Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Апилян, М. А. Барсамян, К. Д. Эфtimiу, Геометрические свойства W -алгебр и модель Тоды, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 2, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf16>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:43:04

© 2004 г. С. А. Апибян*, М. А. Барсамян†, К. Д. Эфтимии‡

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА W -АЛГЕБР И МОДЕЛЬ ТОДЫ

Строятся минимальные модели W -алгебр на гиперэллиптических римановых поверхностях. С помощью гипотезы Полякова функция распределения в теории поля Тоды на некоторой гиперэллиптической поверхности сводится к произведению функций распределения: теории “свободного поля” на сфере с включенными вершинными операторами Тоды и теории свободного скалярного поля с антипериодическими граничными условиями и включенными полями твистов.

Ключевые слова: конформная теория поля, интегрируемые системы, теория поля Тоды, гиперэллиптические поверхности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время квантовая конформная теория поля (КТП) на компактных римановых поверхностях актуальна по двум основным причинам. Во-первых, такая теория представляет интерес с математической точки зрения [1], во-вторых, она важна для понимания пертурбативного описания физики критических и некритических струн [2]. Однако аналитические вычисления на компактных римановых поверхностях возможны только в ограниченном количестве случаев. В настоящей работе мы даем описание W -алгебры и модели Тоды для некоторого подкласса римановых поверхностей — гиперэллиптических, имеющих то преимущество, что большинство вычислений на них можно проводить аналитически. Накопленный опыт таких вычислений позволит нам сначала полнее изучить римановы $\mathbb{Z}_n$ -поверхности, а затем и более общие случаи. Гиперэллиптические поверхности (ГЭП) широко используются в двухпетлевых вычислениях в теории струн и в теориях интегрируемых моделей [3] и Виттена–Зайберга [4], а также в областях, объединяющих эти теории [5].

*Ереванский государственный университет, Ереван, Армения. E-mail: apikyan@lx2.yerphi.am

†Department of Mathematics, State University of New York, Stony Brook, New York, USA.
E-mail: markbarsamian@yahoo.com

‡Department of Physics, University of Central Florida, Orlando, Florida, USA.
E-mail: costas@physics.ucf.edu

Конформные преобразования в двумерной теории поля порождаются тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$. Голоморфные (антиголоморфные) преобразования $z \rightarrow f(z)$ ($\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$) порождаются голоморфной (антиголоморфной) компонентой этого тензора $T(z) = T^{11} - T^{22} + 2iT^{12}$ ($\bar{T}(\bar{z}) = T^{11} - T^{22} - 2iT^{12}$). При бесконечно малых (инфинитезимальных) конформных преобразованиях $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ ($\bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$) образующие, соответствующие параметрам ϵ_n в разложениях Лорана функции $\epsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^{n+1}$ ($\bar{\epsilon} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}$), — это операторы L_n ($\bar{L}_n$), которые являются коэффициентами Лорана в разложении тензора энергии-импульса:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}.$$

Образующие конформной симметрии порождают алгебру Виасоро

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \quad (1)$$

где число c называется центральным зарядом и является весьма важным параметром в КТП.

Пространство полей $\{A\}$ в КТП можно классифицировать в соответствии с неприводимыми представлениями алгебры Виасоро:

$$\{A\} = \bigoplus_{(\Delta, \bar{\Delta})} [\phi_{\Delta, \bar{\Delta}}], \quad (2)$$

где $\phi_{\Delta, \bar{\Delta}}$ — основные поля:

$$L_n \phi_{\Delta, \bar{\Delta}} |\emptyset\rangle = 0, \quad n > 0, \quad L_0 \phi_{\Delta, \bar{\Delta}} |\emptyset\rangle = \Delta \phi_{\Delta, \bar{\Delta}} |\emptyset\rangle,$$

характеризующиеся параметром Δ , который называется *аномальной размерностью поля* $\phi_{\Delta, \bar{\Delta}}$.

Конформная группа не исчерпывает всех симметрий в двумерных квантовых теориях поля. В настоящее время построено несколько двумерных квантовых КТП с дополнительными симметриями. Они характеризуются тем, что, кроме конформной инвариантности, содержат дополнительные бесконечномерные симметрии, порождаемые другими сохраняющимися токами. Примерами таких квантовых теорий поля являются: гиперконформная теория поля размерности $N = 1$, которая в дополнение к сохраняющемуся тензору энергии-импульса $T, \bar{T}$ имеет дополнительные сохраняющиеся токи $G, \bar{G}$ размерностей $(3/2, 0)$, $(0, 3/2)$; алгебры Каца–Мури [6], порождаемые тензором энергии-импульса $T, \bar{T}$ и сохраняющимися токами $J, \bar{J}$ размерностей $(1, 0)$, $(0, 1)$; так называемые W -алгебры [7], являющиеся нелинейными продолжениями конформной алгебры, порождаемой полями с большими значениями спина. Основным примером W -алгебры является W_3 -алгебра Замолдчикова [8], которая описывает квантовую конформную теорию поля с дополнительными симметриями, порождаемыми сохраняющимися

токами размерностей $(3, 0)$, $(0, 3)$. Образующие W_3 -алгебры удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [L_n, W_m] &= (n - m)W_{m+n}, \\ [W_n, W_m] &= (n - m) \left[\frac{(n + m + 2)(n + m + 3)}{15} - \frac{(n + 2)(m + 2)}{6} \right] L_{n+m} + \\ &\quad + \frac{c}{3 \cdot 5!} (n^2 - 4)(n^3 - n) \delta_{n+m, 0} + b^2 (n - m) \Lambda_{n+m}, \end{aligned}$$

где

$$b^2 = \frac{16}{22 + 5c}, \quad \Lambda_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} :L_k L_{n-k}: + \frac{1}{5} \rho L_n,$$

а W_n — коэффициенты Лорана сохраняющихся токов размерности $(3, 0)$:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n z^{-n-3}. \quad (3)$$

Следует отметить, что W -алгебра содержит алгебру Вирасоро как подалгебру.

