Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Данилов, О спектре двумерного периодического оператора Шредингера,
ТМФ, 2003, том 134, номер 3, 447–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:08:50

© 2003 г.

Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ДВУМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Доказано отсутствие собственных значений (бесконечной кратности) для двумерного периодического оператора Шредингера с переменной метрикой. Предложенный метод доказательства не использует замену координат, приводящую метрику к скалярному виду.

Ключевые слова: оператор Шредингера, спектр, периодические электрический и магнитный потенциалы, переменная метрика.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к исследованию абсолютной непрерывности спектра периодических дифференциальных операторов, в частности оператора Шредингера с переменной метрикой (см. [1]–[7] и ссылки в этих работах). В данной статье рассматривается двумерный периодический оператор Шредингера

$$\sum_{j,l=1}^2 \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right) G_{jl} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_l} - A_l \right) + V, \quad (1)$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^2)$, $A = (A_1, A_2)$ и V – векторный (магнитный) и скалярный (электрический) потенциалы, $G = (G_{jl})$, $j, l = 1, 2$, – вещественная симметрическая положительно определенная матричная функция (метрика), $G, G^{-1} \in L^\infty$. Функции A, V и G предполагаются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Пусть A и V – вещественнозначные функции. В работе [8] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (1) для постоянной матрицы G и при условиях $A \in L_{\text{loc}}^{2\beta}$, $V \in L_{\text{loc}}^\beta$, $\beta > 1$. Первой работой, посвященной оператору (1) с переменной метрикой, была работа Морама [9], в которой установлена абсолютная непрерывность спектра при $A \in C^\infty$, $V \in L^\infty$ и $G \in C^\infty$, $\det G \equiv 1$. В дальнейшем Кучментом и Левендорским [1] было показано, что в случае $G \in C^{m+\alpha}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (0, 1)$, существуют периодические изотермические координаты $y(x) \in C^{m+1+\alpha}$, приводящие матричную функцию G к скалярному виду

* Физико-технический институт Уральского отделения РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: danilov@otf.fti.udmurtia.su

$G = \rho(x)G_0$ ($\rho \in C^{m+\alpha}$ – скалярная функция, G_0 – постоянная матрица), что позволяет ослабить ограничения на A , V и G . Периодические изотермические координаты, сводящие задачу к рассмотрению оператора (1) со скалярной метрикой, использовались Бирманом, Суслиной и Штеренбергом в серии работ [10]–[12], [4] (в последней работе (см. также [13]) рассматривался оператор Шредингера с переменной метрикой в двумерном волноводе). В работе [10] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (1) при $G \in W_{2\beta, \text{loc}}^2$, $A \in L_{\text{loc}}^{2\beta}$, $\beta > 1$, $V = V_1 + \sigma\delta_\Sigma$, где $V_1 \in L_{\text{loc}}^\beta$, Σ – периодическая система кусочно-гладких кривых, δ_Σ – δ -функция, сосредоточенная на Σ , $\sigma \in L_{\text{loc}}^\beta(\Sigma)$. Пусть K – элементарная ячейка решетки Λ . Обозначим через $\mathbb{L}_0(\mathbb{R}^2)$ пространство функций $W \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ таких, что для любой функции $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ справедливо включение $W\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует число $C_\epsilon(W) > 0$ такое, что для всех функций $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} |W\phi|^2 d^2x \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\phi|^2 d^2x + C_\epsilon(W) \int_{\mathbb{R}^2} |\phi|^2 d^2x,$$

$\mathbb{L}_0(K)$ – множество периодических (с решеткой периодов Λ) функций из $\mathbb{L}_0(\mathbb{R}^2)$. Самые общие условия на функции A , V и G приведены в [4]: $\det G \in H_{\text{loc}}^1$, $\partial(\det G)/\partial x_j \in \mathbb{L}_0(K)$, $j = 1, 2$,

$$\int_K |A|^2 l_m^\beta(|A|) \prod_{i=1}^{m-1} l_i(|A|) d^2x < +\infty, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \beta > 1, \quad (2)$$

