Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, Магнитный катализ нарушающего Р-четность фазового перехода первого рода и высокотемпературная сверхпроводимость, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 2, 289–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 04:17:27

© 2003 г. В. Ч. Жуковский*, К. Г. Клименко†

МАГНИТНЫЙ КАТАЛИЗ НАРУШАЮЩЕГО Р-ЧЕТНОСТЬ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПЕРВОГО РОДА И ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

В рамках $(2 + 1)$ -мерной калибровочной Р-четной теории, основанной на массивной модели Гросса–Невё, показано, что внешнее магнитное поле индуцирует нарушающий Р-четность фазовый переход первого рода. В критической точке происходит динамическая генерация члена Черна–Саймонса и дробных спина и статистики у частиц. Результаты работы могли бы представить интерес в связи с недавно обнаруженными магнитными фазовыми переходами в высокотемпературных сверхпроводниках.

Ключевые слова: фазовые переходы, магнитный катализ, высокотемпературная сверхпроводимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление динамического нарушения симметрии, индуцированного внешним магнитным или хромагнитным полем, получило название эффекта магнитного катализа. Это свойство однородного магнитного поля было впервые продемонстрировано при изучении $(2 + 1)$ -мерных кирально-инвариантных полевых моделей с четырехфермионным взаимодействием (так называемых моделей типа Гросса–Невё (ГН) [1]). В этом случае сколь угодно слабое внешнее магнитное поле приводит к динамическому нарушению киральной симметрии (ДНКС) даже при произвольно малой константе связи [2], [3]. Позднее явление получило объяснение на основе механизма эффективного уменьшения размерности пространства-времени во внешнем магнитном поле и соответствующего усиления роли инфракрасных расходимостей в перестройке вакуума [4]. Было также показано, что спонтанное нарушение киральной симметрии может быть индуцировано хромагнитным полем [5]–[7]. В недавних работах [8] доказывалась возможность индуцирования цветовой сверхпроводимости некоторыми типами внешних хромагнитных

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: th180@phys.msu.ru

†Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: kklm@mx.ihep.ru

полей. Это явление образования куперовских пар двух кварков может быть обнаружено уже в ближайших ион-ионных экспериментах.

Эффект магнитного катализа ДНКС является универсальным в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени [4]. Более того, утверждается, что этот эффект может иметь универсальный, т.е. модельно-независимый характер также и в четырехмерии [9]. Особенностям магнитного катализа в конкретных моделях квантовой теории поля посвящено довольно много публикаций, некоторые из которых приведены в ссылке [10]. В недавней работе [11] в рамках Р-четной трехмерной модели ГН было показано, что внешнее магнитное поле является катализатором и спонтанного нарушения Р-четности (см. также [12], [13]). Магнитный катализ уже нашел применение в космологии и астрофизике [14], а также для объяснения некоторых свойств высокотемпературных сверхпроводников [11]–[13], [15]–[17]. Можно с уверенностью утверждать, что это явление найдет применение в физике элементарных частиц, физике конденсированного состояния вещества, физике нейтронных звезд и т.д., т.е. в тех областях физики, где существенную роль играет эффект динамического нарушения симметрии и может присутствовать внешнее магнитное поле (см. также работы [18]).

Хорошо известно, что многие явления физики сильно коррелированных электронных систем (высокотемпературная сверхпроводимость (ВТСП), квантовый эффект Холла и др.) носят планарный характер. Так, например, ВТСП наблюдается в материалах, в которых электроны проводимости сконцентрированы в плоскостях, образуемых атомами Cu и O [19]. Во многом именно это обстоятельство послужило причиной интенсивного изучения в течение последнего десятилетия различных $(2 + 1)$ -мерных теорий поля, и было показано, что для целого ряда трехмерных теорий, таких как различные варианты квантовой электродинамики [20], модели типа ГН [21], характерно свойство сверхпроводимости.

В недавних экспериментальных исследованиях высокотемпературного сверхпроводника второго рода $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ [22] было обнаружено, что его теплопроводность как функция внешнего магнитного поля H претерпевает скачок при некотором значении $H = H_c \sim T^2$ (температура образца $T < T_c$, где T_c – температура перехода в сверхпроводящую фазу). Авторы работы [22] предположили, что под воздействием внешнего магнитного поля в указанном образце имеет место фазовый переход из одного сверхпроводящего состояния в другое при $H = H_c$. Вскоре для объяснения квадратичного поведения H_c как функции температуры были предложены три различных сценария. В первом из них, феноменологическом [23], был представлен функционал свободной энергии системы, описывающий это явление как фазовый переход первого рода с нарушением Р-четности. В двух других сценариях [11], [15] предлагались $(2 + 1)$ -мерные теории типа ГН, в рамках которых на основе магнитного катализа динамического нарушения симметрии также удавалось описать экспериментальное поведение $H_c(T)$. Однако качественные характеристики этого фазового перехода в каждой из работ [11], [15] были свои и, более того, предсказывались иными, нежели в работе [23]. В самом деле, в модели [15] внешнее магнитное поле индуцирует ДНКС, в модели [11] – нарушение Р-четности. Наконец, и в первой, и во второй моделях ГН динамическое нарушение

симметрии происходит в форме непрерывного фазового перехода второго рода, что не согласуется с предсказаниями феноменологического сценария [23].

Несмотря на то что существует несколько различных теоретических объяснений вышеупомянутого магнитного фазового перехода, в настоящий момент не хватает экспериментальных данных, что не позволяет выбрать однозначно теоретическую модель этого явления. Ясно, что необходимо проводить новые экспериментальные и теоретические исследования влияния внешнего магнитного поля на высокотемпературную сверхпроводимость.

В данной работе мы предлагаем $(2 + 1)$ -мерную полевою модель с четырехфермионным взаимодействием, в которой в отличие от других моделей [11], [15] магнитный катализ качественно проявляется так же, как и при феноменологическом описании фазового перехода, индуцированного внешним магнитным полем в ВТСП-системах [23].

2. ЛАГРАНЖИАНЫ МОДЕЛИ

В настоящее время существует довольно много $(2 + 1)$ -мерных теоретико-полевых калибровочных моделей, претендующих на описание явления ВТСП (см., например, [20], [24]). В качестве основы для нашего рассмотрения можно взять простейшую из них [20], лагранжиан которой имеет вид

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu} + \sum_{a=1}^N (\bar{\psi}_a i\gamma^\mu D_\mu \psi_a + m\bar{\psi}_a \psi_a). \quad (1)$$

Ферми-поля ψ_a ($a = 1, 2, \dots, N$) представляют собой четырехкомпонентные дираковские поля, которые преобразуются по приводимому четырехмерному спинорному представлению группы Лоренца в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени (соответствующие индексы опущены):

$$\psi_a = (\psi_{1a}, \psi_{2a})^t,$$

где ψ_{1a}, ψ_{2a} — неприводимые двумерные спиноры Дирака (t — операция транспонирования). Здесь также введены обозначения:

$$D_\mu = \partial_\mu - iN^{-1/2}g_s\tau A_\mu^s - ieA_\mu^{\text{ext}},$$

где A_μ^s — вектор-потенциал “статистического” абелевого калибровочного поля, $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ — его тензор напряженности, A_μ^{ext} — вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля (g_s и e — соответствующие калибровочные заряды).

