= (P_{s1}, P_{s2}, P_{s3}) = q_s - q_n = \\ &= (q_{s1}^{(1)} + m^{-1} M(\xi_1 + \eta_1), q_{s2}^{(1)} + m^{-1} M(\eta_1 - \xi_1), q_{s3}^{(1)} + \zeta_1), \\ d\Omega &= dq^{(1)} d\xi_0 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1, \quad dq^{(1)} = dq_1^{(1)} \dots dq_{n-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли формулы (2.11) из работы [1] и тот факт, что $q_n^{(1)} = (0, 0, 0)$. Покажем, что при всех d , $|d| = 1$, и малых k

$$L_k(d) \leq Q_1 e \beta k^\gamma, \quad (3.9)$$

где $Q_1 = e_1 + (n-2)e > 0$, $\beta > 0$ и не зависит от k и d при $|d| = 1$. Делая замену переменных $\tau = k\zeta_1$ в $J_{sk}(d)$ и в $\|dg_k/d\zeta_1\|^2$, получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dg_k}{d\zeta_1} \right\|^2 &= k^2 \left\| \frac{dg_1}{d\tau} \right\|^2 = k^2 \beta_0, \\ J_{sk}(d) &= k^\gamma \int |v_1|^2 [k^2 (P_{s1}^2 + P_{s2}^2) + (kq_{s3}^{(1)} + \tau)^2]^{-\gamma/2} d\Omega_\tau, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где β_0 — константа, не зависящая от d и k , $d\Omega_\tau = dq^{(1)} d\xi_0 d\xi_1 d\eta_1 d\tau$. Можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 > 0$ такое, что при $k < k_0$ и всех d , $|d| = 1$, верно

$$\left| e_s e J_{sk}(d) k^{-\gamma} - e_s e \int |g_1(\tau)|^2 |\tau|^{-\gamma} d\tau \right| < \varepsilon.$$

Поэтому при $k < k_0$

$$L_k(d) < k^\gamma Q_1 e \int |g_1(\tau)|^2 |\tau|^{-\gamma} d\tau + k^\gamma (n-1)\varepsilon. \quad (3.11)$$

Так как функции g_{i1} линейно независимы, то

$$2\beta := \min_{d, |d|=1} \int \left| \sum_{i=1}^m d_i g_{i1} \right|^2 |\tau|^{-\gamma} d\tau > 0.$$

Выбрав в (3.11) $\varepsilon < \beta(n-1)^{-1}$, получаем из этого неравенства выражение (3.9). Подставляя в (3.8) оценки (3.9), (3.10), приходим к неравенству

$$(Hv_k, v_k) \leq \mu + k^2 \beta_0 M M_1^{-1} M_2^{-1} + Q_1 e \beta k^\gamma.$$

Так как $Q_1 e < 0$, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 3/2$, то при малых k отсюда следует выражение (3.7). Таким образом, в предположении (3.6) теорема 2.2 доказана.

3.4. Пусть $Z_2 = \{(1, 2, \dots, n-1), (n)\}$. Прежде чем доказывать (3.6), заметим, что поскольку для рассматриваемой системы $V_{ij} > 0$ при $i, j \geq 2$, то для любого разбиения $Z'_2 = (C'_1, C'_2)$ системы Z_1 выполняется неравенство $\inf H_0(Z'_2) \geq \inf H_0(Z_2)$ и, значит, $\mu = \inf H_0(Z_2) = \inf \hat{H}_0(Z_2, 0)$. В силу утверждения теоремы 2.3 из работы [1] для доказательства (3.6) достаточно показать, что $\mu \in \sigma_d(\hat{H}_0(Z_2, 0))$, для чего надо установить неравенство

$$\mu < \mu(Z_2) = \inf \{\nu \mid \nu \in \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_0(Z_2, 0))\}. \quad (3.12)$$

Для доказательства (3.12) рассмотрим последовательность разбиений $Z_{k+1} = (C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \dots, C_{k+1}^{(k)})$, где $C_1^{(k)} = (1, 2, \dots, n-k)$, $C_s^{(k)} = (n+s-k-1)$, $s = 2, \dots, k+1$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Z_{k+1} — разбиение исходной системы Z_1^+ на (+)-ион с зарядом $e_1 + e(n-k+1)$ и не взаимодействующие с ним и между собой k электронов с номерами $n+s-k-1$, $s = 2, 3, \dots, k+1$. Введем относительные координаты частиц в кластере $C_1^{(k)}$ последовательно для $k = 1, 2, \dots, n-1$:

$$q_j^{(k)} = q_j^{(k-1)} - \sum_{s=1}^{n-k} \frac{m_s q_s^{(k-1)}}{M^{(k)}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-k, \quad (3.13)$$