где $l_1(t) = 1 + \ln(1+t)$, $l_i(t) = 1 + \ln l_{i-1}(t)$, $i = 2, \dots, m$, $t \geq 0$, и электрический потенциал задается как обобщенная функция, формально записываемая в виде $V = d\nu/d^2x$, где ν – периодический борелевский заряд, удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям (разным для положительной (ν_+) и отрицательной (ν_-) вариаций). В данной работе на матричную функцию G накладываются такие же условия, как и в [4], при этом ослаблено ограничение на магнитный потенциал A и электрический потенциал V задается как квадратичная форма, определяемая ниже в разделе 3. Предложен новый подход к исследованию двумерного периодического оператора Шредингера (1), не использующий замену координат, приводящую метрику $G(x)$ к скалярному виду, и опирающийся на результаты и методы работ [14] и [15], в которых рассматривался двумерный периодический оператор Дирака. Пусть $\mathcal{M}_2$ – линейное пространство комплексных (2×2) -матриц,

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– матрицы Паули, $\hat{I} \in \mathcal{M}_2$ – единичная матрица. Обозначим через $\mathbb{G}$ множество невозрастающих непрерывно дифференцируемых функций $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ таких, что

$$\int_0^1 r^{-1}(g(r))^{-1} dr < +\infty$$

и $(g(r/2) - g(r))(g(r))^{-1} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +0$. Если $g \in \mathbb{G}$, то $g(r)(\ln(1/r))^{-1} \rightarrow +\infty$ и $r^\epsilon g(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +0$, $\epsilon > 0$. Для функций $g \in \mathbb{G}$ положим

$$L^2\{g\} = \left\{ f \in L^2_{\text{loc}} : \|f\|_{L^2\{g\}}^2 = \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{x: |x-y| \leq 1} g(|x-y|) |f(x)|^2 dx < +\infty \right\},$$

$L^2(g; K)$ – множество периодических функций (с решеткой периодов Λ) из $L^2\{g\}$. Если $f \in L^2\{g\}$, то функция f^2 принадлежит классу Като, поэтому $L^2\{g\} \subset \mathbb{L}_0(\mathbb{R}^2)$. В работе [15] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h_{jl}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $j, l = 1, 2$, и $\hat{V}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2$ – периодические функции с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, $h_{jl} \in L^\infty$, $0 < \epsilon \leq h_{11}(x)h_{22}(x) - h_{12}(x)h_{21}(x)$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^2$. Предположим, что

$$\hat{V} = V^{(0)} \hat{I} + \sum_{j=1}^3 V^{(j)} \hat{\sigma}_j,$$

где $V^{(0)}, V^{(3)} \in \mathbb{L}_0(K)$ и $V^{(1)}, V^{(2)} \in L^2(g; K) \subset \mathbb{L}_0(K)$ для некоторой функции $g \in \mathbb{G}$. Тогда в спектре оператора Дирака

$$\hat{D} + \hat{V} = -i \sum_{j=1}^2 (h_{j1}(x) \hat{\sigma}_1 + h_{j2}(x) \hat{\sigma}_2) \frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{V}(x), \quad (3)$$

действующего в $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ и имеющего область определения $D(\hat{D} + \hat{V})$ класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, отсутствуют собственные значения.

Один из случаев оператора (3) (для которого выполнены условия $h_{jl} \in C^\infty$ и $\hat{V} \in L^\infty$) рассматривался в работе [9]. Для постоянных функций h_{jl} (если $h_{11}h_{22} \neq h_{12}h_{21}$) и эрмитовых матриц $\hat{V}(x) = \hat{V}^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, для которых $\hat{V} \in L^\beta_{\text{loc}}$, $\beta > 2$, абсолютная непрерывность спектра (самосопряженного) оператора Дирака (3) доказана в работах [16], [17]. В статье [14] приводится доказательство теоремы 1 при $\hat{V} \in L^\beta_{\text{loc}}$, $\beta > 2$. В общем случае, если периодические операторы (1) и (3) самосопряженные, при рассматриваемых ограничениях на функции A , V и $\hat{V}$ для доказательства абсолютной непрерывности их спектра достаточно доказать отсутствие в спектре собственных значений (бесконечной кратности) [18], [1].