Мы работаем с γ -матрицами размерности 4×4 следующего вида:

$$\gamma^\mu = \text{diag}(\tilde{\gamma}^\mu, -\tilde{\gamma}^\mu),$$

где

$$\tilde{\gamma}^0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

– двумерная реализация γ -матриц. В спинорном (четырёхмерном) пространстве действует и матрица $\tau = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Рассматриваемая модель инвариантна относительно глобальных $U_{\text{em}}(1)$ -преобразований

$$\psi_a \rightarrow \exp(i\epsilon\alpha)\psi_a,$$

а также локальных $U_{\text{s}}(1)$ -калибровочных преобразований

$$\psi_a \rightarrow \exp(ig_{\text{s}}\lambda(x)\tau)\psi_a, \quad A_{\mu}^{\text{s}} \rightarrow A_{\mu}^{\text{s}} + \sqrt{N}\partial_{\mu}\lambda.$$

Соответствующие токи имеют вид

$$J_{\text{em}}^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \quad J_{\text{s}}^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\tau\psi.$$

Особо подчеркнем, что действие с лагранжианом (1) инвариантно по отношению к дискретному преобразованию Р-четности:

$$P: \psi_a(t, x, y) \rightarrow i\gamma^1\gamma^5\psi_a(t, -x, y); \quad A_{\mu}^{\text{s,ext}}(t, x, y) \rightarrow (-1)^{\mu}A_{\mu}^{\text{s,ext}}(t, -x, y), \quad (2)$$

где

$$\gamma^5 = i \begin{pmatrix} 0, & -I \\ I, & 0 \end{pmatrix},$$

а I – единичная (2×2) -матрица. Легко видеть, что Р-операция переводит ψ_{1a} -поля в ψ_{2a} и наоборот. Поэтому равенство масс полей ψ_{1a} и ψ_{2a} (с точностью до знака) является необходимым и достаточным условием Р-симметрии лагранжиана (1). Объединив ферми-поля ψ_a ($a = 1, \dots, N$) в один фундаментальный мультиплет группы $U(N)$, нетрудно видеть, что лагранжиан (1) обладает также и $U(N)$ -симметрией, введенной здесь для того, чтобы использовать непертурбативный метод $(1/N)$ -разложения.

Теории типа (1) являются непрерывным пределом некоторых решеточных моделей планарных антиферромагнетиков, в которых наблюдается ВТСП, и поэтому в настоящее время интенсивно исследуются. Так, в работах [20] было показано, что в модели (1) отличен от нуля матричный элемент $\langle 0 | J_{\text{em}}^{\mu} | A_{\nu}^{\text{s}} \rangle$ (где $|A_{\nu}^{\text{s}}\rangle$ – состояние системы с одним квантом поперечной компоненты “статистического” поля A_{ν}^{s}), т.е. вакуум не является синглетом относительно $U_{\text{em}}(1)$ -преобразований. Это означает появление в теории голдстоуновской моды, роль которой играет вышеупомянутая поперечная часть поля A_{ν}^{s} . При этом в модели нет локального параметра порядка, характеризующего спонтанное нарушение $U_{\text{em}}(1)$ -симметрии, т.е. отсутствует $U_{\text{em}}(1)$ -неинвариантный оператор, у которого было бы ненулевое вакуумное среднее (этот случай известен как механизм нарушения симметрии Березинского–Костерлица–Таулеса [25]). Кроме того, было показано, что все характерные признаки сверхпроводимости (эффект Мейсснера, нулевое электрическое сопротивление и т.д.) свойственны и модели (1). В самом деле, с помощью механизма Хиггса голдстоуновский бозон поглощается электромагнитным

полем, которое становится массивным (эффект Мейсснера), у коррелятора двух электромагнитных токов присутствует безмассовый полюс (что означает нулевое сопротивление) и т. д. Необходимо отметить, что рассматриваемая теория описывает сверхпроводимость второго рода, при которой внешнее магнитное поле частично проникает внутрь образца. Еще раз подчеркнем, что только при наличии массы у ферми-полей в данной системе наблюдается сверхпроводимость. При этом Р-инвариантность остается ненарушенной в силу теоремы Вафа–Виттена [26], запрещающей нарушение Р-четности в вектороподобных моделях типа (1) с квадратичным по ферми-полям эффективным действием. Массовый член $m\bar{\psi}\psi$ в лагранжиане (1) присутствует изначально, однако он может возникнуть и динамическим образом, благодаря радиационным поправкам по константе g_s в эффективное действие. (Все вышеперечисленные свойства модели (1) справедливы и в лидирующем порядке по $1/N$.)

Как сказано во введении, внутри сверхпроводящей фазы высокотемпературного сверхпроводника второго рода $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ был обнаружен фазовый переход [22], который может быть интерпретирован как нарушающий Р-четность фазовый переход первого рода, индуцируемый внешним магнитным полем [23]. Для теоретического обоснования такой возможности мы предлагаем следующую модель с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu} + \sum_{a=1}^N (\bar{\psi}_a i\gamma^\mu D_\mu \psi_a + m\bar{\psi}_a \psi_a) + \frac{G}{2N} \left(\sum_{a=1}^N \bar{\psi}_a \tau \psi_a \right)^2, \quad (3)$$

который отличается от лагранжиана (1) членом с четырехфермионным взаимодействием. Новый лагранжиан (3) инвариантен относительно $U(N)$, $U_{\text{em}}(1)$, $U_s(1)$, а также преобразования Р-четности (2).

Предположим, что голая константа связи G – достаточно малая величина, $G < G_c$, где значение G_c приведено в следующем разделе. Там же вводится ренормализационно-инвариантная константа связи g , в терминах которой и проводится дальнейшее рассмотрение. В этом случае член с четырехфермионным взаимодействием в силу своей малости не оказывает существенного влияния на свойства модели. Поэтому система (3) будет по-прежнему находиться в описанном выше сверхпроводящем состоянии, в котором вакуумное среднее $\langle \sum_a \bar{\psi}_a \tau \psi_a \rangle \equiv \langle \bar{\psi} \tau \psi \rangle$ равно нулю, т. е. Р-четность не нарушена (здесь также подразумевается и малость внешнего магнитного поля). Мы покажем, что при достаточно сильном внешнем магнитном поле в модели (3) возможен нарушающий Р-четность фазовый переход первого рода¹⁾. Параметром порядка этого фазового перехода в нашей модели является вакуумное среднее $\langle \bar{\psi} \tau \psi \rangle$, динамика которого в главном порядке $(1/N)$ -разложения определяется только четырехфермионной частью лагранжиана (3). Следовательно, при изучении явления нарушения Р-четности в рамках модели (3) в лидирующем порядке по $1/N$ можно ради простоты не учитывать динамические калибровочные поля A_μ^s и ограничиться чисто фермионным вкладом в лагранжиан (3).

¹⁾В моделях типа (3) с четырехфермионным взаимодействием теорема Вафа–Виттена [26] неприменима (эффективное действие уже не квадратично по ферми-полям), поэтому Р-четность в них может быть спонтанно нарушена.

При этом мы приходим к рассмотрению фазовой структуры следующей трехмерной модели типа ГН с лагранжианом

$$L = \sum_{a=1}^N (\bar{\psi}_a i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_a + e \bar{\psi}_a \gamma^\mu A_\mu^{\text{ext}} \psi_a + m \bar{\psi}_a \psi_a) + \frac{G}{2N} \left(\sum_{a=1}^N \bar{\psi}_a \tau \psi_a \right)^2. \quad (4)$$

Заметим, что при $m = 0$ эта модель уже была использована в работе [11] для описания фазовых переходов, индуцированных внешним магнитным полем в ВТСП-системах. Мы покажем, что в отличие от случая $m = 0$ в данной модели при $m \neq 0$ в точке фазового перехода $H = H_c$ внешнее магнитное поле индуцирует динамическое нарушение Р-четности в рамках дискретного фазового перехода первого рода (при этом параметр порядка скачком меняет свое значение при переходе через критическое значение H_c). Это свойство магнитного катализа в теории (4) является уникальным и не имеет аналогов в других моделях, в которых магнитное поле генерирует непрерывные фазовые переходы второго рода (здесь параметр порядка в точке фазового перехода – непрерывная величина)²⁾. Полученные результаты позволяют надеяться, что теория (3), а также массивная модель ГН (4), на которой она основана, могут быть использованы для объяснения магнитного фазового перехода, наблюдавшегося в эксперименте [22], в согласии с феноменологическим подходом [23].

3. ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ГН ПРИ $H = 0$

Прежде чем исследовать воздействие внешнего магнитного поля H на основное состояние модели (4), рассмотрим ее фазовую структуру при $H = 0$, т.е. при $A_\mu^{\text{ext}}(x) = 0$. Для этого введем вспомогательный лагранжиан

$$\tilde{L} = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + m \bar{\psi} \psi + \sigma \bar{\psi} \tau \psi + \frac{N \sigma^2}{2G}, \quad (5)$$

где $\sigma(x)$ – вспомогательное действительное поле бозонов, причем суммирование по индексам a вспомогательной группы $U(N)$ здесь и ниже производится неявным образом. Полевые теории (4) и (5) эквивалентны, поскольку, используя уравнения движения, поле σ можно исключить из (5) ($\sigma \sim \bar{\psi} \tau \psi$) и в результате получить лагранжиан (4). Легко показать, что для вспомогательного поля σ преобразование Р-четности выглядит следующим образом:

$$P \sigma(t, x, y) P^{-1} = -\sigma(t, -x, y),$$

т.е. σ – псевдоскалярное поле. С помощью лагранжиана (5) можно определить эффективное действие σ -поля, которое в однопетлевом приближении (т.е. с точностью до основного члена $(1/N)$ -разложения) имеет следующий вид:

$$S_{\text{eff}}(\sigma) = -N \int d^3x \frac{\sigma^2}{2G} - iN \text{Sp} \ln \Delta, \quad (6)$$

²⁾ Численный анализ, проведенный недавно в кирально-инвариантной модели КЭД₃ [17], также указывает на возможность магнитного катализа ДНКС в рамках фазового перехода первого рода.

где $\Delta = i\hat{\partial} + m + \sigma\tau$ является оператором как в пространстве-времени, так и в спинорном пространстве. Предположим, что бозонное поле σ в (6) не зависит от пространственно-временных точек. Тогда эффективный потенциал $V_0(\sigma)$ определяется соотношением

$$V_0(\sigma) \int d^3x = -S_{\text{eff}}(\sigma)|_{\sigma=\text{const}}. \quad (7)$$

Используя стандартный подход [27], на основе (6), (7) можно получить эффективный потенциал модели при нулевом внешнем магнитном поле,

$$V_0(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2G} - N \sum_{k=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + M_k^2), \quad (8)$$

где интегрирование проводится по евклидовым импульсам и $M_{1,2} = |m \pm \sigma|$. Интегрирование по области $0 \leq p^2 \leq \Lambda^2$ дает

$$\frac{1}{N}V_0(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{|m - \sigma|^3}{6\pi} + \frac{|m + \sigma|^3}{6\pi}, \quad (9)$$

где

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{G} - \frac{2\Lambda}{\pi^2}.$$

Константа g не зависит от параметра обрезания Λ и является ренормализационно-инвариантной константой связи (см., например, [6]). Симметричность потенциала $V_0(\sigma)$ относительно преобразования $\sigma \rightarrow -\sigma$ является отражением того факта, что лагранжиан (4) Р-инвариантен. Напомним также, что среднее квантового поля $\sigma(x)$ по истинному вакууму теории $|\Omega\rangle$ есть точка глобального минимума σ_0 эффективного потенциала, т.е. $\sigma_0 = \langle \Omega | \sigma(x) | \Omega \rangle \equiv \langle \sigma \rangle$. Следовательно, если вакуум $|\Omega\rangle$ Р-инвариантен, то $\sigma_0 = 0$. Кроме того, если $\sigma_0 \neq 0$, то вакуум Р-неинвариантен. В самом деле, предположим, что $P|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ и $P\sigma(t, x, y)P^{-1} = -\sigma(t, -x, y)$. Тогда справедливы очевидные соотношения: $\sigma_0 = \langle \Omega | P^{-1} P \sigma(t, x, y) P^{-1} P | \Omega \rangle = -\langle \Omega | \sigma(t, -x, y) | \Omega \rangle = -\sigma_0$, из которых следует, что $\sigma_0 = 0$. Рассуждая от противного, с помощью этих же соотношений можно показать, что если $\sigma_0 \neq 0$, то $P|\Omega\rangle \neq |\Omega\rangle$. Имея эффективный потенциал в главном порядке $(1/N)$ -разложения, можно в лидирующем порядке по N получить фермионный массовый член эффективного лагранжиана модели. Для этого в лагранжиане (5) нужно осуществить сдвигку $\sigma \rightarrow \sigma + \langle \sigma \rangle$. В результате имеем

$$m\bar{\psi}\psi \equiv m\bar{\psi}_1\psi_1 - m\bar{\psi}_2\psi_2 \rightarrow (m + \langle \sigma \rangle)\bar{\psi}_1\psi_1 + (\langle \sigma \rangle - m)\bar{\psi}_2\psi_2, \quad (10)$$

где ψ_{1a}, ψ_{2a} — двухкомпонентные составляющие четырехмерных спиноров ψ_a (см. обозначения, принятые в (1)), суммирование по a подразумевается. Это означает, что наблюдаемая масса полей ψ_1 на самом деле равна $m + \langle \sigma \rangle$, а масса полей ψ_2 равна $\langle \sigma \rangle - m$. С учетом замечания, сделанного после (2), отсюда следует, что в рамках нашей модели условие $\langle \sigma \rangle = 0$ с необходимостью приводит в лидирующем порядке по N к Р-симметрии

эффективного лагранжиана (наблюдаемые массы $\psi_{1,2}$ полей противоположны по знаку). При этом вакуум $|\Omega\rangle$ пространства состояний системы есть вакуум пространства Фока, построенного на свободных ферми-полях $\psi_{1,2}$, который в данном случае будет Р-симметричным.

Таким образом, если точка глобального минимума σ_0 эффективного потенциала равна нулю, то основное состояние системы Р-инвариантно (реализуется Р-симметричная фаза модели), если же $\sigma_0 \neq 0$, то, как ранее было отмечено, система находится в фазе с нарушенной Р-четностью. Аналогичное утверждение справедливо и для ненулевого внешнего магнитного поля.

Для определения глобального минимума необходимо решить уравнение стационарности, которое для четной функции $V_0(\sigma)$ (9) в области $0 \leq \sigma < \infty$ имеет следующий вид:

$$0 = \frac{1}{N} \frac{\partial V_0}{\partial \sigma} = \begin{cases} \frac{2\sigma m}{\pi} + \frac{\sigma}{g} & \text{при } \sigma < m, \\ \frac{\sigma^2}{\pi} + \frac{m^2}{\pi} + \frac{\sigma}{g} & \text{при } \sigma > m. \end{cases} \quad (11)$$

Используя уравнение (11), можно получить, что при $\pi/g > -2m$ (в дальнейшем мы рассматриваем только значения $m > 0$) потенциал (9) имеет глобальный минимум в точке $\sigma_0 = 0$, которая Р-инвариантна (так как $\sigma_0 = -\sigma_0$), т.е. в рамках исходной модели соответствует вакууму Р-симметричной фазы. Если $\pi/g < -2m$, то потенциал (9) в области $0 \leq \sigma < \infty$ имеет нетривиальный абсолютный минимум в точке

$$\sigma_0 = -\frac{\pi}{2g} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4g^2} - m^2}, \quad (12)$$

это означает, что для таких значений параметров модели Р-четность спонтанно нарушена. Используя вместо g голую константу связи G , получаем следующую картину. При $G < G_c = \pi^2/(2\Lambda - 2m\pi)$ вакуум модели Р-четен, при $G > G_c$ реализуется фаза модели со спонтанно нарушенной Р-четностью. В точке $G = G_c$ глобальный минимум потенциала скачком переходит из начала координат в нетривиальную точку (12), что свидетельствует о фазовом переходе первого рода. Для сравнения заметим, что для безмассовой теории, т.е. при $m = 0$, имеет место непрерывный по константе связи фазовый переход второго рода в точке $G = G_c$.