где $M^{(s)} = M - sm$ — масса частиц кластера $C_1^{(s)}$, $0 \leq s \leq n-1$, $q_j^{(0)} = q_j$. Сопоставим составной системе Z_{k+1} оператор

$$H_0^{(k)} = T_{0\perp}^{(k)} + T_{03}^{(k)} + T_{c\perp}^{(k)} + V^{(k)}, \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} T_{0\perp}^{(k)} &= \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{p=1}^2 m_j^{-1} \left(A_{jp}^{(k)} - \sum_{s=0}^k h_{jps}^{(k)} \right)^2, \quad T_{c\perp}^{(k)} = \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^2 \ell_{ps}^2 m^{-1}, \\ T_{03}^{(k)} &= \sum_{j=1}^{n-k} (B_{j3}^{(k)})^2 \frac{1}{m_j}, \\ A_{jp}^{(k)} &= B_{jp}^{(k)} + (-1)^{p+1} B e_j q_{j\bar{p}}^{(k)} - m_j (2M^{(k)})^{-1} D_-^{(k)}, \\ B_{jp}^{(k)} &= \sum_{s=1}^{n-k} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q_{sp}^{(k)}} \left(\delta_{js} - \frac{m_j}{M^{(k)}} \right), \\ \ell_{ps} &= M^{(s)} m^{-1} h_{ps} - \sum_{\tau=0}^{s-1} h_{p\tau}, \quad h_{jps}^{(k)} = (-1)^p \frac{M_{j,s}}{2i} \frac{\partial}{\partial \xi_s} + F_j^{(k)} \xi_s, \\ D_-^{(k)} &= B \sum_{j \in C_1^{(k)}} e_j (q_{j1}^{(k)} - q_{j2}^{(k)}), \\ h_{ps} &= (-1)^p \frac{M_{n,s}}{2i} \frac{\partial}{\partial \xi_s} + 2e\xi_s, \quad M_{j,s} = \frac{mm_j}{M^{(s-1)}M^{(s)}}, \quad M^{(-1)} \equiv m, \\ F_j^{(k)} &= B e_j + B m_j Q^{(k)} (M^{(k)})^{-1}, \quad Q^{(s)} = Q - s e, \\ V^{(k)} &= \frac{1}{2} \sum_{s,t=1; s \neq t}^n e_s e_t |q_s^{(k)} - q_t^{(k)}|^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Отметим, что операторы $h_{jps}^{(k)}$ при $j \geq 2$ не зависят от j в силу тождественности электронов.

Пусть

$$\mu^{(k+1)} = \inf H_0^{(k+1)}.$$

В разделе 4 будет доказана

ТЕОРЕМА 3.1. *Для всех k , $k = 1, 2, \dots, n-2$, $\sigma_{\text{ess}}(H_0^{(k)}) \subseteq [\mu^{(k+1)}, +\infty)^2$. Если $\mu^{(k+1)} \in \sigma_p(H_0^{(k+1)})$, то*

$$\inf H_0^{(k)} < \mu^{(k+1)}. \quad (3.15)$$

Из теоремы 3.1 элементарно следует выполнение условия (3.6). Действительно, по построению спектр оператора $H_0^{(n-1)}$ является чисто точечным, так как может содержать только точки, отвечающие орбитам Ландау исходной n -частичной системы. Значит, $\mu^{(n-1)} \in \sigma_p(H_0^{(n-1)})$. Тогда в силу неравенства (3.15) $\mu^{(n-2)} \in \sigma_p(H_0^{(n-2)})$. Если $n-1 > 2$, то, применяя теорему 3.1 при $k+1 = n-3$, получаем, что $\mu^{(n-3)} \in \sigma_p(H_0^{(n-3)})$, и т.д. Таким образом последовательно мы приходим к неравенству $\mu^{(1)} < \mu^{(2)} = \inf H_0^{(2)}$. Но $\mu^{(1)} = \mu$, так как $H_0^{(1)} = \hat{H}_0(Z_2, 0)$. Поэтому неравенство $\mu^{(1)} < \mu^{(2)}$ — это неравенство (3.12), из которого и следует (3.6). Таким образом, теорему 2.2 можно считать доказанной, если верна теорема 3.1.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

4.1. Сначала в п. 4.1–4.3 мы приведем ту часть доказательства теоремы 3.1, которая нужна для обоих ее утверждений; непосредственные доказательства их даны соответственно в п. 4.4 и 4.5.