Теория поля Тоды (ТПТ) дает чрезвычайно полезное описание большого класса теорий двумерных интегрируемых квантовых полей. Теории поля Тоды можно разделить на следующие три категории: конечные теории поля Тоды (КТПТ), для которых основной алгеброй является конечная алгебра Ли; аффинные теории поля Тоды, для которых основной алгеброй является аффинная алгебра; неопределенные теории поля Тоды (НТПТ), для которых основной алгеброй является неопределенная алгебра Каца–Мули. Классы КТПТ и аффинные ТПТ хорошо изучены. Известно, что они интегрируемые. Действие КТПТ задается соотношением

$$S = \int d^2 x \left[\frac{1}{8\pi} (\partial\phi)^2 + \mu \sum_i e^{b\mathbf{e}_i \cdot \phi} \right],$$

где $\mathbf{e}_i$ — простые корни алгебры Ли, b — константа связи, а μ — константа, называемая космологической. Эти теории конформно-инвариантны. Кроме того, они обладают высшими симметриями, описываемыми W -алгебрами.

В следующем разделе мы получим минимальную модель W -алгебры на гиперэллиптических римановых поверхностях. Затем в разделе 3 мы покажем, что, используя гипотезу Полякова [9], можно свести функцию распределения ТПТ на некоторой ГЭП к произведению двух функций распределения: теории “свободного поля” на сфере с включенными вершинными операторами Тоды и теории свободного скалярного поля с анти-периодическими граничными условиями и включенными полями твистов.

2. W -АЛГЕБРА НА ГЭП

ГЭП Γ_g является компактной римановой поверхностью рода $g \geq 1$ и задается алгебраическим уравнением вида

$$y^2(z) = P_{2g+2}(z) = \prod_{i=1}^{2g+2} (z - x_i), \quad (4)$$

где $P_{2g+2}(z)$ — полином степени $2g + 2$. Другими словами, Γ_g — это двулистное разветвленное накрытие римановой сферы. Следует заметить, что любая риманова поверхность рода $g = 1$ или $g = 2$ имеет вид (4), тогда как в случае рода $g \geq 3$ это не так.

Нашей целью является изучение гиперэллиптической формулировки W -алгебры и моды Тоды. Фактически это означает, что мы сведем W -алгебры и модели Тоды на ГЭП к эквивалентным моделям W -алгебры и моделям Тоды на плоскости с нетривиальными граничными условиями.

При гиперэллиптическом отображении (4) или, что эквивалентно, при отображении

$$y^{(k)}(z) = (-)^k \prod_{i=1}^{2g+2} (z - x_i)^{1/2}, \quad k = 0, 1, \quad (5)$$

любое поле $\phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(y)$ в КТП на Γ_g отображается в два поля

$$\phi^{(k)}(z) = \left(\frac{dy^{(k)}}{dz} \right)^{\Delta} \phi(y^{(k)}), \quad k = 0, 1.$$

Каждая компонента поля существует на соответствующем римановом листе. Кроме того, мы должны учитывать свойства монодромии полей в соответствии с $\mathbb{Z}_2$ -структурой ГЭП [10]; в частности, наше построение будет довольно близко следовать построениям Крнковича и других. Следует различать два типа монодромического поведения: один в точках ветвления и другой вне этих точек. При аналитических преобразованиях

$$\pi_x z = (z - x)e^{2\pi i} + x, \quad \pi_x y^{(k)} = y^{(k+1)}$$

получаются следующие граничные условия для квантовых полей:

$$\begin{aligned} \pi_x \phi^{(0)}(z) &= e^{-2\pi i(\Delta - \bar{\Delta})} \phi^{(1)}(z), & \pi_x \phi^{(1)}(z) &= \phi^{(0)}(z), \\ \pi \phi^{(k)}(z) &= e^{-2\pi i(\Delta - \bar{\Delta})} \phi^{(k)}(z), & k &= 0, 1. \end{aligned}$$

При преобразовании (5) каждый из сохраняющихся токов $T(y)$, $W(y)$ на Γ_g также отображается на два поля $T^{(k)}$, $W^{(k)}$, $k = 0, 1$. Соответствующие операторные уравнения

можно легко выписать, поэтому здесь мы их опускаем. Эти операторные уравнения дополняются свойствами монодромии образующих $T^{(k)}, W^{(k)}, k = 0, 1$:

$$\begin{aligned}\pi_x T^{(0)}(z) &= T^{(1)}(z), & \pi_x T^{(1)}(z) &= T^{(0)}(z), \\ \pi_x W^{(0)}(z) &= W^{(1)}(z), & \pi_x W^{(1)}(z) &= W^{(0)}(z), \\ \pi T^{(k)}(z) &= T^{(k)}(z), & \pi W^{(k)}(z) &= W^{(k)}(z).\end{aligned}$$

Более полезно перейти к $\mathbb{Z}_2$ -диагональному базису. Введем определения

$$\begin{aligned}T &\equiv T^{(0)} + T^{(1)}, & \tilde{T} &\equiv T^{(0)} - T^{(1)}, \\ W &\equiv W^{(0)} + W^{(1)}, & \widetilde{W} &\equiv W^{(0)} - W^{(1)}.\end{aligned}$$

В этом базисе свойства монодромии имеют вид

$$\pi T = T, \quad \pi \tilde{T} = \tilde{T}, \quad \pi W = W, \quad \pi \widetilde{W} = \widetilde{W}$$

для π и

$$\pi_x T = T, \quad \pi_x \tilde{T} = -\tilde{T}, \quad \pi_x W = W, \quad \pi_x \widetilde{W} = -\widetilde{W}$$

для π_x . Заметим, что они очевидным образом идентифицируют скрученный и нескрученный секторы, соответственно.