В разделе 2 вводятся обозначения и приведены результаты из работ [14] и [15], необходимые в дальнейшем. Основные утверждения содержатся в разделе 3. В разделе 4 приведено доказательство теоремы 4.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Будем далее считать, что решетка периодов рассматриваемых двумерных периодических операторов Шредингера и Дирака совпадает с $\mathbb{Z}^2$ (можно, не изменяя вида операторов, сделать соответствующую линейную замену переменных), $K = [0, 1) \times [0, 1)$.

Пусть $\tilde{C}(K)$, $\tilde{C}^1(K)$, $\tilde{H}^1(K)$ – пространства функций $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов $\mathbb{Z}^2$) принадлежат $C(\mathbb{R}^2)$, $C^1(\mathbb{R}^2)$ и классу Соболева $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, соответственно,

$$\tilde{H}_0^1(K) = \left\{ \phi \in \tilde{H}^1(K) : \int_K \phi(x) d^2x = 0 \right\}, \quad \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2) = (\tilde{H}^1(K))^2.$$

Функции, определенные на ячейке K , в дальнейшем будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbb{R}^2$. Нормы и скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{C}^d$, $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^d)$ и $L^2(K; \mathbb{C}^d)$, $d = 1, 2$, вводятся обычным образом, при этом предполагается линейность скалярного произведения по второму сомножителю, $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{C}^d$, $\|\cdot\|$ – норма в пространствах $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^d)$ и $L^2(K; \mathbb{C}^d)$. Будем обозначать $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $\text{mes}(\cdot)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $0 < q \leq p < +\infty$ и $F \geq 0$, $\Gamma(p, q, F)$ – множество наборов $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\}$ вещественнозначных функций из $L^\infty(K)$ таких, что $q \leq \mathcal{G}(x) \leq p$, $q \leq \mathcal{H}(x) \leq p$ и $|\mathcal{F}(x)| \leq F$ при почти всех $x \in K$; $\Gamma = \bigcup_{p, q, F} \Gamma(p, q, F)$. Для наборов $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$ и векторов $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ обозначим

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_0(k + i\kappa) &= \sum_{j=1}^2 \hat{\sigma}_j \left(k_j + i\kappa_j - i \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \\ \hat{\mathcal{D}}(k + i\kappa) &= (\mathcal{G}\hat{\sigma}_1 + \mathcal{F}\hat{\sigma}_2) \left(k_1 + i\kappa_1 - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \mathcal{H}\hat{\sigma}_2 \left(k_2 + i\kappa_2 - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Операторы $\hat{\mathcal{D}}_0(k + i\kappa)$ и $\hat{\mathcal{D}}(k + i\kappa)$ действуют в $L^2(K; \mathbb{C}^2)$, $D(\hat{\mathcal{D}}_0(k + i\kappa)) = D(\hat{\mathcal{D}}(k + i\kappa)) = \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$. При этом существуют числа $c_1 = c_1(p, q, F) > 0$ и $c_2 = c_2(p, q, F) \geq c_1$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$ и всех вектор-функций $\phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$

$$c_1 \|\hat{\mathcal{D}}_0(k)\phi\| \leq \|\hat{\mathcal{D}}(k)\phi\| \leq c_2 \|\hat{\mathcal{D}}_0(k)\phi\|. \quad (4)$$

Если $k_1 = \pi$, то $\|\hat{\mathcal{D}}_0(k)\phi\| \geq \pi \|\phi\|$. Положим

$$\hat{d}_\pm(k + i\kappa) = (\mathcal{G} \pm i\mathcal{F}) \left(k_1 + i\kappa_1 - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \pm i\mathcal{H} \left(k_2 + i\kappa_2 - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$$D(\hat{d}_\pm(k + i\kappa)) = \tilde{H}^1(K) \subset L^2(K), \quad \hat{d}_\pm = \hat{d}_\pm(0),$$

$$\hat{\mathcal{D}}(k + i\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{d}_-(k + i\kappa) \\ \hat{d}_+(k + i\kappa) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для всех $\phi \in \tilde{H}^1(K)$ имеем $\overline{\hat{d}_+\phi} = -\hat{d}_-\bar{\phi}$ (черта означает комплексное сопряжение); $\ker \hat{d}_+ = \ker \hat{d}_-$ – одномерное подпространство в $L^2(K)$, состоящее из постоянных функций; множества значений $R(\hat{d}_\pm(k))$ операторов $\hat{d}_\pm(k)$ замкнуты и $\dim \text{coker } \hat{d}_\pm = 1$, $R(\hat{d}_\pm(k)) = L^2(K)$, если $k \notin 2\pi\mathbb{Z}^2$.

