Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Правило Ферми и резонансы амплитуды рассеяния, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 3, 341–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:51:31

© 2003 г.

А. А. Арсеньев*

ПРАВИЛО ФЕРМИ И РЕЗОНАНСЫ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Исследуется поведение амплитуды рассеяния вблизи резонанса с малой мнимой частью. Доказано, что вблизи действительной части резонанса амплитуда рассеяния как функция энергии испытывает скачок, который не зависит от деталей взаимодействия. Для мнимой части резонансного полюса получена оценка через данные задачи.

Ключевые слова: рассеяние, полюс, резонанс.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется амплитуда рассеяния вблизи действительной части полюса аналитического продолжения матрицы рассеяния при условии, что мнимая часть полюса мала. В случае радиального уравнения Шредингера (т.е. для сферически-симметричного потенциала) из формулы Крейна–Бирмана следует, что если мнимая часть полюса мала, то в окрестности действительной части полюса фаза рассеяния скачком меняется на π . В случае сферически-симметричного потенциала сечение рассеяния просто связано с фазой, и это позволяет связать резонанс (т.е. полюс матрицы рассеяния) с экспериментально наблюдаемыми величинами. В общем случае простой связи между логарифмической производной матрицы рассеяния и экспериментально наблюдаемыми величинами не существует. Поэтому возникает естественный вопрос, как проявляется полюс матрицы рассеяния в терминах экспериментально наблюдаемых величин. Предлагаемая работа и посвящена этой задаче.

Проиллюстрируем рассматриваемую проблему хорошо известным по численным экспериментам надматематической моделью туннельного диода примером уравнения Шредингера на оси. Пусть потенциал этого уравнения имеет вид двойного барьера

$$V(x) = V_0 \left[e^{-\left(\frac{x+d}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-d}{a}\right)^2} \right] \quad (1)$$

и параметры в (1) подобраны так, что имеется четко выраженный квазиуровень. Это означает, что у аналитического продолжения матрицы рассеяния есть такой полюс λ_{res} , что $0 < \text{Re } \lambda_{\text{res}} < V_0$, $\text{Im } \lambda_{\text{res}} < 0$, $|\text{Im } \lambda_{\text{res}}| \ll 1$. Из численных экспериментов хорошо известно, что в этом случае коэффициент прохождения в подбарьерной области

*Московский государственный университет, Москва, Россия

вне резонанса (если спектральный параметр $\lambda \neq \operatorname{Re} \lambda_{\text{res}}$) близок к нулю, а в резонансе ($\lambda \approx \operatorname{Re} \lambda_{\text{res}}$) модуль коэффициента прохождения почти равен единице. Заметим, что потенциал (1) симметричен относительно точки $x = 0$: $V(x) = V(-x)$. Нарушим эту симметрию. Лежащую правее точки правого локального максимума d_{max} часть графика функции $V(x)$ сдвинем вправо на $d' \approx a$, а между точками $x = d_{\text{max}}$ и $x = d_{\text{max}} + d'$ положим $V(x) = V(d_{\text{max}})$. Положение полюса матрицы рассеяния при этом почти не изменится, но картина рассеяния изменится существенно: скачка коэффициента прохождения уже не будет, он будет мал во всей подбарьерной области. Этот пример показывает, что при исследовании проблемы резонансов амплитуды рассеяния необходимо учитывать связь между свойствами симметрии гамильтониана и амплитудой рассеяния в резонансе. Более подробное рассмотрение показывает, что важна пространственно-временная симметрия гамильтониана (в стационарной постановке обращению времени соответствует комплексное сопряжение гамильтониана). В предлагаемой модели связь между свойствами симметрии гамильтониана и амплитудой рассеяния в резонансе описывается отображениями l и p . Отображение l действует в фазовом пространстве, отображение p — в пространстве, параметризующем амплитуду рассеяния. Эти отображения связаны соотношением (29) (см. далее раздел 4).

Полюс матрицы рассеяния с малой мнимой частью трактуется как возмущенное собственное значение из непрерывного спектра (perturbed embedded eigenvalue). Теория возмущений для резонансов и лежащих в непрерывном спектре собственных значений рассматривалась во многих работах (интересные обзоры работ на эту тему можно найти в [1]–[5]). Обычно предметом исследования является проблема существования полюсов матрицы рассеяния. Мы налагаем условие ядерности, что сводит проблему существования полюсов матрицы рассеяния вблизи собственных значений в непрерывном спектре к простому следствию теоремы Руше. Нас интересует не столько проблема существования полюсов матрицы рассеяния и их расположение, сколько асимптотическое поведение вычета в полюсе матрицы рассеяния при стремлении мнимой части полюса к нулю. Для уравнения Шредингера вычет в полюсе матрицы рассеяния изучался в работах [4], [6], с которыми в данной статье есть много общего.