4. МАГНИТНЫЙ КАТАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО НАРУШЕНИЯ Р-ЧЕТНОСТИ

Рассмотрим теперь влияние внешнего магнитного поля H (при нулевой температуре) на Р-инвариантную фазу модели (4), т.е. в случае $\pi/g > -2m$ (при этом голая константа связи достаточно мала, $G < G_c$). Вектор-потенциал, соответствующий внешнему однородному постоянному магнитному полю H , можно выбрать в виде

$$A_\mu^{\text{ext}}(t, x, y) = \left(0, -\frac{Hy}{2}, \frac{Hx}{2} \right).$$

Для Р-четности рассматриваемых моделей необходимо, чтобы он преобразовывался по закону (2). Нетрудно видеть, что в нашем случае, т.е. в присутствии внешнего магнитного поля H , под преобразованием Р-четности следует понимать изменение знака не только у одной из пространственных координат, $(t, x, y) \rightarrow (t, -x, y)$, но одновременно и у внешнего магнитного поля, $H \rightarrow -H$. Только тогда вектор-потенциал будет преобразовываться в соответствии с (2).

Соответствующий эффективный потенциал, являющийся частным случаем эффективного потенциала для более общей Р-четной трехмерной ГН-модели при $H \neq 0$ [28], имеет вид

$$\begin{aligned} V_H(\sigma) &= \frac{N\sigma^2}{2G} + \sum_{k=1}^2 \frac{NeH}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} e^{-sM_k^2} \text{cth}(eHs) = \\ &= V_0(\sigma) + \sum_{k=1}^2 \frac{NeH}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} e^{-sM_k^2} \left[\text{cth}(eHs) - \frac{1}{eHs} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $V_0(\sigma)$ – эффективный потенциал (9) при $H = 0$. Как было замечено выше, Р-инвариантность эффективного действия модели в присутствии внешнего магнитного поля означает инвариантность эффективного потенциала при одновременном изменении знака у σ и H , т.е. $P V_H(\sigma) P^{-1} \equiv V_{-H}(-\sigma) = V_H(\sigma)$. Легко видеть, что потенциал (13) удовлетворяет этому соотношению. Кроме того, он инвариантен и при более общих преобразованиях, когда только одна из величин σ , H изменяет знак: $V_H(\sigma) = V_{-H}(\sigma)$, $V_H(\sigma) = V_H(-\sigma)$. Таким образом, зависимость эффективного потенциала от H и σ сводится к его зависимости от $|H|$ и $|\sigma|$, поэтому в дальнейшем, не теряя общности рассмотрения, мы будем предполагать $H \geq 0$. Наконец, отметим, что если потенциал $V_H(\sigma)$ имеет ненулевую точку глобального минимума, то, как и в случае $H = 0$, это означает спонтанное нарушение Р-четности.

Выполняя в (13) интегрирование по s [29], можно преобразовать это выражение к виду

$$V_H(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g} + N \sum_{k=1}^2 \left[\frac{eHM_k}{4\pi} - \frac{(2eH)^{3/2}}{4\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{M_k^2}{2eH}\right) \right], \quad (14)$$

где $\zeta(s, x)$ – обобщенная дзета-функция Римана [30] (см. также приложение А). Покажем теперь, что в нашей модели внешнее магнитное поле индуцирует спонтанное нарушение Р-четности. При этом мы продемонстрируем, что магнитный катализ и его свойства качественно отличаются для случаев $m = 0$ и $m \neq 0$.

Безмассовый случай, $m = 0$. Соответствующий эффективный потенциал модели $V_H^0(\sigma)$ может быть получен из формулы (14) при $m = 0$:

$$V_H^0(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g} + \frac{NeH|\sigma|}{2\pi} - \frac{N(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right). \quad (15)$$

Так как $V_H^0(\sigma)$ является функцией, симметричной относительно преобразования $\sigma \rightarrow -\sigma$, то для нахождения ее глобального минимума достаточно провести исследование

лишь для $\sigma \in [0, \infty)$. Уравнение стационарности для этого случая выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial V_H^0(\sigma)}{\partial \sigma} \equiv 2N\sigma F(\sigma) = 0, \quad (16)$$

где $F(\sigma)$ может быть представлено в двух эквивалентных формах,

$$F(\sigma) = \frac{1}{2g} + \frac{\sigma}{2\pi} - \frac{\sqrt{eH}}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(-s \frac{\sigma^2}{eH}\right) [s \operatorname{cth}(s) - 1] \quad (17)$$

и

$$F(\sigma) = \frac{1}{2g} + \frac{eH}{4\pi\sigma} - \frac{\sqrt{2eH}}{4\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH}\right). \quad (18)$$

Первое выражение следует из (13) при $m = 0$, а второе получается из (15) с учетом формулы (А.2) из приложения А. Потенциал (15) уже исследовался в работах [2], [4], [6]. Остановимся более детально на тех его особенностях, которые понадобятся нам в дальнейшем. Прежде всего укажем, что из формул (16)–(18) следуют равенства

$$\left. \frac{\partial V_H^0(\sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma \rightarrow 0_+} = \lim_{\sigma \rightarrow 0_+} (2N\sigma F(\sigma)) = -\frac{NeH}{2\pi}, \quad (19)$$

т.е. точка $\sigma = 0$ не является решением уравнения стационарности (16). Кроме того, так как $V_H^0(\sigma) = V_H^0(-\sigma)$, возникают еще два следствия формулы (19):

1. В точке $\sigma = 0$ расположен локальный максимум потенциала.
2. Первая производная функции $V_H^0(\sigma)$ не существует в точке $\sigma = 0$ (в то же время при $H = 0$ эффективный потенциал является дифференцируемой функцией на всей оси σ).

Следствие 1 и тот факт, что $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V_H^0(\sigma) = +\infty$, указывают на присутствие не тривиального глобального минимума потенциала $V_H^0(\sigma)$ в некоторой точке $\sigma_0(H) \neq 0$. Это означает, что Р-четность рассматриваемой безмассовой модели в присутствии внешнего магнитного поля (сколь угодно малого) неизбежно спонтанно нарушена даже для произвольно малых значений константы связи G (в этом случае $g > 0$). Следовательно, имеет место динамическое нарушение Р-четности, индуцированное внешним магнитным полем (явление магнитного катализа). Критическое значение H , при котором происходит фазовый переход, есть $H_c = 0_+$. Исследуем характер этого фазового перехода.