Пусть k фиксировано, $r = k+1$ и разбиение $Z_{r+1} = (C_1^{(r)}, \dots, C_{r+1}^{(r)})$ получено из Z_r удалением из $C_1^{(k)}$ электрона с номером $(n-k)$, т.е. $C_1^{(r)} = (1, 2, \dots, n-r)$, $C_s^{(r)} = n+s-r-1$, $s = 2, \dots, r+1$. Положим

$$F = H_0^{(k)} - \sum_{s=1}^{n-r} e_s e |q_s^{(k)} - q_{n-k}^{(k)}|^{-\gamma}. \quad (4.1)$$

Перейдем в операторе F к новым координатам аналогично тому, как мы это делали в п. 2.2 с той, однако, разницей, что роль исходной системы Z_1 играет кластер $C_1^{(k)}$, роль кластеров C_1, C_2 — кластеры $C_1^{(r)}, C_2^{(r)}$, и относительные координаты в кластере $C_2^{(r)}$ не вводятся, так как он одночастичный. Итак, пусть

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= (\alpha'_{11}, \alpha'_{12}, \alpha'_{13}) = \sum_{s=1}^{n-r} \frac{m_s q_s^{(k)}}{M^{(r)}}, & \alpha'_2 &= q_{n-k}^{(k)}, & q'_j &= q_j^{(k)} - \alpha'_1, & j &\in C_1^{(r)}, \\ \xi' &= \xi_r = \frac{\alpha'_{11} - \alpha'_{12}}{2}, & \eta' &= \eta_r = \frac{\alpha'_{11} + \alpha'_{12}}{2}, & \zeta' &= \zeta_r = \alpha'_{13} - \alpha'_{23}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

²⁾ Можно доказать, что здесь вместо включения справедливо равенство, но для данной работы это не существенно.

Так как $M^{(r)}\alpha'_1 + m\alpha'_2 = \sum_{j \in C_1^{(k)}} m_j q_j^{(k)} = 0$, то $\alpha'_2 = -M^{(r)}m^{-1}\alpha'_1$. С учетом этого старые переменные $q_{jp}^{(k)}$, $j = 1, \dots, n-k$, $p = 1, 2, 3$, и новые $q_{jp}^{(r)} \equiv q'_{jp}$, $j = 1, \dots, n-r$, $p = 1, 2, 3$, ξ' , η' , ζ' связаны соотношениями

$$\begin{aligned} q_{jp}^{(k)} &= q'_{jp} + (\eta' - (-1)^p \xi'), \quad j = 1, 2, \dots, n-r, \\ q_{n-k,p}^{(k)} &= M^{(r)}m^{-1}((-1)^p \xi' - \eta'), \quad p = 1, 2, \\ q_{j3}^{(k)} &= q'_{j3} + \frac{m\zeta'}{M^{(k)}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-r, \quad q_{n-k,3}^{(k)} = \frac{m\zeta'}{M^{(k)}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отметим, что переменные $\xi^{(s)} = (\xi_0, \dots, \xi_s)$, $s = k$, в замене не участвуют и остаются без изменений. В силу (4.1)–(4.3) оператор F можно записать в виде