Основной результат предлагаемой работы изложен в теореме 2. Из этой теоремы следует, что вблизи резонанса амплитуда рассеяния испытывает скачок, который не зависит от деталей взаимодействия. В этом отношении полученный результат аналогичен тому, который для радиального уравнения Шредингера следует из формулы Крейна–Бирмана. В теореме 1 установлено, что мнимая часть полюса матрицы рассеяния связана с параметрами возмущения традиционным “золотым правилом Ферми”. Мы рассматриваем этот вывод как аргумент в пользу состоятельности нашей модели.

Далее невозмущенный оператор обозначается символом A_0 , а возмущенный — символом A , $A = A_0 + V$. Символом $L(A \rightarrow B)$ обозначается банахово пространство линейных непрерывных операторов из банахова пространства A в банахово пространство B . Символом $\times$ обозначается декартово произведение.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Пусть H , $H_{\pm}$ — такие гильбертовы пространства, что $H_- \subset H \subset H_+$, H_- плотно в H , а H плотно в H_+ . Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ — скалярное произведение и норма в H , соответствен-

но. Будем предполагать, что скалярное произведение в гильбертовом пространстве линейно по второму аргументу. Мы предполагаем также, что для любого вектора $f \in H_-$ линейный функционал

$$H \ni g \rightarrow \langle f, g \rangle \quad (2)$$

может быть по непрерывности продолжен до линейного функционала на H_+ и продолжение линейной формы (2) задает общий вид линейного функционала на H_+ , т.е. форма $\langle, \rangle$ приводит H_- и H_+ в двойственность. В приложениях к теории потенциального рассеяния пространства H и $H_{\pm}$ можно представить как

$$H = L^2(\mathbb{R}^n, dx), \quad H_{\pm} = L^2(\mathbb{R}^n, e^{\mp|x|} dx).$$

Предлагаемая ниже конструкция в абстрактной форме описывает нужные нам свойства преобразования Фурье, резольвенты оператора Лапласа и лемму Реллиха в традиционной теории потенциального рассеяния.

Пусть Ω – компактное топологическое пространство, $d\omega$ – вероятностная борелевская мера на Ω и $L^2(\Omega, d\omega)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций на Ω . Скалярное произведение в $L^2(\Omega, d\omega)$ обозначим символом $(,)$. В приложениях к теории потенциального рассеяния пространство Ω – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией и мерой.

Пусть h – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций на интервале $(a; b)$ со значениями в $L^2(\Omega, d\omega)$,

$$\langle f, g \rangle_h = \int_a^b (f(\lambda), g(\lambda)) d\lambda, \quad f(\lambda), g(\lambda) \in L^2(\Omega, d\omega).$$

Пусть A_0 – ограниченный самосопряженный оператор в H , который унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в пространстве h , т.е. пусть существует такой оператор $U \in L(H \rightarrow h)$, что

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle Uf, Ug \rangle_h, \\ \langle f, A_0 g \rangle &= \int_a^b \lambda (U(f)(\lambda), U(g)(\lambda)) d\lambda. \end{aligned}$$

В приложениях к теории потенциального рассеяния в качестве оператора A_0 можно взять экспоненту от оператора Лапласа. Тогда отображение U очевидным образом строится с помощью преобразования Фурье. Предположим, что обратный оператор U^{-1} существует, ограничен и в пространстве h действует как интегральный оператор с ядром $U^{-1}(\lambda, \omega)$. При этом функция

$$(a; b) \times \Omega \ni (\lambda, \omega) \rightarrow U^{-1}(\lambda, \omega) \in H_+$$

аналитична по λ при фиксированном ω в не зависящей от ω комплексной окрестности некоторого интервала $(\lambda_{\infty} - \delta; \lambda_{\infty} + \delta)$ и непрерывна по совокупности переменных (λ, ω) как функция со значениями в H_+ . Мы предполагаем, что для любого $\psi \in H_-$ в не зависящей от ψ комплексной окрестности интервала $(\lambda_{\infty} - \delta; \lambda_{\infty} + \delta)$ функция

$$\lambda \rightarrow U(\psi)(\lambda) \in C(\Omega)$$

аналитична по λ как функция со значениями в $C(\Omega)$.

Будем предполагать, что в комплексной окрестности интервала $(\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$ функция

$$\lambda \rightarrow R(\lambda, A_0) = (\lambda E - A_0)^{-1} \in L(H \rightarrow H)$$

как функция со значениями в $L(H_- \rightarrow H_+)$ имеет аналитическое продолжение из верхней полуплоскости в нижнюю (это продолжение обозначим символом $R^+(\lambda, A_0)$) и из нижней полуплоскости в верхнюю (это продолжение обозначим символом $R^-(\lambda, A_0)$). Аналогичная конструкция предложена в работе [4].