ЛЕММА 1. Пусть $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$, $g \in \mathbb{G}$. Тогда найдется такое число $c_3 = c_3(p, q, F; g) > 0$, что для всех функций $\Phi' \in \tilde{H}_0^1(K)$, для которых $\hat{d}_+ \Phi' \in L^2(g; K)$, имеем $\partial \Phi' / \partial x_j \in L^2(g; K)$, $j = 1, 2$, $\Phi' \in \tilde{C}(K)$ и

$$\|\Phi'\|_{L^\infty(K)} \leq c_3 \|\hat{d}_+ \Phi'\|_{L^2\{g\}}.$$

При этом для любой функции $\psi \in \tilde{H}^1(K)$ также $e^{i\Phi'} \psi \in \tilde{H}^1(K)$ и

$$-i \frac{\partial}{\partial x_j} e^{i\Phi'} \psi = e^{i\Phi'} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x_j} \psi - i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right), \quad j = 1, 2.$$

Доказательства леммы 1 и (опирающейся на нее) теоремы 2 (см. ниже) приведены в работе [15] (см. также [14]). Теорема 2 является ключевой как при доказательстве теоремы 1, так и при рассмотрении двумерного периодического оператора Шредингера.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$, $g \in \mathbb{G}$. Тогда для любых функций $C_1, C_2 \in L^2(g; K)$ можно (однозначно) найти такие векторы $k, \kappa \in \mathbb{R}^2$ и функции $\Phi', \Psi' \in \tilde{H}_0^1(K) \cap \tilde{C}(K)$, что умножение на функции $e^{i\mu\Phi'}$ и матричные функции $e^{\mu\hat{\sigma}_3\Psi'}$ для всех $\mu \in \mathbb{C}$ не выводит за пределы пространства $\tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$,

$$e^{\mu\hat{\sigma}_3\Psi'} e^{-i\mu\Phi'} \hat{D}(\mu(k + i\kappa)) e^{i\mu\Phi'} e^{\mu\hat{\sigma}_3\Psi'} = \hat{D}(0) + \mu(C_1\hat{\sigma}_1 + C_2\hat{\sigma}_2)$$

и при этом

$$\max\{\|\Phi'\|_{L^\infty(K)}, \|\Psi'\|_{L^\infty(K)}\} \leq c_4 \sum_{j=1}^2 \|\mathcal{C}_j\|_{L^2\{g\}}, \quad |k|^2 + |\kappa|^2 \leq c_5 \sum_{j=1}^2 \|\mathcal{C}_j\|_{L^2(K)}^2,$$

где $c_4 = c_4(p, q, F; g) > 0$, $c_5 = c_5(p, q, F) > 0$. Если C_1 и C_2 — вещественнозначные функции, то $\kappa = 0$ и функции Φ' и Ψ' также являются вещественнозначными.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$. Тогда существуют (единственные) вещественнозначные функции $\Phi, \Psi \in \tilde{H}_0^1(K) \cap \tilde{C}(K)$ и вектор $\tilde{\kappa} \in \mathbb{R}^2$ (для которого $\tilde{\kappa}_1 > 0$) такие, что:

1) для всех $\mu \in \mathbb{R}$ умножение на функции $e^{\mu\Phi}$ и матричные функции $e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Psi}$ не выводит за пределы пространства $\tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$;

2) для всех $k, \kappa \in \mathbb{R}^2$ и $\mu \in \mathbb{R}$ имеем

$$e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Psi} e^{\mu\Phi} \hat{D}(k + i\kappa + i\mu\tilde{\kappa}) e^{-\mu\Phi} e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Psi} = \hat{D}(k + i\kappa) + i\mu\mathcal{H}\hat{\sigma}_1;$$

3) справедливы неравенства

$$\max\{\|\Phi\|_{L^\infty(K)}, \|\Psi\|_{L^\infty(K)}\} \leq c'_4, \quad |\tilde{\kappa}| \leq c'_5,$$

где $c'_4 = c'_4(p, q, F) > 0$ и $c'_5 = c'_5(p, q, F) > 0$.