Очевидно, что функция $F(\sigma)$ (17) монотонно возрастает на множестве $\sigma \in [0, \infty)$. При этом $F(0) = -\infty$ (следствие равенства (19)) и $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} F(\sigma) = \infty$ [2], [6]. Следовательно, существует единственная точка $\sigma_0(H) \neq 0$, где функция $F(\sigma)$ обращается в нуль. Это и есть как раз та самая точка, в которой расположен глобальный минимум потенциала (15). С помощью уравнения $F(\sigma) = 0$, неявно определяющего функцию $\sigma_0(H)$, нетрудно показать, что $\sigma_0(H) \approx egH/(2\pi)$ при малых значениях H [2], [6], т.е. $\lim_{H \rightarrow 0} \sigma_0(H) = 0$. Теперь нужно вспомнить, что при $g > 0$ и $H = 0$ точка глобального минимума $\sigma_0(0)$ эффективного потенциала равна нулю (см. предыдущий раздел). Значит, функция $\sigma_0(H)$ непрерывна в точке $H = 0$, так как $\lim_{H \rightarrow 0} \sigma_0(H) = \sigma_0(0) = 0$.

Таким образом, в случае $g > 0$ и $m = 0$ при включении внешнего магнитного поля в модели происходит нарушающий Р-четность фазовый переход второго рода, поскольку параметр порядка $\sigma_0(H)$ в критической точке (при $H = H_c = 0_+$) есть непрерывная функция от внешнего магнитного поля. Добавим также, что при $g < 0$ и $m = 0$ Р-четность спонтанно нарушается благодаря сверхкритическому четырехфермионному взаимодействию ($G > G_c$), поэтому включение внешнего магнитного поля качественно не меняет свойств вакуума. В то же время количественные характеристики модели (масса фермионов и т.д.) зависят от H [6].

Ранее было показано [2], [6], что при больших значениях H функция $\sigma_0(H)$ имеет вид

$$\sigma_0(H) \approx k\sqrt{eH},$$

где k – решение уравнения

$$\sqrt{2}\zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{k^2}{2}\right) = 1,$$

т.е. $k \approx 0.45$. Поскольку $\sigma_0(H)$ является точкой глобального минимума потенциала (15), то для всех значений H справедливо неравенство

$$V_H^0(0) > V_H^0(\sigma_0(H)).$$

В частности, на основе этого соотношения для $H \rightarrow \infty$ получаем неравенство

$$-\frac{N(2eH)^{3/2}}{2\pi}\zeta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) > \frac{Nk(eH)^{3/2}}{2\pi} - \frac{N(2eH)^{3/2}}{2\pi}\zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{k^2}{2}\right), \quad (20)$$

которое будет использовано при рассмотрении случая $m \neq 0$.

Массивный случай, $m \neq 0$. Рассмотрим теперь некоторые особенности спонтанного нарушения симметрии в модели (4) при $H, m \neq 0$. Как и в безмассовом случае, при $m \neq 0$ потенциал $V_H(\sigma)$ представляет собой четную функцию σ . Следовательно, достаточно найти его глобальный минимум на полуоси $\sigma \in [0, \infty)$. Здесь уравнение стационарности для эффективного потенциала запишется в виде

$$0 = \frac{1}{N} \frac{\partial V_H}{\partial \sigma} = \begin{cases} (\sigma + m)F(\sigma + m) - (m - \sigma)F(m - \sigma), & \text{при } \sigma < m, \\ (\sigma + m)F(\sigma + m) + (\sigma - m)F(\sigma - m), & \text{при } \sigma > m, \end{cases} \quad (21)$$

где функция $F(x)$ определена равенством (17). С учетом (19) из последнего уравнения легко находим

$$\left. \frac{\partial V_H}{\partial \sigma} \right|_{\sigma \rightarrow m_+} = -\frac{NeH}{2\pi} + \left. \frac{\partial V_H}{\partial \sigma} \right|_{\sigma \rightarrow m_-}. \quad (22)$$

Отсюда видно, что при $H \neq 0$ потенциал (14) в точке $\sigma = m$ не есть дифференцируемая функция. На основании этого можно заключить, что возможная точка глобального минимума функции $V_H(\sigma)$ на множестве $\sigma \in [0, \infty)$ представляет собой либо точку $\sigma = m$, либо одно из решений уравнения стационарности (21). Однако на основании (22) можно сделать важный вывод о том, что если в некоторой окрестности слева от точки

$\sigma = t$ производная эффективного потенциала отрицательна, то и в некоторой окрестности справа она также будет отрицательной. Следовательно, точка $\sigma = t$ не может являться не только глобальным, но даже и локальным минимумом. Поэтому необходимо обратить особое внимание на решения уравнения (21). Очевидным решением этого уравнения при всех значениях H является точка $\sigma = 0$. Покажем, что для всех значений $H \neq 0$ эта точка представляет собой минимум потенциала $V_H(\sigma)$. Действительно, вторая производная при $\sigma = 0$ имеет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial^2 V_H(\sigma)}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma=0} = \frac{1}{g} - \frac{\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{m^2}{2eH}\right) + \frac{m^2}{2\pi\sqrt{2eH}} \zeta\left(\frac{3}{2}, \frac{m^2}{2eH}\right). \quad (23)$$

Применяя асимптотические разложения (А.3), (А.4) для ζ -функций (см. приложение А), можно получить из (23) следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial^2 V_H(\sigma)}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma=0} &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{g} + \frac{2m}{\pi} + \frac{(2eH)^2}{24\pi} + \dots, & \text{при } \frac{eH}{m^2} \rightarrow 0, \\ -\frac{\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{g} + \frac{3}{4\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{m^2}{\sqrt{2eH}} + \dots, & \text{при } \frac{eH}{m^2} \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку $\zeta(1/2) \approx -1.5$ и $(1/g) + (2m/\pi) > 0$, то вторая производная $\partial^2 V_H(\sigma)/\partial \sigma^2$ в точке $\sigma = 0$ положительна как при $eH/m^2 \rightarrow \infty$, так и при $eH/m^2 \rightarrow 0$. Более того, численное исследование показывает, что она положительна также и при промежуточных значениях внешнего магнитного поля (см. рис. 1). Следовательно, точка $\sigma = 0$ является, по крайней мере, точкой локального минимума потенциала $V_H(\sigma)$ при всех значениях H . При этом при достаточно малых значениях H глобальный минимум потенциала расположен как раз в точке $\sigma = 0$ и Р-четность остается ненарушенной (это является следствием того факта, что при таких значениях H производная потенциала положительна для всех $\sigma \in [0, \infty)$).

Рис. 1. Вторая производная эффективного потенциала при $x \equiv \sigma/m = 0$ как функция внешнего магнитного поля.

Теперь продемонстрируем, что при больших полях H уравнение (21) имеет еще одно решение, отсутствующее при малых H . Действительно, в области $\sigma \gg t$ это уравнение совпадает по форме с уравнением стационарности (16) для безмассового случая. Решение $\sigma_0(H)$ последнего уравнения удовлетворяет соотношению $\sigma \gg t$ лишь в пределе $eH \rightarrow \infty$. Таким образом, в области сильных магнитных полей уравнение (21) имеет, кроме решения $\sigma = 0$, еще одно решение $\tilde{\sigma}_0(H)$ такое, что $\tilde{\sigma}_0(H) \approx k\sqrt{eH}$ при $eH \rightarrow \infty$ (коэффициент k определен в формуле (20)). Кроме того, $\tilde{\sigma}_0(H) > t$. Другие решения уравнения стационарности (21), кроме $\sigma = 0$ и $\tilde{\sigma}_0(H)$, нами не обнаружены даже с помощью численных исследований, проведенных в широком интервале значений как переменной σ , так и параметров H, g .