Операторные уравнения для новых образующих легко получаются с помощью непосредственных вычислений. Мы оставляем это простое упражнение читателю. Чтобы записать эту алгебру в коммутаторной форме, выпишем разложение $T, \tilde{T}, W, \widetilde{W}$ по модам:

$$\begin{aligned}T(z)V_l(0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-2} L_{-n} V_l(0), & \tilde{T}(z)V_l(0) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{m-2-l/2} \tilde{L}_{-m+l/2} V_l(0), \\ W(z)V_l(0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-3} W_{-n} V_l(0), & \widetilde{W}(z)V_l(0) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{m-3-l/2} \widetilde{W}_{-m+l/2} V_l(0),\end{aligned}$$

где $l \in \{0, 1\}$ различает два сектора: $l = 0$ относится к нескрученному сектору, а $l = 1$ — к скрученному. Затем, проводя стандартные вычисления, получим следующие коммутационные соотношения для операторов $L_n, \tilde{L}_{n+l/2}, W_n, \widetilde{W}_{n+l/2}$:

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\ [L_n, W_m] &= (n - m)W_{m+n}, \\ [W_n, W_m] &= (n - m) \left[\frac{(n + m + 2)(n + m + 3)}{15} - \frac{(n + 2)(m + 2)}{6} \right] L_{n+m} + \\ &\quad + \frac{c}{3 \cdot 5!}(n^2 - 4)(n^3 - n)\delta_{n+m,0} + b^2(n - m)\Lambda_{n+m},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{L}_{n+l/2}, \tilde{L}_{m+l/2}] &= (n-m)L_{n+m+l} + \frac{\hat{c}}{12} \left[\left(n + \frac{l}{2} \right)^3 - \left(n + \frac{l}{2} \right) \right] \delta_{n+m+l,0}, \\
[L_n, \tilde{L}_{m+l/2}] &= \left(n - m - \frac{l}{2} \right) \tilde{L}_{m+n+l/2}, \\
[\tilde{L}_{n+l/2}, W_m] &= (2n+l-m) \widetilde{W}_{m+n+l/2}, \\
[L_n, \widetilde{W}_{m+l/2}] &= \left(2n - m - \frac{l}{2} \right) \widetilde{W}_{m+n+l/2}, \\
[\tilde{L}_{n+l/2}, \widetilde{W}_{m+l/2}] &= \left(2n - m + \frac{l}{2} \right) W_{m+n}, \\
[\widetilde{W}_{n+l/2}, \widetilde{W}_{m+l/2}] &= (n-m) \left[\frac{1}{15} (n+m+l+2)(n+m+l+3) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} \left(n + \frac{l}{2} + 2 \right) \left(m + \frac{l}{2} + 2 \right) \right] L_{n+m+l} + b^2 (n-m) \Lambda_{n+m+l} + \\
&\quad + \frac{\hat{c}}{3 \cdot 5!} \left[\left(n + \frac{l}{2} \right)^2 - 4 \right] \left[\left(n + \frac{l}{2} \right)^3 - \left(n + \frac{l}{2} \right) \right] \delta_{n+m+l,0}, \\
[W_n, \widetilde{W}_{m+l/2}] &= \left(n - m - \frac{l}{2} \right) \left[\frac{1}{15} \left(n + m + \frac{l}{2} + 2 \right) \left(n + m + \frac{l}{2} + 3 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} (n+2) \left(m + \frac{l}{2} + 2 \right) \right] \tilde{L}_{n+m+l/2} + b^2 \left(n - m - \frac{l}{2} \right) \tilde{\Lambda}_{n+m+l/2}.
\end{aligned}$$

Эти коммутационные соотношения образуют W -алгебру на ГЭП W_Γ .

Пространство полей $\{A\}$ можно разложить на два подпространства: одно – скрученное $\{A_1\}$, другое – нескрученное $\{A_0\}$, которые можно далее классифицировать в соответствии с неприводимыми представлениями W -алгебры на ГЭП:

$$\{A\} = \{A_0\} + \{A_1\} = \bigoplus_i [V_{0i}] + \bigoplus_i [V_{1i}].$$

Подпространства $[V_{l,i}]$ образуют построенный над основным полем $V_{l,i}$ модуль, удовлетворяющий уравнениям

$$\begin{aligned}
L_0 V_{0i} &= \Delta_i V_{0i}, & \tilde{L}_0 V_{0i} &= \tilde{\Delta}_i V_{0i}, & L_n V_{0i} &= \tilde{L}_n V_{0i} = 0, & n > 0, \\
W_0 V_{0i} &= \omega_i V_{0i}, & \widetilde{W}_0 V_{0i} &= \tilde{\omega}_i V_{0i}, & W_n V_{0i} &= \widetilde{W}_n V_{0i} = 0, & n > 0,
\end{aligned}$$

в нескрученном секторе и

$$\begin{aligned}
L_0 V_{1i} &= \Delta_i V_{1i}, & L_n V_{1i} &= \tilde{L}_{n-1/2} V_{1i} = 0, & n > 0, \\
W_0 V_{1i} &= \omega_i V_{1i}, & W_n V_{1i} &= \widetilde{W}_{n-1/2} V_{1i} = 0, & n > 0,
\end{aligned}$$

в скрученном секторе.