Будем называть оператор $V \in L(H \rightarrow H)$ *допустимым*, если это самосопряженный ядерный в H оператор, который по непрерывности может быть продолжен на H_+ , удовлетворяет условию $VH_+ \subset H_-$ и вполне непрерывен как оператор из $L(H_+ \rightarrow H_-)$.

Пусть V_n – последовательность допустимых операторов, которая сходится к допустимому оператору V_∞ в ядерной топологии пространства $L(H \rightarrow H)$ и в равномерной операторной топологии пространства $L(H_+ \rightarrow H_-)$. Определим операторы A_n формулой

$$A_n = A_0 + V_n, \quad n \leq \infty.$$

Приведем пример. Пусть функция $q_\infty(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} 0 &\leq q_\infty(x) \leq \infty, \\ q_\infty(x) &= \infty, \quad l \leq |x| \leq l + d, \\ q_\infty(x) &< e^{-a|x|^2}, \quad |x| > r, \end{aligned}$$

и локально гёльдерова там, где она конечна. Положим $q_n(x) = \min(n, q_\infty(x))$. Пусть q_n – оператор умножения на функцию $q_n(x)$ и $A_n = e^{\Delta - q_n}$. Подробно этот пример разобран в работе [7]. В дальнейшем величины, относящиеся к операторам A_n, V_n , $n \leq \infty$, будем помечать соответствующим индексом, который может быть опущен в тех формулах, где индекс может принимать любое достаточно большое значение, включая бесконечность.

Пусть ψ_∞ – собственная функция оператора A_∞ в пространстве H ,

$$A_\infty \psi_\infty = \lambda_\infty \psi_\infty, \quad \|\psi_\infty\| = 1. \quad (3)$$

Точка λ_∞ в (3) – это та точка, о которой шла речь выше. Предположим, что

$$\psi_\infty \in H_-. \quad (4)$$

Определим операторы $\Gamma^\pm(\lambda) = R^\pm(\lambda, A_0)V$. Из наших предположений следует, что функция $\Gamma^\pm(\lambda)$ аналитична по λ в окрестности интервала $(\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$ как функция со значениями в пространстве $L(H_+ \rightarrow H_+)$. Из соотношений (3) и (4) следует, что $\psi_\infty = \Gamma_\infty^\pm(\lambda_\infty)\psi_\infty$. Предположим, что в пространстве H_+ выполнены условия

$$\text{Ker}(E - \Gamma_\infty^\pm(\lambda_\infty)) \subset H_-, \quad (5)$$

$$\text{Ker}(E - \Gamma_\infty^+(\lambda_\infty)) = \text{Ker}(E - \Gamma_\infty^-(\lambda_\infty)), \quad (6)$$

$$\dim \text{Ker}(E - \Gamma_\infty^\pm(\lambda_\infty)) = 1. \quad (7)$$

Далее будем считать, что

$$\langle \psi_\infty, V_\infty \psi_\infty \rangle \neq 0. \quad (8)$$

Аналогичное условие рассматривалось в работе [6]. Условия (4), (5) в приложениях к теории потенциального рассеяния проверяются на основе леммы Реллиха.

Предположим, что существует такой гомоморфизм $l: H_+ \rightarrow H_+$, который удовлетворяет следующему условию: в некоторой комплексной окрестности точки $\mu = 1$ и в некоторой комплексной окрестности интервала $(\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$ выполнены соотношения

$$l(\mu\psi) = \bar{\mu}l(\psi), \quad (9)$$

$$l(\text{Ker}(\bar{\mu}E - \Gamma^-(\bar{\lambda}))) \subset \text{Ker}(\mu E - \Gamma^+(\lambda)), \quad (10)$$

$$l(\text{Ker}(\mu E - \Gamma^+(\lambda))) \subset \text{Ker}(\bar{\mu}E - \Gamma^-(\bar{\lambda})). \quad (11)$$

В рассмотренных нами задачах потенциального рассеяния и дифракции отображение l есть комбинация комплексного сопряжения и пространственной симметрии.