Как указывалось выше, при достаточно малых H глобальный минимум потенциала расположен в точке $\sigma = 0$. Покажем теперь, что с ростом H он перемещается в точку $\tilde{\sigma}_0(H)$. Найдём значения потенциала в стационарных точках при $eH/m^2 \rightarrow \infty$:

$$V_H(0) = -\frac{(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) + O(eH/m^2), \quad (25)$$

$$V_H(\tilde{\sigma}_0(H)) = \frac{k(2eH)^{3/2}}{2\pi} - \frac{(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{k^2}{2}\right) + O(eH/m^2), \quad (26)$$

где мы приняли во внимание, что $\tilde{\sigma}_0(H) \approx k\sqrt{eH}$ при $eH \rightarrow \infty$. Сравнивая с учетом (20) выражения (25) и (26), приходим к заключению, что $V_H(\tilde{\sigma}_0(H)) < V_H(0)$ при $eH \rightarrow \infty$. Поскольку при всех значениях H точка $\sigma = 0$ является, по крайней мере, локальным минимумом, переход глобального минимума потенциала из точки $\sigma = 0$ в нетривиальную точку $\tilde{\sigma}_0(H)$ происходит скачком при некотором критическом значении внешнего магнитного поля $H_c(g) \neq 0$.

Рис. 2. Критическое магнитное поле как функция константы связи g .

Таким образом, при некотором критическом значении магнитного поля $H_c(g)$ в системе происходит нарушающий Р-четность фазовый переход первого рода. Численные значения критического внешнего магнитного поля $H_c(g)$ как функции константы связи g при $T = 0$ и $t > 0$ представлены на рис. 2.

На этом рисунке используется безразмерный параметр mg . Очевидно, его значения, удовлетворяющие одному из неравенств $mg < -\pi/2$ или $0 < mg$, соответствуют Р-симметричной фазе модели при $H = 0$ (см. раздел 3). В этом случае, как показано выше, по достижении внешним магнитным полем некоторого критического значения $H_c(g) \neq 0$ вакуум модели становится Р-неинвариантным, т.е. именно магнитное поле является причиной спонтанного нарушения Р-четности. Для значений g , удовлетворяющих неравенствам $-\pi/2 < mg < 0$, при $H = 0$ уже реализуется Р-неинвариантная фаза, поэтому в данном случае не требуется никакого внешнего магнитного поля для нарушения Р-четности. Можно показать, что при таких g для любых значений H , включая значение $H = 0$, глобальный минимум эффективного потенциала находится в нетривиальной точке, т.е. Р-четность спонтанно нарушена. (Иными словами, функция $H_c(g)$ на рис. 2 не определена на интервале $-\pi/(2m) < g < 0$.) Причиной нарушения Р-четности в этом случае является не внешнее магнитное поле, а достаточно сильное притяжение фермионов и антифермионов (константа четырехфермионного взаимодействия $G > G_c$), которые образуют связанные состояния $\bar{\psi}\psi$, а вакуум есть конденсат этих пар.

Рис. 3. Эффективный потенциал как функция $x \equiv \sigma/m$ при различных напряженностях внешнего магнитного поля, нулевой температуре и $gm = 10$.

Описанный выше процесс перехода точки глобального минимума потенциала $V_H(\sigma)$ из $\sigma = 0$ в ненулевую точку $\tilde{\sigma}_0(H)$ показан на рис. 3, где функция $V_H(\sigma)$ изображена при различных значениях H и $gm = 10$. Видно, что при некотором значении H_0 внешнего магнитного поля, удовлетворяющего неравенству $7.5m^2 < eH_0 < 15m^2$, появляется второй (ненулевой) локальный минимум $\tilde{\sigma}_0(H)$ эффективного потенциала, который при $H_0 < H < H_c$, где $eH_c = 22.8m^2$, удовлетворяет соотношению $\tilde{\sigma}_0(H) > m$. При $H = H_c$ точка $\tilde{\sigma}_0(H)$ становится абсолютным минимумом потенциала. Если же $H > H_c$ (на рис. 3 эти кривые отсутствуют), то точка $\tilde{\sigma}_0(H)$ будет располагаться на оси σ еще правее, чем при $H = H_c$, т.е. по-прежнему будет удовлетворять неравенству $\tilde{\sigma}_0(H) > m$.

5. МАГНИТНЫЙ КАТАЛИЗ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Рассмотрим теперь эффект магнитного катализа в модели (4) при конечной температуре T . Применяя метод, предложенный в работах [2], [6] для исследования безмассо-

Рис. 4. Критическое магнитное поле как функция T при малых значениях температуры и $gm = 5$.

вой кирально-инвариантной трехмерной модели типа ГН при $H, T \neq 0$, можно получить следующее выражение для эффективного потенциала $V_{HT}(\sigma)$ рассматриваемой модели (4) при $H, T \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V_{HT}(\sigma) = \\ = \frac{\sigma^2}{2G} + \sum_{k=1}^2 \frac{eHT}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} \exp(-\alpha M_k^2 - \alpha(2n+1)^2 \pi^2 T^2) \operatorname{cth}(eH\alpha), \end{aligned} \quad (27)$$

где $M_k = |\sigma \pm m|$, а G – голая константа связи, которая по-прежнему мала, $G < G_c$. Это выражение не очень удобно для численного анализа, поэтому преобразуем его (см. приложение Б) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V_{HT}(\sigma) = \frac{1}{N} V_H(\sigma) - \frac{eH}{2\pi\beta} \sum_{i=1}^2 \left\{ \ln(1 + \exp(-M_i\beta)) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \exp\left(-\beta\sqrt{M_i^2 + 2keH}\right)\right) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\beta = 1/T$, а $V_H(\sigma)$ – потенциал (14). Численный анализ выражения (28) для потенциала $V_{HT}(\sigma)$ показывает, что и в этом случае Р-четность не нарушена при достаточно малых значениях H . Однако существует критическое магнитное поле $H_c(T)$, при котором происходит фазовый переход первого рода с нарушением Р-четности. В таблице приведены некоторые значения $H_c(T)$ при фиксированном g таком, что $gm = 5$.

T/m	1	2.5	5	10	25	50	100	200
$eH_c(T)/m^2$	36	131	465	1782	10900	43200	173000	700000

Как видно из таблицы, $H_c(T) \sim T^2$ при $T \rightarrow \infty$, т.е. $H_c(T)$ ведет себя так же, как и в моделях [11], [14]. Поведение $H_c(T)$ при низких температурах представлено на рис. 4.

6. ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЧЛЕНА ЧЕРНА–САЙМОНСА

Напомним, что исходная модель, которую мы привлекаем для демонстрации существования нарушающего Р-четность фазового перехода первого рода, индуцированного внешним магнитным полем, имеет лагранжиан (3). В дальнейшем, как и в предыдущих разделах 3–5, в ней удобно использовать вспомогательное псевдоскалярное поле σ , в терминах которого (3) преобразуется к эквивалентному виду

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi + \sigma\bar{\psi}\tau\psi + \frac{N\sigma^2}{2G}, \quad (29)$$

где использованы те же обозначения, что и в (3), а суммирование по индексам $U(N)$ -группы $a = 1, \dots, N$ подразумевается.

Как уже обсуждалось в разделе 2, наличие в этой теории Р-четной сверхпроводящей фазы при малых значениях внешнего магнитного поля и $G < G_c$ обусловлено взаимодействием фермионов с калибровочными “статистическими” бозонами. Так как в нашей модели параметром порядка Р-симметрии (2) является вакуумное среднее $\langle\sigma\rangle$, то для нахождения его зависимости от H, T , а также критических значений этих внешних параметров, при которых происходит спонтанное нарушение Р-четности, достаточно исследовать соответствующий эффективный потенциал, имеющий в модели (29) в главном порядке по $1/N$ такой же вид, как и в теории ГН (4) (см. разделы 3–5). Иными словами, характеристики нарушающего Р-четность фазового перехода в модели (29) в главном порядке $(1/N)$ -разложения не зависят от калибровочного сектора теории. Поэтому очевидно, что и критическое значение магнитного поля $H_c(T)$, при котором в теории (3), (29) происходит спонтанное нарушение Р-четности, и параметр порядка $\langle\sigma\rangle$, т.е. глобальный минимум потенциала, и характер фазового перехода имеют такой же вид, как и в массивной модели ГН (4). Напротив, особенности состояния, в которое после нарушения Р-четности переходит система, во многом определяются присутствием в рассматриваемой теории “статистических” калибровочных полей A_μ^s . В подтверждение этого приведем следующие соображения.