Доценко и Фатеев [11] развили мощный метод, известный как представление кулоновского газа квантовой конформной модели на сфере, который дает полное решение для корреляционных функций в минимальной модели на сфере. Они смогли написать интегральные представления конформных блоков через корреляционные функции вершинных операторов свободного бозонного скалярного поля φ с фоновым зарядом α_0 . Мы обобщим этот метод на случай W -алгебры на ГЭП. Для этого введем двухкомпонентное свободное безмассовое бозонное поле $\varphi^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)})$ на каждом листе $k = 0, 1$. Можно проверить, что представление кулоновского газа

$$\begin{aligned} T^{(k)} &= -\frac{1}{4}:(\partial\varphi_1^{(k)})^2: - \frac{1}{4}:(\partial\varphi_2^{(k)})^2: + i\alpha_0\partial^2\varphi_1^{(k)}, \\ \frac{12i}{b}W^{(k)} &= :(\partial\varphi_2^{(k)})^3: - 3:(\partial\varphi_1^{(k)})^2\partial\varphi_2^{(k)}: + 3i\alpha_0:\partial^2\varphi_1^{(k)}\partial\varphi_2^{(k)}: + \\ &\quad + 9i\alpha_0:\partial\varphi_1^{(k)}\partial^2\varphi_2^{(k)}: + 6\alpha_0^2\partial^3\varphi_2^{(k)} \end{aligned}$$

при $c = 2 - 24\alpha_0^2$ удовлетворяет всем требуемым операторным разложениям, если задан пропагатор

$$\langle\varphi_i^{(k_1)}(z)\varphi_j^{(k_2)}(z')\rangle = -2\delta_{ij}\delta_{k_1k_2}\ln(z-z'), \quad k_1, k_2 \in \{0, 1\}.$$

Поля также удовлетворяют условиям

$$\pi_x\partial\varphi_i^{(0)} = \partial\varphi_i^{(1)}, \quad \pi_x\partial\varphi_i^{(1)} = \partial\varphi_i^{(0)}, \quad \pi\partial\varphi_i^{(k)} = \partial\varphi_i^{(k)}.$$

Запишем поля в базисе, в котором операторы являются диагональными:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_i^{(0)} + \varphi_i^{(1)}, \quad \tilde{\varphi}_i = \varphi_i^{(0)} - \varphi_i^{(1)}, \\ \pi_x\partial\varphi_i &= \partial\varphi_i, \quad \pi_x\partial\tilde{\varphi}_i = -\partial\tilde{\varphi}_i, \quad \pi\partial\varphi_i = \partial\varphi_i, \quad \pi\partial\tilde{\varphi}_i = \partial\tilde{\varphi}_i, \\ \langle\varphi_i(z)\varphi_j(z')\rangle &= \langle\tilde{\varphi}_i(z)\tilde{\varphi}_j(z')\rangle = -4\delta_{ij}\ln(z-z'). \end{aligned}$$

Сравнивая свойства этих полей со свойствами объемных свободных полей на сфере, сразу обнаружим нетривиальные монодромические свойства, определяемые структурой ГЭП. В терминах новых свободных бозонных полей образующие токи W -алгебры можно записать в виде

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{8}:(\partial\varphi_1)^2: - \frac{1}{8}:(\partial\varphi_2)^2: - \frac{1}{8}:(\partial\tilde{\varphi}_1)^2: - \frac{1}{8}:(\partial\tilde{\varphi}_2)^2: + i\alpha_0\partial^2\varphi_1, \\ \tilde{T} &= -\frac{1}{4}:\partial\tilde{\varphi}_1\partial\varphi_1: - \frac{1}{4}:\partial\tilde{\varphi}_2\partial\varphi_2: + i\alpha_0\partial^2\tilde{\varphi}_1, \\ \frac{24i}{b}W &= \frac{1}{2}:(\partial\varphi_2)^3: - \frac{3}{2}\left[:(\partial\varphi_1)^2\partial\varphi_2: + :(\partial\tilde{\varphi}_1)^2\partial\varphi_2: - :(\partial\tilde{\varphi}_2)^2\partial\varphi_2:\right] + \\ &\quad + 3i\alpha_0[:\partial^2\varphi_1\partial\varphi_2: + :\partial^2\tilde{\varphi}_1\partial\tilde{\varphi}_2:] + 9i\alpha_0[:\partial\varphi_1\partial^2\varphi_2: + :\partial\tilde{\varphi}_1\partial^2\tilde{\varphi}_2:] - \\ &\quad - 3:\partial\varphi_1\partial\tilde{\varphi}_1\partial\tilde{\varphi}_2: + 12\alpha_0^2\partial^3\varphi_2, \\ \frac{24i}{b}\tilde{W} &= \frac{1}{2}:(\partial\tilde{\varphi}_2)^3: - \frac{3}{2}\left[:(\partial\varphi_1)^2\partial\tilde{\varphi}_2: + :(\partial\tilde{\varphi}_1)^2\partial\tilde{\varphi}_2: - :(\partial\varphi_2)^2\partial\tilde{\varphi}_2:\right] + \\ &\quad + 3i\alpha_0[:\partial^2\varphi_1\partial\tilde{\varphi}_2: + :\partial^2\tilde{\varphi}_1\partial\varphi_2:] + 9i\alpha_0[:\partial\varphi_1\partial^2\tilde{\varphi}_2: + :\partial\tilde{\varphi}_1\partial^2\varphi_2:] - \\ &\quad - 3:\partial\varphi_1\partial\tilde{\varphi}_1\partial\varphi_2: + 12\alpha_0^2\partial^3\tilde{\varphi}_2, \end{aligned}$$

где центральный заряд имеет вид $\hat{c} = 4 - 48\alpha_0^2$. Анализируя величину центрального заряда и представление токов через свободные бозоны, можно заметить, что фактически мы имеем составную теорию, которая распадается в прямую сумму двух теорий: одна – теория бозонного свободного поля на сфере с периодическими граничными условиями и центральным зарядом $\hat{c}_s = 2 - 48\alpha_0^2$, другая – теория бозонного свободного поля с антипериодическими граничными условиями и центральным зарядом $\hat{c}_o = 2$.