$$F = F_0 + F_c, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} F_0 &= \sum_{p=1}^2 \left\{ \sum_{j=1}^{n-r} m_j^{-1} \left[B_{jp}^{(r)} - (-1)^p B e_j q'_{j\bar{p}} - m_j (2M^{(k)})^{-1} D_-^{(r)} + \right. \right. \\ &\quad + \frac{M_{j,r}}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \eta'} - (-1)^p \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) - e_j (\xi' + (-1)^p \eta') B - \\ &\quad \left. \left. - m_j \xi' (mQ^{(r)} - eM^{(r)}) \frac{B}{mM^{(k)}} - \sum_{s=0}^k h_{jps}^{(k)} \right]^2 + \right. \\ &\quad + \left[\frac{m}{2M^{(k)}i} \left((-1)^p \frac{\partial}{\partial \xi'} - \frac{\partial}{\partial \eta'} \right) + eM^{(r)} B (\xi' + \eta' (-1)^p) m^{-1} - \frac{mD_-^{(r)}}{2M^{(k)}} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \xi' B \frac{Q^{(r)}m - eM^{(r)}}{M^{(k)}} - \sum_{s=1}^k h_{nps}^{(k)} \right]^2 \right\} + T_{c\perp}^{(r)} + T_{03}^{(r)} + V^{(r)}; \\ F_c &= -\frac{M^{(k)}}{mM^{(r)}} \frac{d^2}{d\zeta'^2}. \end{aligned}$$

4.2. Подберем теперь линейную комбинацию ω_k переменных $q_{tp}^{(r)}$, ξ_s так, чтобы оператор

$$\tilde{F}_0 := e^{i\omega_k \eta'} F_0 e^{-i\omega_k \eta'} \quad (4.5)$$

не содержал членов вида $s\eta'$, а потом положим

$$H_0^{(r)}(\lambda') = \int \tilde{F}_0 e^{-i\eta' \lambda'} d\eta', \quad (4.6)$$

где $\lambda' \in R^1$ и оператор (4.6) рассматривается в пространстве $R^{(3n-2r-1)} = \{q^{(r)}, \xi_0, \dots, \xi_r, \lambda'\}$. Весьма громоздкие вычисления показывают, что при

$$\omega_k = D_-^{(r)} + 2 \sum_{s=0}^k \xi_s (Q^{(r)}m - M^{(r)}e) + 2\xi' m^{-2} (Q^{(r)}m^2 + e(M^{(r)})^2)$$

оператор $\tilde{F}_0$ действительно не будет содержать членов cn' , а оператор (4.6) будет иметь вид

$$H_0^{(r)}(\lambda') = \sum_{j=1}^{n-r} \sum_{p=1}^2 m_j^{-1} \left[A_{jp}^{(r)} - \sum_{s=0}^r h_{jp}^{(r)} + \frac{1}{2} M_{j,r} \lambda' \right]^2 + \\ + m^{-1} \sum_{s=1}^r \sum_{p=1}^2 \left(\ell_{ps} - \delta_{s,r} \frac{m \lambda'}{2M^{(k)}} \right)^2 + T_{03}^{(r)}. \quad (4.7)$$

По построению F_0 унитарно эквивалентен $H_0^{(r)}(\lambda')$, если эти операторы рассматривать соответственно в пространствах переменных $q^{(r)}$, $\xi^{(r)}$, η' и $q^{(r)}$, $\xi^{(r)}$, λ' . Если оператор $H_0^{(r)}(\lambda')$ будет рассматриваться при фиксированном λ' , т.е. в пространстве $R^{(3n-2r-2)} = \{q^{(r)}, \xi^{(r)}\}$, то мы будем обозначать его через $\hat{H}_0^{(r)}(\lambda')$.

4.3. При $r = 1$ операторы $H_0^{(r)}(\lambda')$ и $\hat{H}_0^{(r)}(\lambda')$ совпадают соответственно с операторами $H_0(Z_2, \lambda')$ и $\hat{H}_0(Z_2, \lambda')$ при $Z_2 = \{(Z_1 \setminus n), (n)\}$ (см. (2.6)) и, следовательно, их свойства даются теоремой 2.3 из работы [1]. Свойства операторов $H_0^{(r)}(\lambda')$ и $\hat{H}_0^{(r)}(\lambda')$ при $r \geq 2$ аналогичны, а именно спектр $\sigma(\hat{H}_0^{(r)}(\lambda'))$ не зависит от λ' и спектр $\sigma(H_0^{(r)}(\lambda'))$ совпадает со спектром $\sigma(\hat{H}_0^{(r)}(0))$, отличаясь от него лишь дополнительным бесконечным вырождением.