Рассмотрим возможный фазовый переход в Р-неинвариантное состояние в модели с лагранжианом (29). Опишем процедуру получения эффективного лагранжиана новой фазы (для простоты мы рассматриваем случай $T = 0$). В первую очередь необходимо произвести сдвигку псевдоскалярного поля $\sigma \rightarrow \sigma + \langle\sigma\rangle$ в лагранжиане (29). При этом массовый член фермионов преобразуется по формуле (10), откуда следует, что двухкомпонентные спиноры ψ_1 и ψ_2 имеют разные наблюдаемые массы $\langle\sigma\rangle + m$ и $\langle\sigma\rangle - m$, соответственно. Далее, в секторе калибровочных полей новый эффективный лагранжиан будет отличаться от $\tilde{\mathcal{L}}$ членом Черна–Саймонса L_{CS} , возникающим динамическим образом [27], [31]. Чтобы найти L_{CS} , нужно, используя правила Фейнмана с новыми значениями масс ферми-полей ψ_1, ψ_2 , вычислить однопетлевую поправку к поляризационному оператору поля A_μ^s , в результате чего для L_{CS} получается следующее выражение:

$$L_{CS} \sim (\text{sign}(\langle\sigma\rangle + m) + \text{sign}(\langle\sigma\rangle - m))\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu^s\partial_\nu A_\lambda^s, \quad (30)$$

где фигурирует знаковая функция $\text{sign}(x) = +1(-1)$ при $x > 0$ (< 0). Очевидно, что в Р-инвариантной фазе, где $\langle \sigma \rangle = 0$, член Черна–Саймонса (30) равен нулю. Если Р-четность в нашей модели спонтанно нарушена, то, как уже отмечалось в разделе 4, справедливо соотношение $\langle \sigma \rangle \equiv \tilde{\sigma}_0(H) > m$. Следовательно, при $H > H_c$ член Черна–Саймонса (30) отличен от нуля и в рассматриваемой модели у калибровочных полей A_μ^s динамическим образом возникает топологическая масса. Это означает, что в Р-нечетной фазе модели ψ -частицы становятся анионами – частицами с дробным спином и статистикой. Вакуум в такой системе является сверхпроводником, поскольку даже для идеального газа частиц-анионов основное состояние обладает сверхпроводящими свойствами [32].

Таким образом, внешнее магнитное поле, действуя на сверхпроводящую систему (при $H < H_c$ и $G < G_c$) с лагранжианом (3), генерирует в ней при $H = H_c$ Р-нечетный фазовый переход первого рода. При этом в новой фазе, т.е. для достаточно больших значений магнитного поля $H > H_c$, в системе наблюдается уже сверхпроводимость анионного типа (квазичастицы обладают дробными спином и статистикой).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в рамках калибровочной Р-инвариантной $(2+1)$ -мерной теории поля с четырехфермионным взаимодействием (3) рассмотрена возможность магнитного катализа спонтанного нарушения Р-четности в форме фазового перехода первого рода. Эта задача мотивирована недавним экспериментом [22] по изучению теплопроводности некоторых ВТСП-систем, в котором внутри сверхпроводника второго рода был обнаружен фазовый переход, индуцированный внешним магнитным полем. В последовавших вскоре теоретических описаниях этого фазового перехода использовались эффекты магнитного катализа спонтанного нарушения как киральной симметрии [15], так и Р-четности [11], которые происходят обычно в форме фазовых переходов второго рода. Помимо того, что эти теории качественно отличаются друг от друга, они также предсказывают иной характер магнитного фазового перехода, нежели в феноменологическом подходе работы [23]. Цель нашей работы – предложить теорию, в которой магнитный фазовый переход имел бы такие же основные качественные параметры, что и в [23]. Какая из теорий этого фазового перехода истинна – вопрос, который должен решаться в дальнейших экспериментах.

Так как калибровочные бозоны в главном порядке $(1/N)$ -разложения не дают вклада в эффективный потенциал, то описание процесса нарушения Р-четности в теории (3) идентично изучению критических свойств соответствующей массивной модели ГН (4). Напомним, что при $m = 0$ в этой модели имеет место магнитный катализ динамического нарушения Р-четности [11]. При этом в точке $H_c \sim T^2$ ($T \rightarrow \infty$) происходит *фазовый переход второго рода*, а теоретические значения H_c достаточно хорошо описывают экспериментальные данные [22].

Мы показали, что в модели ГН (4) при $m \neq 0$ внешнее магнитное поле также индуцирует динамическое нарушение Р-четности. Кривая H_c при высоких T имеет тот же вид, что и при $m = 0$. Однако в противоположность последнему случаю в массивной модели ГН (4) в точке H_c происходит нарушающий Р-четность *фазовый переход первого ро-*

da — явление, совершенно не характерное для магнитного катализа (во всех известных примерах внешнее магнитное поле обычно вызывает непрерывный фазовый переход второго рода). Это свойство магнитного катализа в модели (4), а значит, и в теории (3) находится в согласии с феноменологическим описанием магнитных фазовых переходов в высокотемпературных сверхпроводниках [23].

Все параметры магнитного катализа нарушения Р-четности в массивной модели ГН напрямую переносятся в модель (3) (в лидирующем порядке по $1/N$). Однако этот фазовый переход в калибровочной теории (3) обладает дополнительной особенностью: здесь в точке фазового перехода при $H = H_c$, благодаря динамической генерации топологической массы у калибровочных бозонов (члена Черна–Саймонса), происходит изменение спина и статистики квазичастиц, участвующих в образовании сверхпроводящего состояния. В критической точке внешнее магнитное поле включает анионный механизм образования сверхпроводимости.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Некоторые свойства дзета-функций Римана

Дзета-функция и обобщенная дзета-функция Римана определены при $\text{Re } s > 1$ следующими рядами [30]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}. \quad (\text{A.1})$$

Эти выражения допускают аналитическое продолжение на целую комплексную плоскость s , за исключением точки $s = 1$. Из выражения (A.1) следуют два соотношения:

$$\frac{d\zeta(s, x)}{dx} = -s\zeta(s+1, x), \quad \zeta(s, x) = \zeta(s, 1+x) + x^{-s}. \quad (\text{A.2})$$

Справедливы следующие асимптотические разложения для некоторых функций $\zeta(s, x)$ при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \zeta\left(-\frac{1}{2}, x\right) &= -\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{24}x^{-1/2} - \frac{1}{12000}x^{-3/2} + \dots, \\ \zeta\left(\frac{1}{2}, x\right) &= -2x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{24}x^{-3/2} + \dots, \\ \zeta\left(\frac{3}{2}, x\right) &= 2x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} + \frac{1}{8}x^{-5/2} + \dots. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

При $x \rightarrow 0$ асимптотические разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta\left(-\frac{1}{2}, x\right) &= \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) + x^{1/2} + \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{8}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^2 + \dots, \\ \zeta\left(\frac{1}{2}, x\right) &= x^{-1/2} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x + \dots, \\ \zeta\left(\frac{3}{2}, x\right) &= x^{-3/2} + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \dots. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Вывод формулы (28)

Используя при преобразовании выражения (27) известное соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\beta^2}} = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi\alpha}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2 \beta^2}{4\alpha}} \right\},$$