Теперь мы построим представления примарных полей для каждого подпространства, используя вершинные операторы бозонных полей.

В нескрученном подпространстве вершинные операторы вида $V_0 = e^{i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varphi} + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varphi}}$ имеют аномальные размерности

$$\Delta = 2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - 2\alpha_0), \quad \tilde{\Delta} = 4\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \alpha_0) \quad (6)$$

и веса

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{4}{3}b[a_2^3 - 3(a_1^2a_2 + b_1^2a_2 - b_2^2a_2) + 6\alpha_0(a_1a_2 + b_1b_2) - 6a_1b_1b_2 - 3\alpha_0^2a_2], \\ \tilde{\omega} &= \frac{4}{3}b[b_2^3 - 3(a_1^2b_2 + b_1^2b_2 - a_2^2b_2) + 6\alpha_0(a_1b_2 + b_1a_2) - 6a_1b_1a_2 - 3\alpha_0^2b_2]. \end{aligned} \quad (7)$$

В этих выражениях мы полагаем, что $\alpha_0 = (\alpha_0, 0)$.

Подпространство $[V_{0i}]$ порождается всеми возможными векторами вида

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \tilde{L}_{-n'_1} \dots \tilde{L}_{-n'_k} W_{-m_1} \dots W_{-m_k} \widetilde{W}_{-m'_1} \dots \widetilde{W}_{-m'_k} V_{0i} |\emptyset\rangle,$$

где $n, n', m, m' > 0$.

Заметим, что для размерностей и весов основных полей выполняются следующие соотношения симметрии:

$$\begin{aligned} \Delta(2\alpha_0 - \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \Delta(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \tilde{\Delta}(2\alpha_0 - \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \tilde{\Delta}(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = -\tilde{\Delta}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ \omega(2\alpha_0 - \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \omega(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = -\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \tilde{\omega}(2\alpha_0 - \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \tilde{\omega}(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = \tilde{\omega}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{a}^* = (a_1, -a_2)$ и $\mathbf{b}^* = (-b_1, b_2)$. Из этих соотношений симметрии следует, что пространство $[V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}]$ эквивалентно пространству $[V_{2\alpha_0 - \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*}]$.

В скрученном подпространстве ситуация несколько иная. Здесь мы имеем антипериодическое бозонное поле $\partial\tilde{\varphi}$. Антипериодические граничные условия приводят к деформации геометрии, антипериодические свойства тока $\partial\tilde{\varphi}$ в операторных уравнениях обеспечиваются введением рамоновского поля твиста $\sigma(z)$ [12]. Более подробно, операторное произведение тока $\tilde{I} = i\partial\tilde{\varphi}$ на поле σ имеет вид

$$\tilde{I}(z)\sigma(0) = \frac{1}{2}z^{-1/2}\hat{\sigma}(0) + \dots,$$

где $\hat{\sigma} = \tilde{I}_{-1/2}\sigma$ и

$$\tilde{I}(z)\hat{\sigma}(0) = \frac{1}{2}z^{-3/2}\sigma(0) + 2z^{-1/2}\sigma'(0) + \dots$$

Поля σ и $\hat{\sigma}$ — это примарные поля по отношению к тензору энергии-импульса

$$T_{\text{orb}} = -\frac{1}{8}(\partial\tilde{\varphi}_1)^2 - \frac{1}{8}(\partial\tilde{\varphi}_2)^2$$

с аномальными размерностями $\Delta = 1/16$ и $\hat{\Delta} = 9/16$, соответственно.

В скрученном секторе можно записать примарные поля в виде

$$V_1 = e^{i\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\varphi}}\sigma$$

с аномальными размерностями и весом

$$\begin{aligned}\Delta &= 2\mathbf{d}(\mathbf{d} - 2\boldsymbol{\alpha}_0) + \frac{1}{8}, \\ \omega &= \frac{4}{3}d_2b(d_2^2 - 3d_1^2 + 6\alpha_0d_1 - 3\alpha_0^2) + \frac{b}{4}\left(\frac{d_2}{8} + \frac{d_1}{2} - b\alpha_0\right).\end{aligned}\tag{8}$$

Легко заметить симметрию

$$\Delta(2\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{d}) = \Delta(\mathbf{d}^*) = \Delta(\mathbf{d}).$$

Операторные разложения примарных полей с $T(z)$ и $W(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{T}(z)V(0) &= \frac{i}{4}(2d_1 + 2d_2 - \alpha_0)\frac{1}{z^{3/2}}\widehat{V}(0) + \dots, \\ \widetilde{W}(z)V(0) &= \frac{b}{8i}\left(4d_1^2 - 4d_2^2 - \frac{3}{8}\frac{1}{16} - 5\alpha_0d_1 - 7\alpha_0d_2 + 8d_1d_2 + \frac{3}{2}\alpha_0^2\right)\frac{1}{z^{5/2}}\widehat{V}(0) + \dots\end{aligned}$$

(здесь выписаны только главные члены).

Подмодуль $[V_{1i}]$ порождается всеми возможными векторами вида

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \tilde{L}_{-n'_1+1/2} \dots \tilde{L}_{-n'_k+1/2} W_{-m_1} \dots W_{-m_k} \widetilde{W}_{-m'_1+1/2} \dots \widetilde{W}_{-m'_k+1/2} V_{1i}|\emptyset\rangle,$$

где $n, n', m, m' > 0$.