Доказательство этих утверждений проведем одновременно. Пусть b_t , $t = 1, 2, \dots, n-r$ и γ_τ , $\tau = 0, 1, \dots, r$, — произвольные числа, $\omega' = \sum_{t=1}^{n-r} b_t(q'_{t1} + q'_{t2})$. Сделаем калибровочное преобразование

$$e^{i\omega' \lambda'} H_0^{(r)}(\lambda') e^{-i\omega' \lambda'} \quad (4.8)$$

и затем в операторе (4.8) заменим ξ_τ на $\xi_\tau + \gamma_\tau \lambda'$. В полученном после этого операторе по сравнению с $H_0^{(r)}(\lambda')$ изменятся только члены с λ' . Обозначим через d_j и d'_s коэффициенты перед λ' , которые получатся после преобразования (4.8) соответственно в j -м слагаемом первой суммы и в s -м слагаемом второй суммы равенства (4.7). Вычисления показывают, что

$$d_j = - \sum_{s=1}^{n-r} (\delta_{sj} - m_j M^{(r)-1}) b_s - \sum_{\tau=0}^r (e_j M^{(r)} + Q^{(r)} m_j) B M^{(r)-1} \gamma_\tau + \frac{1}{2} M_{j,r}, \\ j = 1, 2, \dots, n-r, \quad (4.9) \\ d'_s = -2 \sum_{\tau=0}^{s-1} B e \gamma_\tau + 2e B m^{-1} M^{(s)} \gamma_s - \frac{1}{2} m M^{(k)-1} \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, r.$$

Докажем, что при некоторых b_t и γ_τ

$$d_j = 0, \quad j = 1, \dots, n-r; \quad d'_s = 0, \quad s = 1, \dots, r. \quad (4.10)$$

Полагая в (4.10) последовательно $s = 1, 2, \dots, r-1$, получаем $\gamma_1 = \beta_1 \gamma_0$, $\gamma_2 = \beta_2 \gamma_0$, $\dots$, $\gamma_{r-1} = \beta_{r-1} \gamma_0$ и при $s = r$

$$M^{(r)} m^{-1} \gamma_r - \beta \gamma_0 = \frac{m}{8M^{(k)}} eB, \quad (4.11)$$

где $\beta_s > 0$ – известные числа, $\beta = \sum_{s=1}^{r-1} \beta_s$. Далее, суммируя (4.10) по j , получим

$$-2BQ^{(r)} \sum_{\tau=0}^r \gamma_\tau + \frac{m}{2M^{(k)}} = 0, \quad (4.12)$$

т.е.

$$\gamma_r + \beta \gamma_0 = \frac{m}{4Q^{(r)} M^{(k)} B}. \quad (4.13)$$

Из (4.11), (4.13) находим γ_0 , γ_r и затем $\gamma_s = \beta_s \gamma_0$, $s = 1, 2, \dots, r-1$.

Таким образом мы нашли числа γ_s , $s = 0, \dots, r$, обеспечивающие справедливость $d'_s = 0$ и (4.12). Решение $d_j = 0$ ищем в виде $b_s = b e_s + \tilde{b} m_s$. Подставляя это выражение в (4.10) и приравнявая нулю коэффициенты при e_j и m_j при каждом j , видим, что в силу (4.12) $b = M/(4M^{(k)} Q^{(r)})$, и $\tilde{b}$ можно взять равным нулю. Из сказанного вытекает, что после калибровочного преобразования (4.8) и замены $\xi_\tau \rightarrow \xi_\tau + \gamma_\tau \lambda'$ с найденными γ_τ и b_s мы получим оператор, не содержащий λ' , т.е. $H_0^{(r)}(0)$. По построению $H_0^{(r)}(0)$ унитарно эквивалентен $H_0^{(r)}(\lambda')$ в $R^{(3n-2r-1)}$, и так как $H_0^{(r)}(0)$ не зависит от λ' , то утверждения п. 4.3 доказаны.

4.4. Докажем второе из утверждений теоремы 3.1. Пусть $\mu^{(r)} \in \sigma_p(H_0^{(r)})$. Вследствие второго утверждения п. 4.3 и поскольку $H_0^{(r)} = \widehat{H}_0^{(r)}(0)$, $\mu^{(r)}$ – собственное значение оператора F_0 , унитарно эквивалентного $H_0^{(r)}(\lambda')$ и $H_0^{(r)}(0)$. В силу (4.1) и (4.4)

$$H_0^{(k)} = F_0 + F_c + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-r} e_s e |q_s^{(k)} - q_{n-k}^{(k)}|^{-\gamma}.$$