можно получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V_{HT}(\sigma) &= \frac{\sigma^2}{2G} + \sum_{k=1}^2 \frac{eH}{8\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} e^{-\alpha M_k^2} \operatorname{cth}(eH\alpha) + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \frac{eH}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} e^{-\alpha M_k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2 \beta^2}{4\alpha}} \operatorname{cth}(eH\alpha). \quad (\text{Б.1}) \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (13), легко видеть, что первые два члена в правой части (Б.1) являются эффективным потенциалом $(1/N)V_H(\sigma)$. В последнем члене воспользуемся разложением

$$\operatorname{cth}(eH\alpha) = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \exp(-2leH\alpha).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V_{HT}(\sigma) &= \frac{1}{N} V_H(\sigma) + \sum_{k=1}^2 \frac{eH}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\alpha M_k^2 - \frac{n^2 \beta^2}{4\alpha}\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \frac{eH}{2\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\alpha M_k^2 - \frac{n^2 \beta^2}{4\alpha} - 2leH\alpha\right). \quad (\text{Б.2}) \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\int_0^{\infty} dx x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{x} - \gamma x\right) = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/2} K_{\alpha}(2\sqrt{\beta\gamma}),$$

где

$$K_{-1/2}(z) = K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z},$$

можно провести интегрирование по α в (Б.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V_{HT}(\sigma) &= \frac{1}{N} V_H(\sigma) + \sum_{k=1}^2 \frac{eH}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp(-n\beta M_k^2) + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \frac{eH}{\pi\beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp\left(-n\beta \sqrt{M_k^2 + 2leH}\right). \quad (\text{Б.3}) \end{aligned}$$

Окончательно, суммирование по n проводится с помощью соотношения

$$\ln(1+x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

В результате для $V_{HT}(\sigma)$ получаем выражение (28).

Благодарности. Авторы благодарны Д. Эберту и И. В. Тютину за многочисленные плодотворные обсуждения, а также В. В. Худякову за помощь в проведении численных расчетов. Работа получила частичную поддержку Немецкого Исследовательского Общества (грант DFG 436 RUS 113/477/4).

Список литературы

- [1] *D. J. Gross, A. Neveu.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 3235.
- [2] *К. Г. Клименко.* ТМФ. 1991. Т. 89. С. 211; 1992. Т. 90. С. 3; *K. G. Klimenko.* Z. Phys. C. 1992. V. 54. P. 323.
- [3] *I. V. Krive, S. A. Naftulin.* Phys. Rev. D. 1992. V. 46. P. 2737.
- [4] *V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy.* Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 3499; Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 4718.
- [5] *K. G. Klimenko, A. S. Vshivtsev, B. V. Magnitsky.* Nuovo Cimento. A. 1994. V. 107. P. 439; *A. C. Вишвцев, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий.* ТМФ. 1994. Т. 101. С. 391; ЯФ. 1994. Т. 57. С. 2260.
- [6] *A. C. Вишвцев, В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий.* ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 1259.
- [7] *I. A. Shovkovy, V. M. Turkowski.* Phys. Lett. B. 1995. V. 367. P. 213; *D. Ebert, V. Ch. Zhukovsky.* Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 2567; *V. P. Gusynin, D. K. Hong, I. A. Shovkovy.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 5230.
- [8] *D. Ebert, K. G. Klimenko, H. Toki.* Phys. Rev. D. 2001. V. 54. P. 014038; *D. Ebert et al.* Progr. Theor. Phys. 2001. V. 106. P. 835; Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 054024; *В. Ч. Жуковский и др.* Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. С. 595.
- [9] *G. W. Semenoff, I. A. Shovkovy, L. C. R. Wijewardhana.* Phys. Rev. D. 2000. V. 60. P. 105024.
- [10] *C. N. Leung, Y. J. Ng, A. W. Ackley.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 4181; *D. K. Hong, Y. Kim, S.-J. Sin.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 7879; *D. S. Lee, C. N. Leung, Y. J. Ng.* Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 6504; *S. Kanemura, H.-T. Sato, H. Tochimura.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 517. P. 567; *T. Itoh, H. Kato.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 551. P. 723.
- [11] *W. V. Liu.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 556. P. 563.
- [12] *В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, Б. В. Худяков, Д. Эберт.* Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. С. 137.
- [13] *D. C. Cabra, G. L. Rossini.* On planar fermions with quartic interaction at finite temperature and density. cond-mat/0106609.
- [14] *T. Inagaki, T. Muta, S. D. Odintsov.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1997. V. 127. P. 93; *E. J. Ferrer, V. de la Incera.* Int. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. P. 3963; Phys. Lett. B. 2000. V. 481. P. 287.
- [15] *G. V. Semenoff, I. A. Shovkovy, L. C. R. Wijewardhana.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1143.
- [16] *N. E. Mavromatos, A. Momen.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1765; *J. Alexandre, K. Farakos, S. J. Hands et al.* Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 034502.
- [17] *J. Alexandre, K. Farakos, G. Koutsoumbas.* Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 065015.
- [18] *V. A. Miransky.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1996. V. 123. P. 49; *V. P. Gusynin.* Ukrainian J. Phys. 2000. V. 45. P. 603; *V. de la Incera.* External magnetic fields in QFT: a non-perturbative approach. hep-ph/0009303.
- [19] *A. S. Davydov.* Phys. Rep. 1990. V. 190. P. 191.
- [20] *A. Kovner, B. Rosenstein.* Phys. Rev. B. 1990. V. 42. P. 4748; *N. Dorey, N. E. Mavromatos.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 386. P. 614.
- [21] *G. W. Semenoff, L. C. R. Wijewardhana.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 2633; *R. Mackenzie, P. K. Panigrahi, S. Sakhi.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 3603; *В. П. Гусынин,*

- В. М. Локтев, И. А. Шовковый.* ЖЭТФ. 1995. Т. 107. С. 2007; *E. Babaev.* Phys. Lett. B. 2001. V. 497. P. 323; Int. J. Mod. Phys. A. 2001. V. 16. P. 1175; *M. Reenders.* Néel transition, spin fluctuations, and pseudogap in underdoped cuprates by a Lorentz invariant four-fermion model in 2+1 dimensions. cond-mat/0110168; *E. J. Ferrer, V. P. Gusynin, V. de la Incera.* Thermal conductivity in 3D NJL model under external magnetic field. cond-mat/0203217.
- [22] *K. Krishana et al.* Science. 1997. V. 277. P. 83.
- [23] *R. B. Laughlin.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5188.
- [24] *K. Farakos, N. E. Mavromatos.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1019.
- [25] *В. Л. Березинский.* ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 907; *J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless.* J. Phys. C. 1973. V. 6. P. 1181.
- [26] *C. Vafa, E. Witten.* Comm. Math. Phys. 1984. V. 95. P. 257.
- [27] *G. W. Semenoff, L. C. R. Wijewardhana.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 2633; *К. Г. Клименко.* З. Phys. C. 1993. V. 57. P. 175; *К. Г. Клименко.* ТМФ. 1993. Т. 95. С. 42.
- [28] *В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, В. В. Худяков.* ТМФ. 2000. Т. 124. С. 323; hep-ph/0010123.
- [29] *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.* Интегралы и ряды. В 2-х томах. М.: Наука, 1981.
- [30] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.
- [31] *M. Gomes, V. O. Rivelles, A. J. da Silva.* Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 1363; *К. Г. Клименко.* ТМФ. 1992. Т. 92. С. 166.
- [32] *V. Kalmeyer, R. B. Laughlin.* Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 2095; *R. B. Laughlin.* Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2677.

Поступила в редакцию 16.I.2002 г.,
после доработки 18.VII.2002 г.