Будем называть *регулярным* собственным значением оператора A_n то собственное значение, которое удовлетворяет перечисленным выше для λ_∞ условиям. Предположим, что на интервале $(\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$ оператор A_n не имеет регулярных собственных значений при $n < \infty$.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕЗОНАНСОВ И ПРАВИЛО ФЕРМИ

ЛЕММА 1. Если вектор ψ_∞ удовлетворяет условию (8), то число $\mu = 1$ есть полупростое собственное значение оператора $\Gamma_\infty^\pm(\lambda_\infty)$ в пространстве H_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi \in H_+$, то функция

$$\lambda \rightarrow \langle (\lambda E - A_0)\psi_\infty, R(\lambda, A_0)V_\infty\varphi \rangle$$

аналитична в окрестности λ_∞ , а так как

$$\langle (\lambda E - A_0)\psi_\infty, R(\lambda, A_0)V_\infty\varphi \rangle = \langle \psi_\infty, V_\infty\varphi \rangle, \quad \text{Im } \lambda > 0,$$

то

$$\langle (\lambda_\infty E - A_0)\psi_\infty, \Gamma^+(\lambda_\infty)\varphi \rangle = \langle \psi_\infty, V_\infty\varphi \rangle.$$

Если φ есть решение уравнения

$$(E - \Gamma^+(\lambda_\infty))\varphi = \psi_\infty, \quad (12)$$

то

$$\begin{aligned} \langle (\lambda_\infty E - A_0)\psi_\infty, (E - \Gamma^+(\lambda_\infty))\varphi \rangle &= \langle V_\infty\psi_\infty, \psi_\infty \rangle = \\ &= \langle V_\infty\psi_\infty, \varphi \rangle - \langle \psi_\infty, V_\infty\varphi \rangle = 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию (8). Следовательно, уравнение (12) решений не имеет и все нильпотенты оператора $\Gamma_\infty^+(\lambda_\infty)$ равны нулю. Лемма 1 доказана.

Аналогичное утверждение доказано в работе [6].

Из леммы 1 следует, что существуют такие числа $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, что при $n = \infty$ проектор

$$P_n^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|1-\mu|=\epsilon} R(\mu, \Gamma_n^+(\lambda)) d\mu, \quad |\lambda - \lambda_\infty| < \delta, \quad (13)$$

одномерен, аналитически зависит от λ и удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_n^+(\lambda) P_n^+(\lambda) = P_n^+(\lambda) \Gamma_n^+(\lambda) = \mu_n^+(\lambda) P_n^+(\lambda). \quad (14)$$

Так как $\Gamma_n^+(\lambda) \rightarrow \Gamma_\infty^+(\lambda)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по λ , то при $n \rightarrow \infty$ имеем $P_n^+(\lambda) \rightarrow P_\infty^+(\lambda)$, и поэтому при $n \geq n_0$ проектор $P_n^+(\lambda)$ одномерен и удовлетворяет уравнению (14), где функция $\lambda \rightarrow \mu_n^+(\lambda)$ аналитична по λ в окрестности точки λ_∞ .

В дальнейшем предполагается, что число n настолько велико, а число δ настолько мало, что проектор $P_n^+(\lambda)$ одномерен в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \delta$, а функция $\mu_n^+(\lambda)$ аналитична в этом круге. Такие значения параметра n будем называть достаточно большими, а значения параметра δ — достаточно малыми.

ЛЕММА 2. *Проектор $P_n^+(\lambda)$ (13) может быть вычислен по формуле*

$$P^+(\lambda)f = c(\lambda) \langle V l^{-1}(\psi(\lambda)), f \rangle \psi(\lambda), \quad (15)$$

где

$$\mu^+(\lambda)\psi(\lambda) = \Gamma^+(\lambda)\psi(\lambda), \quad \psi \in H_+, \quad (16)$$

$$c(\lambda) = \langle V l^{-1}(\psi(\lambda)), \psi(\lambda) \rangle^{-1}, \quad (17)$$

$$|1 - \mu^+(\lambda)| < \epsilon, \quad |\lambda - \lambda_\infty| < \delta. \quad (18)$$

Функции $c(\lambda)$, $\mu^+(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ аналитичны по λ в окрестности точки λ_∞ и равномерно по λ при $n \rightarrow \infty$

$$c_n(\lambda) \rightarrow c_\infty(\lambda), \quad \mu_n^+(\lambda) \rightarrow \mu_\infty^+(\lambda), \quad \|\psi_n(\lambda) - \psi_\infty(\lambda)\|_+ \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Область значений проектора $P_\infty^+(\lambda_\infty)$ есть линейное пространство, натянутое на вектор ψ_∞ . Существует такой элемент $f_0 \in H_+$, что $P_\infty^+(\lambda_\infty)f_0 = \psi_\infty$. Положим

$$\psi_n(\lambda) = P_n^+(\lambda)f_0. \quad (19)$$

Функция $\psi_n(\lambda)$ аналитична по λ в окрестности точки λ_∞ и удовлетворяет уравнению (16). Из (13) следует, что $P_n^+(\lambda) = \psi_n(\lambda) \otimes \tilde{\psi}_n(\lambda)$, где $\tilde{\psi}_n(\lambda)$ — функционал, порожденный собственной функцией оператора, сопряженного к $\Gamma_n^+(\lambda)$ (обратим внимание: не гильбертово-сопряженного!). Цель дальнейших выкладок — выразить функционал $\tilde{\psi}_n(\lambda)$ через собственную функцию $\psi_n(\lambda)$.