Обозначим $\Omega = \Psi - x_2$. При $\mu \in 2\pi\mathbb{Z}$ имеем

$$\hat{D}(k + i\kappa + i\mu\tilde{\kappa}) = e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} e^{-\mu\Phi} \hat{D}(k + i\kappa) e^{\mu\Phi} e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}. \quad (6)$$

Функции Φ , Ψ и Ω (а также вектор $\tilde{\kappa}$) далее будут (однозначно) определяться по набору $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$ из следствия теоремы 2. Справедливо включение

$$\chi_+ = (\mathcal{G}\mathcal{H})^{-1}(\hat{d}_+\Psi - \mathcal{H}) \in \text{coker } \hat{d}_+, \quad \|\chi_+\| > 0.$$

ЛЕММА 2 [15]. При почти всех $x \in K$ имеем $\chi_+(x) \neq 0$.

ЛЕММА 3. При почти всех $x \in K$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_2}\right)^2 > 0.$$

Лемма 3 является следствием леммы 2.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\mathbb{R}^2 \ni x \rightarrow G(x) = (G_{jl}(x))$, $j, l = 1, 2$, — вещественная положительно определенная матричная функция, $G_{12} = G_{21}$, $G, G^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^2; \mathcal{M}_2)$, $\det G \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, $\partial(\det G)/\partial x_j \in \mathbb{L}_0(\mathbb{R}^2)$, $A = (A_1, A_2)$, $A_j \in L^2\{g\}$ для некоторой функции $g \in \mathbb{G}$, $j = 1, 2$. Функции G и A периодические с решеткой периодов $\mathbb{Z}^2$. (Если векторный потенциал A удовлетворяет условию (2), то найдется функция $g \in \mathbb{G}$ такая, что $A_j \in L^2(g; K)$, $j = 1, 2$.) Выберем периодические функции $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ из условий $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma$ и $G_{11} = \mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2$, $G_{22} = \mathcal{H}^2$, $G_{12} = G_{21} = \mathcal{F}\mathcal{H}$. Тогда $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in \Gamma(p, q, F)$ для некоторых чисел p, q, F и $\mathcal{G}\mathcal{H} = \sqrt{\det G}$. Обозначим через $\mathbb{V}$ множество полуторалинейных форм $\mathcal{V}(\psi, \phi)$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ с областью определения $Q(\mathcal{V}) = H^1(\mathbb{R}^2) \ni \psi, \phi$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) $\mathcal{V}(\psi(\cdot - n), \phi(\cdot - n)) = \mathcal{V}(\psi, \phi)$ для всех $n \in \mathbb{Z}^2$;
- 2) $\mathcal{V}(e^{i(k, x)}\psi, e^{i(k, x)}\phi) = \mathcal{V}(\psi, \phi)$ для всех $k \in \mathbb{R}^2$ и $\psi, \phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$;
- 3) для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $C_\epsilon = C_\epsilon(\mathcal{V}) > 0$, что для всех функций $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ справедливо неравенство

$$|\mathcal{V}(\phi, \phi)| \leq \epsilon \|\nabla \phi\|^2 + C_\epsilon \|\phi\|^2.$$

Будем далее предполагать, что $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$. Пусть

$$\mathcal{W}(A; \psi, \phi) = \sum_{j,l=1}^2 \left(\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - \bar{A}_j \right) \psi, G_{jl} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_l} - A_l \right) \phi \right)$$

— полуторалинейная форма в $L^2(\mathbb{R}^2)$ с областью определения $Q(\mathcal{W}) = H^1(\mathbb{R}^2)$. При условиях, наложенных на G, A и $\mathcal{V}$, форма $\mathcal{W}(A; \phi, \phi) + \mathcal{V}(\phi, \phi)$, $\phi \in Q(\mathcal{W} + \mathcal{V}) = H^1(\mathbb{R}^2)$, — замкнутая секториальная квадратичная форма в $L^2(\mathbb{R}^2)$, порождающая m -секториальный оператор $\hat{H}(A, \mathcal{V})$ с некоторой областью определения $D(\hat{H}(A, \mathcal{V})) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$. Оператор $\hat{H}(A, \mathcal{V})$ формально записывается в виде (1).