Пусть u – нормированная собственная функция оператора F_0 , отвечающая числу $\mu^{(r)}$, $g(\zeta') \in C_0^2$, $\sup g(\zeta') \in [1, 2]$, $g_\alpha = g(\alpha \zeta') \alpha^{1/2}$, $u_\alpha = u g_\alpha$, $R' = \{\zeta'\}$. Тогда при $\|g\| = 1$

$$(H_0^{(k)} u_\alpha, u_\alpha) = (F_0 u, u) + (F_c g_\alpha, g_\alpha)_{R'} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-r} e_s e |\tilde{P}_s|^{-\gamma},$$

где $(F_0 u, u) = \mu^{(r)}$, $(F_c g_\alpha, g_\alpha) = \alpha^2 (F_c g_1, g_1)$, $\tilde{P}_s = (\tilde{P}_{s1}, \tilde{P}_{s2}, \tilde{P}_{s3}) = q_s^{(k)} - q_{n-k}^{(k)} = (q_{s1}^{(r)} + m^{-1} M^{(k)} (\xi_r + \eta'), q_{s2}^{(r)} + m^{-1} M^{(k)} (\eta' - \xi_r), q_{s3}^{(r)} + \zeta')$. Действуя так же, как в п. 3.3, убеждаемся, что при малых α

$$(H_0^{(k)} u_\alpha, u_\alpha) \leq \mu^{(r)} + \alpha^2 a_1 + \alpha^\gamma Q^{(n-r)} e a_2,$$

где $a_i > 0$ – некоторые числа, $Q^{(n-k)} e < 0$. Отсюда при малых α имеем

$$(H_0^{(k)} u_\alpha, u_\alpha) < \mu^{(r)},$$

т.е. второе утверждение теоремы 3.1 доказано.

4.5. Докажем первое утверждение теоремы 3.1. Пусть $q^{(k)} = (q_1^{(k)}, \dots, q_{n-k}^{(k)})$, $\xi^{(k)} = (\xi_0, \dots, \xi_k)$, $R = \{q^{(k)}, \xi^{(k)}\}$. Так как для любого $\nu \in \sigma_{\text{ess}}(H_0^{(k)})$ существует последовательность $g_m = g_m(q^{(k)}, \xi^{(k)}) \in C_0^2$, такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (H_0^{(k)} g_m, g_m) = \nu, \quad g_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ в } \mathcal{L}_2(R), \quad \|g_m\| = 1, \quad (4.14)$$

то будет достаточно доказать, что неравенство

$$\underline{\lim} (H_0^{(k)} g_m, g_m) \geq \mu^{(k+1)} \quad (4.15)$$

верно для любой последовательности g_m со свойствами (4.14).

Пусть $\Omega_b = \{(q^{(k)}, \xi^{(k)}) \mid |q^{(k)}| \leq b\}$. Для получения (4.15) решающую роль будет играть оценка

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_{\Omega_b} = 0, \quad (4.16)$$

которую мы докажем при любом $b > 0$.

4.6. Перестроим оператор $T_{0\perp}^{(k)}$ из (3.14), используя тождество (3.12) из работы [1] с

$$f_{jp} = \left(A_{jp}^{(k)} - \sum_{s=0}^k h_{jps}^{(k)} \right) m_j^{-1}, \quad n_0 = n - k, \quad \mathcal{M} = M^{(k)}.$$

Тогда (см. [1], п. 3.5) мы получим, что

$$T_{0\perp}^{(k)} = (f, f)_0 = \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{p=1}^2 m_j f_{jp}^2 = \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{p=1}^2 (f_{jp} - f_{cp})^2 m_j + M^{(k)} \sum_{p=1}^2 f_{cp}^2, \quad (4.17)$$

где

$$f_{cp} = \sum_{j=1}^{n-k} m_j \frac{f_{jp}}{M^{(k)}} = \left((-1)^{p+1} \sum_{j=1}^{n-k} e_j q_{j\bar{p}}^{(k)} - \frac{1}{2} D_-^{(k)} - \sum_{s=0}^k h_{cps}^{(k)} \right) (M^{(k)})^{-1},$$

$$h_{cps}^{(k)} = \frac{m M^{(k)}}{2 M^{(s-1)} M^{(s)} i} (-1)^p \frac{\partial}{\partial \xi_s} + 2 B Q^{(k)} \xi_s.$$