Так как проектор $P_n^+(\lambda)$ одномерен, то он может быть записан в виде

$$P_n^+(\lambda)f = \langle \varphi(\lambda), f \rangle \psi_n(\lambda), \quad \varphi(\lambda) \in H_-,$$

причем функция $\overline{\varphi(\lambda)}$ аналитична по λ . Из (14) следует, что

$$V R^-(\bar{\lambda}, A_0)\varphi(\lambda) = \bar{\mu}^+(\lambda)\varphi(\lambda). \quad (20)$$

Определим функцию

$$\eta(\lambda) = R^-(\bar{\lambda}, A_0)\varphi(\lambda). \quad (21)$$

Из уравнения (20) следует, что $\bar{\mu}^+(\lambda)\eta(\lambda) = \Gamma^-(\bar{\lambda})\eta(\lambda)$. Используя соотношение (10), получаем

$$\mu^+(\lambda)l(\eta(\lambda)) = \Gamma^+(\lambda)l(\eta(\lambda)). \quad (22)$$

Из условия (7) следует, что $l(\eta(\lambda)) = \alpha\psi(\lambda)$, $\eta(\lambda) = \bar{\alpha}l^{-1}(\psi(\lambda))$, поэтому в выражении (21) $\varphi(\lambda) = (\bar{\lambda}E - A_0)\eta(\lambda)$, а из (22) следует, что

$$\bar{\mu}^+(\lambda)(\bar{\lambda}E - A_0)\eta(\lambda) = V\eta(\lambda) = \bar{\alpha}Vl^{-1}(\psi(\lambda)) = \bar{\mu}^+(\lambda)\varphi(\lambda).$$

Поэтому $\varphi(\lambda) = \bar{c}(\lambda)Vl^{-1}(\psi(\lambda))$. Коэффициент $c(\lambda)$ определяется из условия нормировки. Лемма 2 доказана.

Функцию $\lambda \rightarrow \mu_n^+(\lambda)$ в окрестности точки λ_∞ мы определяем равенством (14).

ЛЕММА 3. *Справедлива формула*

$$\left. \frac{d\mu_\infty^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_\infty} = -\langle \psi_\infty, V_\infty \psi_\infty \rangle^{-1}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (16) на $(\lambda E - A_0)$, получаем

$$\mu_\infty^+(\lambda)(\lambda E - A_0)\psi_\infty(\lambda) = V_\infty \psi_\infty(\lambda), \quad \text{Im } \lambda > 0.$$

Скалярно умножая последнее уравнение на $\psi_\infty(\lambda_\infty)$ и дифференцируя по λ , находим

$$\begin{aligned} & \langle \psi_\infty(\lambda_\infty), (\lambda E - A_0)\psi_\infty(\lambda) \rangle \frac{d\mu_\infty^+(\lambda)}{d\lambda} + \mu_\infty^+(\lambda) \langle \psi_\infty(\lambda_\infty), \psi_\infty(\lambda) \rangle + \\ & + \mu_\infty^+(\lambda) \left\langle \psi_\infty(\lambda_\infty), (\lambda E - A_0) \frac{d\psi_\infty(\lambda)}{d\lambda} \right\rangle = \left\langle \psi_\infty(\lambda_\infty), V_\infty \frac{d\psi_\infty(\lambda)}{d\lambda} \right\rangle. \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = \lambda_\infty + \epsilon$, $\epsilon \rightarrow +0$, получаем нужную формулу (23). Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что функция $\lambda \rightarrow (1 - \mu_\infty^+(\lambda))$ в точке λ_∞ имеет нуль первого порядка. Следовательно, при достаточно большом n функция $\lambda \rightarrow (1 - \mu_n^+(\lambda))$ в окрестности точки λ_∞ имеет нуль первого порядка. Мы обозначим его через λ_n ,

$$\mu_n^+(\lambda_n) = 1. \quad (24)$$

Легко видеть, что число λ_n при $\text{Im } \lambda_n \geq 0$ есть собственное значение оператора A_n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_\infty$. Оператор A_n самосопряжен и не имеет собственных значений в верхней полуплоскости. По предположению он не имеет собственных значений на интервале $(\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$. Следовательно, $\text{Im } \lambda_n < 0$, $n < \infty$.