Следующая теорема составляет основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 3. При сделанных предположениях относительно функций G, A и полуторалинейной формы $\mathcal{V}$ в спектре периодического оператора Шредингера $\hat{H}(A, \mathcal{V})$ отсутствуют собственные значения.

Пространство $L^2(\mathbb{R}^2)$ унитарно эквивалентно прямому интегралу

$$\int_{2\pi K}^{\oplus} L^2(K) \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \quad (7)$$

пространств $L^2(K)$. Эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда $\widehat{U}$, которое вначале определяется на функциях из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$:

$$(\widehat{U}\phi)(k; x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-i(k, x+n)} \phi(x+n),$$

а затем продолжается по непрерывности до унитарного отображения $L^2(\mathbb{R}^2)$ на прямой интеграл (7).

Пусть $k, \kappa \in \mathbb{R}^2$,

$$\widetilde{\mathcal{W}}(A; k + i\kappa; \psi, \phi) = \sum_{j,l=1}^2 \left(\left(k_j - i\kappa_j - i \frac{\partial}{\partial x_j} - \bar{A}_j \right) \psi, G_{jl} \left(k_l + i\kappa_l - i \frac{\partial}{\partial x_l} - A_l \right) \phi \right)$$

— полуторалинейная форма в $L^2(K)$, $\psi, \phi \in Q(\widetilde{\mathcal{W}}) = \widetilde{H}^1(K)$. Выберем любую вещественнозначную функцию $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой $\theta(\xi) = 1$ при $\xi \leq 0$ и $\theta(\xi) = 0$ при $\xi \geq 1$. Положим $\theta_N(x) = \theta(|x_1| - N)\theta(|x_2| - N)$, $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^2$. На пространстве $L^2(K)$ определим полуторалинейную форму

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\psi, \phi) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (2N)^{-2} \mathcal{V}(\theta_N \psi, \theta_N \phi), \quad (8)$$

$\psi, \phi \in Q(\widetilde{\mathcal{V}}) = \widetilde{H}^1(K)$, которая не зависит от конкретного выбора функции θ , при этом в выражении (8) функции ψ и ϕ предполагаются периодически продолженными на все пространство $\mathbb{R}^2$. Из условия $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ следует, что для любого $\epsilon > 0$ найдется число $C'_\epsilon = C'_\epsilon(\mathcal{V}) > 0$ такое, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$: $k_1 = \pi$ и всех функций $\psi, \phi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$|\widetilde{\mathcal{V}}(\psi, \phi)| \leq \epsilon \|(k - i\nabla)\psi\| \cdot \|(k - i\nabla)\phi\| + C'_\epsilon \|\psi\| \cdot \|\phi\|. \quad (9)$$

Для всех $\mu \in 2\pi\mathbb{Z}$ и $\psi, \phi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\widetilde{\mathcal{V}}(e^{\mu(\Phi \pm i\Omega)} \psi, \phi) = \widetilde{\mathcal{V}}(\psi, e^{\mu(\Phi \mp i\Omega)} \phi). \quad (10)$$

Квадратичная форма $\widetilde{\mathcal{W}}(A; k + i\kappa; \phi, \phi) + \widetilde{\mathcal{V}}(\phi, \phi)$, $\phi \in Q(\widetilde{\mathcal{W}} + \widetilde{\mathcal{V}}) = \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$, замкнута и секториальна. Пусть $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\kappa)$ — m -секториальный оператор, порождаемый этой формой, $D(\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\kappa)) \subset \widetilde{H}^1(K)$. Справедливо разложение [19], [20], [2]

$$\widehat{U} \widehat{H}(A, \mathcal{V}) \widehat{U}^{-1} = \int_{2\pi K}^{\oplus} \widehat{H}(A, \mathcal{V}; k) \frac{d^2 k}{(2\pi)^2}.$$