Итак, мы построили неприводимое представление алгебры $\{A\}$ в пространстве Фока:

$$\begin{aligned}&:\{(\partial\varphi_1)^{s_1}(\partial^2\varphi_1)^{s_2}\dots\}\{(\partial\varphi_2)^{s'_1}(\partial^2\varphi_2)^{s'_2}\dots\}\times \\ &\quad \times \{(\partial\tilde{\varphi}_1)^{l_1}(\partial^2\tilde{\varphi}_1)^{l_2}\dots\}\{(\partial\tilde{\varphi}_2)^{l'_1}(\partial^2\tilde{\varphi}_2)^{l'_2}\dots\}V_{0i} + \\ &\quad + :\{(\partial\varphi_1)^{s_1}(\partial^2\varphi_1)^{s_2}\dots\}\{(\partial\varphi_2)^{s'_1}(\partial^2\varphi_2)^{s'_2}\dots\}\times \\ &\quad \times \{(\partial\tilde{\varphi}_1)^{l_1}(\partial^2\tilde{\varphi}_1)^{l_2}\dots\}\{(\partial\tilde{\varphi}_2)^{l'_1}(\partial^2\tilde{\varphi}_2)^{l'_2}\dots\}V_{1i}.\end{aligned}$$

В своей замечательной работе Белавин, Поляков и Замолотчиков [13] показали, как можно получить полное описание операторов (или, что эквивалентно, аномальных размерностей) в любой двумерной КТП. В частности, было дано доказательство существования специального дискретного класса двумерных КТП (так называемых вырожденных КТП). Далее, было показано, что спектр аномальных размерностей операторов, соответствующих этим теориям, задается формулой Каца. Последующее развитие этой идеи доказало, что вырожденные КТП, содержащие конечное число примарных полей, описывают критические флуктуации двумерных статистических моделей в точке фазового перехода второго рода. Эти КТП стали называть минимальными моделями. Подобным же образом мы найдем полное описание спектра аномальных размерностей для искомой W_Γ -алгебры. Точнее, представление $[V]$, соответствующее W_Γ , является вырожденным, если модуль $[V]$ содержит нулевой вектор χ_N , удовлетворяющий уравнениям

$$L_n \chi_N = W_n \chi_N = 0, \quad n > 0, \quad L_0 \chi_N = (\Delta + N) \chi_N.$$

Чтобы получить спектр зарядов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, соответствующих вырожденным модулям, мы построим экранирующие заряды, соответствующие данной теории:

$$Q_i^\pm = \oint_c dz V_i^\pm(z) = \oint_c dz e^{i a_\pm \mathbf{e}_i \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}})},$$

где

$$\mathbf{e}_1 = (1, \sqrt{3}), \quad \mathbf{e}_2 = (1, -\sqrt{3}), \quad a_\pm = \frac{\alpha_0}{8} \pm \frac{1}{8} \sqrt{\alpha_0^2 + 4},$$

и будем изучать условия, при которых вектор

$$\chi_n = \oint_{c_1} dz_1 V_i^+(z_1) \oint_{c_2} dz_2 V_i^+(z_2) \cdots \oint_{c_n} dz_n V_i^+(z_n) V_{2\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}^* - n\mathbf{e}_i a_+, \mathbf{b}^* - n\mathbf{e}_i a_+} \quad (9)$$

становится нулевым. Если принять во внимание операторное разложение

$$\begin{aligned} V_i^+(z) V_{2\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}^* - n\mathbf{e}_i a_+, \mathbf{b}^* - n\mathbf{e}_i a_+}(0) = \\ = z^{4a_+ \mathbf{e}_i \cdot (2\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}^* - n\mathbf{e}_i a_+) + 4a_+ \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{b}^* - n\mathbf{e}_i a_+)} V_i^+ V_{2\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}^* - n\mathbf{e}_i a_+, \mathbf{b}^* - n\mathbf{e}_i a_+}, \end{aligned}$$

то можно показать, что интеграл (9) не равен нулю, если уравнение

$$16a_+^2(n-1) + 4a_+ \mathbf{e}_i \cdot (2\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}^* - n\mathbf{e}_i a_+) + 4a_+ \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{b}^* - n\mathbf{e}_i a_+) = -m - 1$$

выполняется при некотором положительном целом m . Решение этого алгебраического уравнения приводит к следующим выражениям для зарядов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n', m'}^{n, m} &= 2\omega_1[(3-n)a_+ + (3-m)a_-] + 2\omega_2[(3-n')a_+ + (3-m')a_-], \\ \mathbf{b}_{n', m'}^{n, m} &= 2\omega_1[(1+n)a_+ + (1+m)a_-] + 2\omega_2[(1+n')a_+ + (1+m')a_-], \end{aligned}$$

где

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \omega_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Эти формулы полностью определяют вырожденные нескрученные подмодули W_Γ -алгебры. Соответствующий спектр Каца параметров $\Delta_{n'm'}^{(nm)}$, $\tilde{\Delta}_{n'm'}^{(nm)}$, $\omega_{n'm'}^{(nm)}$, $\tilde{\omega}_{n'm'}^{(nm)}$ можно легко построить по формулам (6) и (7).

Аналогично можно найти спектр зарядов для скрученного подмодуля:

$$\begin{aligned} d_1(n', m') &= 2[(4 - n - n')a_+ + (4 - m - m')a_-], \\ d_2(n', m') &= \frac{1}{\sqrt{3}}[(n' - n)a_+ + (m' - m)a_-]. \end{aligned}$$

Соответствующие параметры $\Delta_{n'm'}^{(nm)}$, $\omega_{n'm'}^{(nm)}$, определяющие спектр Каца вырожденного скрученного подмодуля, вычисляются по формулам (8).