ЛЕММА 4. *Если функция $\psi(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (16), то при $\lambda \in (\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$ выполнено равенство*

$$\text{Im } \mu^+(\lambda) \langle \psi(\lambda), V\psi(\lambda) \rangle = -\pi(U(V\psi(\lambda))(\lambda), U(V\psi(\lambda))(\lambda)). \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая равенство (16) в точке $\lambda + i\epsilon$ скалярно на $V\psi(\lambda + i\epsilon)$ и вычитая комплексно-сопряженное выражение, находим

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} \mu^+(\lambda + i\epsilon) \langle V\psi(\lambda + i\epsilon), \psi(\lambda + i\epsilon) \rangle = \\ = \langle V\psi(\lambda + i\epsilon), [R(\lambda + i\epsilon, A_0) - R(\lambda - i\epsilon, A_0)] V\psi(\lambda + i\epsilon) \rangle. \end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу $\epsilon \rightarrow +0$, получаем утверждение леммы 4.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{Im} \lambda_n}{\pi(UV_n \psi_n(\operatorname{Re} \lambda_n), UV_n \psi_n(\operatorname{Re} \lambda_n))} \right| = 1. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы равенства

$$1 - \mu_n^+(\operatorname{Re} \lambda_n) = \mu_n^+(\lambda_n) - \mu^+(\operatorname{Re} \lambda_n) = i \frac{d\mu_n^+(\operatorname{Re} \lambda_n)}{d\lambda} \operatorname{Im} \lambda_n + O((\operatorname{Im} \lambda_n)^2), \quad (27)$$

$$\operatorname{Im} \mu_n^+(\operatorname{Re} \lambda_n) = -\operatorname{Im} \left(i \frac{d\mu_n^+(\operatorname{Re} \lambda_n)}{d\lambda} \right) \operatorname{Im} \lambda_n + O((\operatorname{Im} \lambda_n)^2). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (25) и учитывая (23), получаем доказательство теоремы.

В физической литературе формулы для мнимой части полюса матрицы рассеяния часто называют правилом Ферми [3]–[5], [8], [9].

4. РЕЗОНАНСЫ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Для изучения резонансных свойств амплитуды рассеяния предположим, что существует такое непрерывное отображение $p: \Omega \rightarrow \Omega$, что в некоторой комплексной окрестности точки $\mu = 1$ и в некоторой комплексной окрестности интервала $(\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$ выполняется равенство

$$|\langle V l^{-1}(\psi), U^{-1}(\lambda, p(\omega)) \rangle| = |U(V\psi)(\lambda, \omega)|, \quad \forall \omega \in \Omega, \forall \psi \in \operatorname{Ker}(\mu E - \Gamma^\pm(\lambda)). \quad (29)$$

В теории потенциального рассеяния отображение U задается преобразованием Фурье, отображение l – комплексное сопряжение, пространство Ω – единичная сфера и отображение p задается формулой $p(\omega) = -\omega$. Равенство (29) в этом случае проверяется тривиально.

Как известно [10], оператор рассеяния $S(A_n, A_0)$ коммутирует с A_0 и в пространстве h задается операторной функцией

$$\lambda \rightarrow S_n(\lambda) \in L(L^2(\Omega, d\omega) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega)),$$

которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$S_n(\lambda) = \operatorname{id} - 2\pi i t_n^+(\lambda),$$

где id – единичный оператор в $L^2(\Omega, d\omega)$, а $t_n^+(\lambda)$ – интегральный оператор в $L^2(\Omega, d\omega)$ с ядром

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2) = U(T_n^+(\lambda) U^{-1}(\lambda, \omega_2))(\lambda, \omega_1), \quad (30)$$

где

$$T_n^+(\lambda) = V_n + V_n R^+(\lambda, A_n) V_n, \quad |\lambda - \lambda_\infty| < \delta, \quad \lambda \neq \lambda_\infty. \quad (31)$$

ЛЕММА 5. Оператор $T_n^+(\lambda)$ при достаточно больших n может быть записан в виде

$$T_n^+(\lambda) = r_n(\lambda) + T_n^+(\lambda)_{\text{reg}}, \quad (32)$$

где оператор $T_n^+(\lambda)_{\text{reg}}$ аналитичен по λ в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \delta$ как функция со значениями в $L(H_+ \rightarrow H_-)$ и равномерно по λ имеет предел при $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\lambda - \lambda_\infty| < \delta} \|(T_n^+(\lambda)_{\text{reg}} - T_\infty^+(\lambda)_{\text{reg}})|L(H_+ \rightarrow H_-)\| = 0. \quad (33)$$