Так как оператор $H_0^{(k)} - (1/2)(T_{0\perp}^{(k)} + T_{c\perp}^{(k)} + T_{03}^{(k)})$ ограничен снизу, а операторы f_{jp} , f_{cp} , f_{sp} , $B_{j3}^{(k)}$ симметричны, то в силу первого из условий (4.14) и (4.17)

$$L := \sup_m \left\{ \sum_{j=1}^{n-k} \left[\left\| B_{j3}^{(k)} g_m \right\|_{\Omega}^2 + \sum_{p=1}^2 \|(f_{jp} - f_{cp}) g_m\|_{\Omega}^2 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^2 \left[\|f_{cp} g_m\|_{\Omega}^2 M^{(k)} + \sum_{s=1}^k \|\ell_{ps} g_m\|_{\Omega}^2 \right] \right\} < +\infty \quad (4.18)$$

для любой области $\Omega \subset R$. Раскрывая в (4.18) выражение в фигурных скобках и приводя подобные члены, видим, что в полученном результате произведения $\xi_t \partial \bar{g}_m / \partial \xi_s$, $\xi_t \partial g_m / \partial \xi_s$ отсутствуют, а выражения, содержащие произведения $\xi_s \xi_t |g_m|^2$, $s, t = 0, 1, \dots, k$, и произведения $(\partial \bar{g}_m / \partial \xi_s)(\partial g_m / \partial \xi_t)$, $s, t = 0, 1, \dots, k$, являются положительно определенными квадратичными формами соответственно по $\xi_s |g_m|$, $s = 0, 1, \dots, k$, и по $|\partial g_m / \partial \xi_s|$, $s = 0, 1, \dots, k$. Поэтому из (4.18) следует, что для некоторого $\delta_0 > 0$

$$L \geq 2\delta_0 \sum_{s=0}^k \left(\|\xi_s g_m\|_{\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial g_m}{\partial \xi_s} \right\|_{\Omega}^2 \right) + (\Phi g_m, g_m)_{\Omega}, \quad (4.19)$$

где Φ – вещественная часть линейной комбинации членов $q_{jp}^{(k)} q_{j_1 p_1}^{(k)}$, $(1/i) q_{jp}^{(k)} dg_m / d\xi_s$, $q_{jp}^{(k)} \xi_t$, $j, j_1 = 1, 2, \dots, n-k$, $s = 1, 2, \dots, k$, $p, p_1 = 1, 2$. Пусть теперь в (4.19) $\Omega = \Omega_b$. Так как $|q^{(k)}| \leq b$ в Ω_b , то

$$L \geq \delta_0 \sum_{s=0}^k \left(\|\xi_s g_m\|_{\Omega_b}^2 + \left\| \frac{\partial g_m}{\partial \xi_s} \right\|_{\Omega_b}^2 \right) - C, \quad (4.20)$$

где C зависит от b , но не от m . Пусть $\Omega_{b,N} = \{(q^{(k)}, \xi^{(k)}) \mid |q^{(k)}| \leq b, |\xi^{(k)}| \leq N\}$. Полагая в (4.18) $\Omega = \Omega_{b,N}$ и учитывая (4.20), получаем, что $\sup_m \|B_{jp}^{(k)} g_m\|_{\Omega_{b,N}} < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, n-k$, $p = 1, 2, 3$. Это неравенство вместе с (4.20) позволяет применить к последовательности g_m в области $\Omega_{b,N}$ теорему вложения Соболева. Используя ее и (4.14), заключаем, что при любых фиксированных b, N выполняется $\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_{\Omega_{b,N}} = 0$. Поэтому и в силу (4.20) при любом $N > 0$

$$L \geq \delta_0 N \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_{\Omega_b} - C, \quad (4.21)$$

что возможно лишь при выполнении (4.16), т.е. утверждение (4.16) доказано.