Теперь можно выписать формулы для корреляционных функций и функций распределения на ГЭП. N -точечные корреляционные функции

$$G_\Gamma(x_i, z_j) = \left\langle \prod_{i=1}^{2g+2} V_1 \left[\begin{smallmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{smallmatrix} \right] (x_i) \prod_{j=1}^N V_0 \left[\begin{smallmatrix} n_j, m_j \\ n'_j, m'_j \end{smallmatrix} \right] (z_j) (Q_1^+)^s (Q_1^-)^t (Q_2^+)^r (Q_2^-)^p \right\rangle$$

задаются контурными интегралами

$$\begin{aligned} G_\Gamma(x_i, z_j) &= \left\langle \prod_{i=1}^{2g+2} V_1 \left[\begin{smallmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{smallmatrix} \right] (x_i) \prod_{j=1}^N V_0 \left[\begin{smallmatrix} n_j, m_j \\ n'_j, m'_j \end{smallmatrix} \right] (z_j) \times \right. \\ &\quad \times \oint dz_1 V_1^+(z_1) \cdots \oint dz_n V_1^+(z_n) \oint dz'_1 V_1^-(z'_1) \cdots \oint dz'_t V_1^-(z'_t) \times \\ &\quad \times \oint d\zeta_1 V_2^+(\zeta_1) \cdots \oint d\zeta_r V_2^+(\zeta_r) \oint d\zeta'_1 V_1^-(\zeta'_1) \cdots \left. \oint d\zeta'_p V_1^-(\zeta'_p) \right\rangle, \end{aligned}$$

где подынтегральное выражение, конечно, является многозначной функцией и определено на римановых поверхностях. Корреляционная функция не обращается в нуль, только если заряды удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{g+1} \mathbf{d}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_j + s\mathbf{a}_+\mathbf{e}_1 + t\mathbf{a}_-\mathbf{e}_1 + r\mathbf{a}_+\mathbf{e}_2 + p\mathbf{a}_-\mathbf{e}_2 &= 2\alpha_0, \\ \sum_{i=1}^{g+1} \mathbf{q}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{b}_j + s\mathbf{a}_+\mathbf{e}_1 + t\mathbf{a}_-\mathbf{e}_1 + r\mathbf{a}_+\mathbf{e}_2 + p\mathbf{a}_-\mathbf{e}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично мы можем выписать интегральное представление для функции распределения на $\Gamma\mathcal{EP}$:

$$\begin{aligned} Z_\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{2g+2}) &= \left\langle \prod_{i=1}^{2g+2} V_1 \begin{bmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{bmatrix} (x_i) (Q_1^+)^s (Q_1^-)^t (Q_2^+)^r (Q_2^-)^p \right\rangle = \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^{2g+2} V_1 \begin{bmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{bmatrix} (x_i) \oint dz_1 V_1^+(z_1) \cdots \oint dz_n V_1^+(z_s) \oint dz'_1 V_1^-(z'_1) \cdots \oint dz'_t V_1^-(z'_t) \times \right. \\ &\quad \left. \times \oint d\zeta_1 V_2^+(\zeta_1) \cdots \oint d\zeta_r V_2^+(\zeta_r) \oint d\zeta'_1 V_1^-(\zeta'_1) \cdots \oint d\zeta'_p V_1^-(\zeta'_p) \right\rangle. \end{aligned}$$

Эта “функция распределения” не обращается в нуль при условии, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{g+1} \mathbf{d}_i + s\mathbf{a}_+ \mathbf{e}_1 + t\mathbf{a}_- \mathbf{e}_1 + r\mathbf{a}_+ \mathbf{e}_2 + p\mathbf{a}_- \mathbf{e}_2 &= 2\alpha_0, \\ \sum_{i=1}^{g+1} \mathbf{q}_i + s\mathbf{a}_+ \mathbf{e}_1 + t\mathbf{a}_- \mathbf{e}_1 + r\mathbf{a}_+ \mathbf{e}_2 + p\mathbf{a}_- \mathbf{e}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Главным пунктом в вышеприведенной конструкции является то, что вся информация и свойства основной геометрии как бы закодированы в примарных разветвленных полях $V_1 \begin{bmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{bmatrix} (x_i)$ скрученного подмодуля W_Γ -алгебры.

3. A_2 -ТПТ

Рассмотрим КТПТ, соответствующую алгебре Ли A_2 с однократными связями. Локальные свойства A_2 -КТПТ выводятся из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\partial\phi)^2 + \mu \sum_{i=1}^2 e^{b\mathbf{e}_i \cdot \phi} + \frac{R}{4\pi} \alpha_0 \cdot \phi,$$

где $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$, – простые корни алгебры Ли A_2 . Соответствующие фундаментальные веса $\mathbf{w}_i$ алгебры Ли A_2 определяются уравнением $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{w}_j = \delta_{ij}$. Фоновый заряд α_0 пропорционален вектору Вейля ρ :

$$\alpha_0 = \left(b + \frac{1}{b}\right) \rho, \quad \rho = \sum_{i=1}^2 \mathbf{w}_i.$$

Локальная конформная инвариантность КТПТ с центральным зарядом $c = 2 + 24\alpha_0^2$ обеспечивается существованием голоморфных и антиголоморфных тензоров энергии-импульса T , $\bar{T}$. Хорошо известно, что, кроме стандартной конформной симметрии, КТПТ имеет дополнительную W -симметрию.

Теперь мы можем ответить на вопрос, как строится функция распределения модели Тоды на Γ_g с помощью вершинных операторов, соответствующих W_Γ .