Оператор $r_n(\lambda)$ дается формулой

$$r_n(\lambda)f = \frac{c_n(\lambda)\mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), f \rangle V_n \psi_n(\lambda). \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из второго резольвентного уравнения следует, что

$$R^+(\lambda, A_n) = (E - \Gamma_n^+(\lambda))^{-1} R^+(\lambda, A_0).$$

Так как точка $\mu_n^+(\lambda)$ есть полюс первого порядка для $(\mu E - \Gamma_n^+(\lambda))^{-1}$, то

$$(E - \Gamma_n^+(\lambda))^{-1} = \frac{P_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} + S_n(\lambda)_{\text{reg}},$$

где оператор $S_n(\lambda)_{\text{reg}}$ аналитичен по λ и при $n \rightarrow \infty$ равномерно по λ сходится к оператору $S_\infty(\lambda)_{\text{reg}}$. Следовательно,

$$T_n^+(\lambda) = \frac{V_n P_n^+(\lambda) \Gamma_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} + T_n^+(\lambda)_{\text{reg}},$$

где

$$T_n^+(\lambda)_{\text{reg}} = V_n + V_n S_n(\lambda)_{\text{reg}} V_n.$$

Пользуясь леммой 2, можно записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} V_n P_n^+(\lambda) \Gamma_n^+(\lambda) f &= c_n(\lambda) \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), R^+(\lambda, A_0) V_n f \rangle V_n \psi_n(\lambda) = \\ &= c_n(\lambda) \langle R^-(\bar{\lambda}, A_0) V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), V_n f \rangle V_n \psi_n(\lambda) = \\ &= c_n(\lambda) \langle \Gamma_n^-(\bar{\lambda}) l^{-1}(\psi_n(\lambda)), V_n f \rangle V_n \psi_n(\lambda) = \\ &= c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda) \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), f \rangle V_n \psi_n(\lambda). \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Из леммы 5 следует, что ядро (30) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2) &= \frac{c_n(\lambda)\mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), U^{-1}(\lambda, \omega_2) \rangle \times \\ &\times U(V_n \psi_n(\lambda))(\lambda, \omega_1) + t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}}, \end{aligned} \quad (35)$$

где при $\lambda \in (\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$ и $n < \infty$ или при $n = \infty$ и $\lambda \neq \lambda_\infty$ имеем

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}} = U(T_n^+(\lambda)_{\text{reg}} U^{-1}(\lambda, \omega_2))(\lambda, \omega_1). \quad (36)$$

Из леммы 5 с очевидностью вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 6. 1. Для определенной формулой (36) функции условие

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}} \rightarrow t_\infty^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

выполняется равномерно по $\lambda \in (\lambda_\infty - \delta; \lambda_\infty + \delta)$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

2. Для определенной формулой (35) функции условие

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2) \rightarrow t_\infty^+(\lambda, \omega_1, \omega_2), \quad n \rightarrow \infty,$$

выполняется при фиксированном $\lambda \neq \lambda_\infty$ равномерно по $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

ЛЕММА 7. Если отображение p удовлетворяет условию (29), то

$$\lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} \sup_{\omega \in \Omega} |t_\infty^+(\lambda, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega))| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$W_n(\lambda, \omega) = U(V_n \psi_n(\lambda))(\lambda, \omega).$$

Из леммы 5 следует, что

$$|t_\infty^+(\lambda, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega))| = |c_\infty(\lambda) \mu_\infty^+(\lambda) (1 - \mu_\infty^+(\lambda))^{-1}| |W_\infty(\lambda, \omega)|^2.$$

Функция $\lambda \rightarrow W_\infty(\lambda, \omega)$ аналитична по λ как функция со значениями в $C(\Omega)$. Из леммы 4 следует, что

$$\|U(V_\infty \psi_\infty)(\lambda_\infty) |L^2(\Omega, d\omega)\| = 0.$$

В силу непрерывности по совокупности переменных функции

$$(\lambda, \omega) \rightarrow U(V_\infty \psi_\infty)(\lambda, \omega)$$

отсюда следует, что

$$U(V_\infty \psi_\infty)(\lambda_\infty, \omega) \equiv 0. \quad (37)$$

Поэтому функция $W_\infty(\lambda, \omega)$ в точке λ_∞ имеет нуль. Функция $\lambda \rightarrow (1 - \mu_\infty^+(\lambda))$ в точке λ_∞ имеет нуль первого порядка, что и доказывает лемму 7.