4.7. Пусть $\bar{Z}_1 = C_1^{(k)}$ и $\bar{Z}_\alpha = (\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_\alpha)$ – разбиение кластера $C_1^{(k)} = \bar{Z}_1$ на α не пересекающихся кластеров $\bar{C}_j$,

$$H_0^{(k)}(\bar{Z}_\alpha) = T_0 + \sum_{j=1}^{\alpha} V[\bar{C}_j], \quad \nu_0 = \min_{\bar{Z}_\alpha, \alpha \geq 2} \inf H_0^{(k)}(\bar{Z}_\alpha).$$

Так как $V_{st} > 0$ при $s, t \neq 1$, то $\nu_0 = \inf H_0^{(k)}(\bar{Z}_2)$, где $\bar{Z}_2 = \{(\bar{Z}_1 \setminus (n-k-1)), (n-k-1)\}$. Для произвольных $b(1) > a(1) > 1$ определим функции $u_1(\tau), v_1(\tau) \in C^2(R^1)$: $u_1(\tau) = 1$ при $\tau \in [0, a(1)]$, $u_1(\tau) \in (0, 1)$ при $\tau \in (a(1), b(1))$, $u_1(\tau) \equiv 0$ при $\tau \geq b(1)$, $v_1^2(\tau) + u_1^2(\tau) = 1$. Положим $|q^{(k)}|_0 = \sum_{j=1}^{n-k} |q_j^{(k)}|^2 m_j$, $\tau_{\bar{Z}_1} = |q^{(k)}|_0$, $u_{\bar{Z}_1} = u_1(\tau_{\bar{Z}_1})$, $v_{\bar{Z}_1} = v_1(\tau_{\bar{Z}_1})$. Пусть число m велико и фиксировано, $\psi_{0, \bar{Z}_1} = g_m u_{\bar{Z}_1}$, $\hat{\psi}_1 = g_m v_{\bar{Z}_1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать числа $a(1), b(1)$ и функцию $u_1(\tau)$ такие, что для всех m

$$(H_0^{(k)} g_m, g_m) \geq (H_0^{(k)} \psi_{0, \bar{Z}_1}, \psi_{0, \bar{Z}_1}) + (H_0^{(k)} \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) - \varepsilon. \quad (4.22)$$

Так как $\hat{\psi}_1 \equiv 0$ при $|q^{(k)}|_0 \leq a(1)$ и $\sum_{j=1}^{n-k} m_j q_j^{(k)} = 0$, то оценка снизу второго слагаемого в (4.22) проводится стандартным образом: фиксируем $\xi^{(k)}$, разбиваем пространство переменных $q^{(k)}$ на области, отвечающие всевозможным распадам системы $\bar{Z}_1 = C_1^{(k)}$ и оцениваем квадратичную форму оператора $H_0^{(k)}$ по этим областям при большом $a(1)$ (для чего можно следовать работе [4], с. 420–421, взяв там $\bar{Z}_1$ вместо Z_1), а потом интегрируем по $\xi^{(k)}$. В результате получим

$$(H_0^{(k)} \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) \geq \nu_0 \|\hat{\psi}_1\|^2 - \varepsilon, \quad (4.23)$$

где ε можно взять сколь угодно малым, если $a(1)$ велико. Далее, $\|\psi_{0, \bar{Z}_1}\|^2 \leq \|g_m\|_{\Omega_b}^2$, и в силу (4.16) при больших m выполняется $\mu \|\psi_{0, \bar{Z}_1}\|^2 \geq \nu_0 \|\psi_{0, \bar{Z}_1}\|^2 - \varepsilon$. Поэтому при больших m

$$(H_0^{(k)} \psi_{0, \bar{Z}_1}, \psi_{0, \bar{Z}_1}) \geq \nu_0 \|\psi_{0, \bar{Z}_1}\|^2 \geq \nu_0 \|\psi_{0, \bar{Z}_1}\|^2 - \varepsilon. \quad (4.24)$$

Из (4.22)–(4.24) следует, что при больших m

$$(H_0^{(k)} g_m, g_m) \geq \nu_0 \|g_m\|^2 - 3\varepsilon. \quad (4.25)$$

Но $H_0^{(k)}(\bar{Z}_2) = F$ (см. п. 4.1), поэтому и вследствие (4.4)–(4.6) и утверждений п. 4.3

$$\nu_0 = \inf H_0^{(k)}(\bar{Z}_2) = \mu^{(k+1)}.$$

Значит, (4.25) доказывает первое утверждение теоремы 3.1.

Список литературы

- [1] Г. М. Жислин. ТМФ. 2002. Т. 133. № 1. С. 87–102.
- [2] J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon. Ann. Phys. 1978. V. 114. P. 431–451.
- [3] Г. М. Жислин. Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 3. С. 301–304.
- [4] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. ТМФ. 1997. Т. 113. № 3. С. 413–431.

Поступила в редакцию 18.I.2002 г.