Согласно основной гипотезе Полякова [9] “суммирование” по гладким метрикам с включением вершинных операторов должно быть эквивалентно “суммированию” по метрикам с особенностями в точках вставок, но без вершинных операторов. Следуя этой идее, функции распределения модели Тоды на Γ_g

$$Z_\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{2g+2}) = \int D\phi e^{-S_T[\phi]}$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} Z_\Gamma &= \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\tilde{\varphi} e^{-\int (\partial\varphi)^2/(8\pi) + \mu \sum_{i=1}^2 e^{b\mathbf{e}_i \cdot \varphi} + R\boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \varphi/(4\pi) + (\partial\tilde{\varphi})^2/(8\pi)} \prod_{i=1}^{2g+2} e^{\mathbf{d}_i \cdot \varphi} \sigma(x_i) = \\ &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int (\partial\varphi)^2/(8\pi) + \mu \sum_{i=1}^2 e^{b\mathbf{e}_i \cdot \varphi} + R\boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \varphi/(4\pi)} \prod_{i=1}^{2g+2} e^{\mathbf{d}_i \cdot \varphi(x_i)} \times \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} e^{-\int (\partial\tilde{\varphi})^2/(8\pi)} \prod_{i=1}^{2g+2} \sigma(x_i). \end{aligned}$$

Введем ортогональное разложение свободного поля φ

$$\varphi = \varphi_c + \Phi,$$

где φ_c – нулевая мода, а Φ обозначает ту часть поля, которая ортогональна нулевой моде:

$$\int d^2x \Phi(x) = 0.$$

Выполняя функциональное интегрирование по нулевой моде φ_c , получаем выражение

$$\begin{aligned} Z_\Gamma &= \left(\frac{\mu}{8\pi} \right)^{s_1+s_2} \frac{1}{b^2 |\det e|} \Gamma(-s_1) \Gamma(-s_2) \times \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\Phi e^{-\int (\partial\Phi)^2/(8\pi) + R_{g=0} \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \Phi/(4\pi)} \prod_{i=1}^{2g+2} e^{\mathbf{d}_i \cdot \Phi(x_i)} \times \\ &\quad \times \left(\int d^2x e^{b\mathbf{e}_1 \cdot \Phi} \right)^{s_1} \left(\int d^2x e^{b\mathbf{e}_2 \cdot \Phi} \right)^{s_2} \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} e^{-\int (\partial\tilde{\varphi})^2/(8\pi)} \prod_{i=1}^{2g+2} \sigma(x_i), \end{aligned}$$

где s_1, s_2 задаются как

$$s_1 = (b \det e_{ij})^{-1} [-\alpha_0 e_{22} + k_1 e_{22} - k_2 e_{21}],$$

$$s_2 = (b \det e_{ij})^{-1} [-\alpha_0 e_{12} + k_2 e_{11} - k_1 e_{12}],$$

$\Gamma(x)$ – стандартная Γ -функция и

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{2g+2} \mathbf{d}_i.$$

Предполагая, что s_1 и s_2 – положительные целые, можно свести оставшийся функциональный интеграл к функции распределения W_Γ -минимальной модели с помощью хорошо известных методов [14].

Благодарности. Работа одного из авторов (С. А. Апикиан) частично поддержана грантом INTAS-334.

Список литературы

- [1] *E. Martinec*. Quantum field theory: A guide for mathematicians. In: Theta functions. Proc. of 35th Summer Res. Inst. Bowdoin Coll., Brunswick/ME 1987, Proc. Symp. Pure Math. V. 49. Pt. 1. Eds. L. Ehrenpreis, R. C. Gunning. Providence, RI: AMS, 1989. P. 391.
- [2] *J. Polchinski*. Superstring Theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1998; *M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten*. Superstring Theory. V. I, II. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1987.
- [3] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov*. Phys. Rep. 1981. V. 71. P. 313; *И. М. Кривчов*. УМН. 1977. Т. 32. С. 185.
- [4] *N. Seiberg, E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19; Erratum 1994. V. 430. P. 485.
- [5] *A. Marshakov*. Seiberg-Witten Theory and Integrable Systems. Singapore: World Scientific, 1999.
- [6] *В. Г. Кац*. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993; *P. Goddard, D. Olive*. Int. J. Mod. Phys. A. 1986. V. 1. P. 303.
- [7] *P. Bowknegt, K. Schoutens*. Phys. Rep. 1993. V. 223. P. 184.
- [8] *А. Б. Замолодчиков*. ТМФ. 1985. Т. 65. С. 347; *V. Fateev, A. B. Zamolodchikov*. Nucl. Phys. B. 1987. V. 280. P. 644.
- [9] *А. М. Поляков*. Лекция на семинаре в ИТФ им. Л. Д. Ландау 1982 (не опубли.); *L. Takhtajan*. Semiclasical Liouville theory, complex geometry of moduli space, and uniformization of Riemann surface. In: New Symmetry Principles in Quantum Field Theory. Eds. J. Frohlich et al. New York: Plenum Press, 1992.
- [10] *Al. B. Zamolodchikov*. Nucl. Phys. B. 1987. V. 285. P. 481; *V. Knizhnik*. Commun. Math. Phys. 1987. V. 112. P. 567; *L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker*. Nucl. Phys. B. 1987. V. 282. P. 13; *C. Crnkovic, G. Sotkov, M. Stanishkov*. Phys. Lett. B. 1989. V. 220. P. 397; *S. A. Apikyan, C. J. Efthimiou*. Phys. Lett. B. 1995. V. 359. P. 313.
- [11] *V. S. Dotsenko, V. A. Fateev*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 240. P. 312; 1985. V. 251. P. 691.
- [12] *С. А. Апилян, Ал. Б. Замолодчиков*. ЖЭТФ. 1987. Т. 92. С. 34.
- [13] *A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333.
- [14] *M. Goulian, M. Li*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2051; *A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 577; *H. Dorn, H. Otto*. Phys. Lett. B. 1992. V. 291. P. 39; Nucl. Phys. B. 1994. V. 429. P. 375; *А. Апилян, К. Эфтимий*. Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. С. 645; hep-th/0106272.

Поступила в редакцию 1.XI.2002 г.