Из леммы 7 следует, что

$$\lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} \int |t_\infty^+(\lambda, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega))| d\omega = 0. \quad (38)$$

Приступим к изложению основного результата. Положим по определению

$$\text{v.p.} t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega)) = \lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} t_\infty^+(\lambda, \omega, p(\omega)). \quad (39)$$

Существование предела вытекает из предыдущей леммы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ν_n – последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию

$$|\nu_n - \operatorname{Re} \lambda_n| = O((\operatorname{Im} \lambda_n)^{1+\epsilon}), \quad \epsilon > 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Тогда справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega)) - \text{v.p. } t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega))| d\omega = \frac{|\beta|}{\pi}, \quad (41)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega)) - t_\infty^+(\nu_n, \omega, p(\omega))| d\omega = \frac{|\beta|}{\pi}, \quad (42)$$

где β – константа из (50) (см. ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что утверждения (41) и (42) эквивалентны в силу определения (39). Имеем тождественно

$$\begin{aligned} t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega)) - t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_\infty &= t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega)) - t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} + \\ &+ t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_\infty^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} + \\ &+ t_\infty^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_\infty. \end{aligned} \quad (43)$$

Из леммы 6 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_\omega |t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_\infty^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}}| = 0. \quad (44)$$

Из леммы 7 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_\omega |t_\infty^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_\infty| = 0. \quad (45)$$

Из леммы 4 и соотношений (29) и (35) следует, что

$$\begin{aligned} \int |t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega)) - t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega))_{\text{reg}}| d\omega &= \\ &= |c_n(\nu_n)(1 - \mu_n(\nu_n))^{-1}| \int |W_n(\nu_n, \omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} |c_n(\nu_n)(1 - \mu_n(\nu_n))^{-1}| |\langle \psi_n(\nu_n), V_n \psi_n(\nu_n) \rangle \operatorname{Im} \mu_n^+(\nu_n)|. \end{aligned} \quad (46)$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, и учитывая условие (40), получаем

$$1 - \mu_n^+(\nu_n) = \mu_n^+(\lambda_n) - \mu^+(\nu_n) = i \frac{d\mu_n^+(\nu_n)}{d\lambda} \operatorname{Im} \lambda_n + O((\operatorname{Im} \lambda_n)^{1+\epsilon}), \quad (47)$$

$$\operatorname{Im} \mu_n^+(\nu_n) = - \operatorname{Im} \left(i \frac{d\mu_n^+(\nu_n)}{d\lambda} \right) \operatorname{Im} \lambda_n + O((\operatorname{Im} \lambda_n)^{1+\epsilon}). \quad (48)$$

Из формулы (23) следует, что производная

$$\left| \frac{d\mu_\infty^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_\infty}$$

является действительным числом. Поэтому из равенств (47) и (48) находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Im} \mu_n^+(\nu_n)(1 - \mu_n^+(\nu_n))^{-1}| = 1. \quad (49)$$

Из (7) следует, что

$$l(\psi_\infty) = \beta \psi_\infty, \quad \beta \neq 0. \quad (50)$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n(\nu_n) \langle \psi_n(\nu_n), V_n \psi_n(\nu_n) \rangle| = |\langle \psi_\infty, V_\infty \psi_\infty \rangle \langle l^{-1}(\psi_\infty), V_\infty \psi_\infty \rangle^{-1}| = |\beta|. \quad (51)$$

Теперь утверждение теоремы 2 является следствием приведенных равенств (43)–(51). Теорема 2 доказана.

Для радиального уравнения Шредингера пространство Ω состоит из одной точки и утверждение теоремы 2 эквивалентно утверждению о скачке фазы рассеяния на π , т.е. совпадает со следствием формулы Крейна–Бирмана. В общем случае связь теоремы 2 с формулой Крейна–Бирмана для нас не ясна.

Благодарности. Первоначальный вариант этой работы опубликован в [11]. Автор благодарен Л. Аркериду и А. Гейнтцу за гостеприимство. Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00271.

Список литературы

- [1] *J. S. Howland.* J. Math. Anal. Appl. 1975. V. 50. P. 415–437.
- [2] *B. Simon.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3523–3555.
- [3] *M. Mercili, I. M. Sigal.* Commun. Math. Phys. 1999. V. 201. P. 549–576.
- [4] *S. Agmon.* Commun. Pure Appl. Math. 1988. V. 51. P. 1255–1309.
- [5] *A. Sotter, M. I. Weinstein.* Geom. Funct. Anal. 1998. V. 8. P. 1086–1128.
- [6] *S. Albeverio, R. Hoegh-Kron.* J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 101. P. 491–513.
- [7] *А. А. Арсеньев.* ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 214–232.
- [8] *Ф. Хелзен, А. Мартин.* Кварки и лептоны. М.: Мир, 1987.
- [9] *J. Dereziński, V. Jakšić.* J. Funct. Anal. 2001. V. 180. P. 243–250.
- [10] *М. Ш. Бирман, С. Б. Энтина.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 401–430.
- [11] *А. А. Арсеньев.* Model of Resonance Scattering. Preprint № 2000:15. Göteborg: Department of Mathematics Chalmers University of Technology Göteborg University, 2000.

Поступила в редакцию 7.IX.2001 г.,
после доработки 12.IX.2002 г.