Так как операторы $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\kappa)$ имеют компактную резольвенту, то для доказательства отсутствия в спектре оператора $\widehat{H}(A, \mathcal{V})$ собственных значений достаточно доказать, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ найдутся векторы $k, \kappa \in \mathbb{R}^2$ такие, что оператор $\widehat{H}(A, \mathcal{V}; k + i\kappa) - \lambda$ обратим [19], [18], [1], [2] (этот метод доказательства восходит к работе Томаса [21]). Поэтому после замены квадратичной формы $\mathcal{V}(\phi, \phi) - \lambda(\phi, \phi) \rightarrow \mathcal{V}(\phi, \phi)$ получаем, что теорема 3 является следствием следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. При сделанных предположениях относительно функций G , A и полуторалинейной формы $\mathcal{V}$ найдутся числа $C = C(G) > 0$, $c' = c'(G, g) > 0$, $\mu_0 = \mu_0(G, A, \mathcal{V}; g) > 0$ и векторы $k^0 = k^0(G, A) \in \mathbb{R}^2$ и $\kappa^0 = \kappa^0(G, A) \in \mathbb{R}^2$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$: $k_1 + k_1^0 = \pi$, всех чисел $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$, $\mu \geq \mu_0$ и каждой вектор-функции $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$, для которой $\phi_1 = \phi_2$, можно найти такую ненулевую вектор-функцию $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{s=1}^2 (\tilde{\mathcal{W}}(A; k - i\kappa^0 + i\mu\tilde{\kappa}; \psi_s, \phi_1) + \tilde{\mathcal{V}}(\psi_s, \phi_1)) \right| \geq \\ & \geq C \exp\left(-c' \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^2\{g\}}\right) \|\hat{\mathcal{D}}_0(k + k^0) e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} e^{-\mu\Phi} \psi\| \times \\ & \times \|\hat{\mathcal{D}}_0(k + k^0) e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} e^{\mu\Phi} \phi\|, \end{aligned} \quad (11)$$

где вектор $\tilde{\kappa} \in \mathbb{R}^2$ и функции $\Omega = \Psi - x_2$, Φ определяются по матричной функции G из следствия теоремы 2.

Из неравенства (11) следует, что оператор $\hat{H}(A, \mathcal{V}; k - i\kappa^0 + i\mu\tilde{\kappa})$ не имеет собственного значения $\lambda = 0$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Для вектор-функций $\psi, \phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$ и чисел $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$ введем обозначения

$$\psi'_\mu = e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} e^{-\mu\Phi} \psi, \quad \phi'_\mu = e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} e^{\mu\Phi} \phi.$$

Пусть $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_0 \hat{I} + \mathcal{O}_3 \hat{\sigma}_3$, где $\mathcal{O}_l \in \mathbb{L}_0(K)$, $l = 0, 3$. Определим полуторалинейные формы

$$\mathcal{R}_j(\hat{\mathcal{O}}; \psi, \phi) = \left(\hat{\mathcal{O}}^* \psi, -i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) - \left(-i \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \hat{\mathcal{O}} \phi \right), \quad j = 1, 2,$$

$\psi, \phi \in Q(\mathcal{R}_j) = \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2) \subset L^2(K; \mathbb{C}^2)$, $\hat{\mathcal{O}}^* = \overline{\mathcal{O}}_0 \hat{I} + \overline{\mathcal{O}}_3 \hat{\sigma}_3$. Если $\mathcal{O}_l \in \mathbb{L}_0(K) \cap \tilde{H}^1(K)$, $\partial \mathcal{O}_l / \partial x_j \in \mathbb{L}_0(K)$, $j = 1, 2$, $l = 0, 3$, то

$$\mathcal{R}_j(\hat{\mathcal{O}}; \psi, \phi) = i \left(\psi, \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}}{\partial x_j} \phi \right). \quad (12)$$

Если $\mathcal{O}_l \in \mathbb{L}_0(K)$, $l = 0, 3$, и $\hat{\sigma}_1 \phi = \phi$, то для всех $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$

$$\mathcal{R}_j(\hat{\mathcal{O}}; \psi, \phi) = \mathcal{R}_j(\hat{\mathcal{O}}; \psi'_\mu, \hat{\sigma}_1 \phi'_\mu). \quad (13)$$

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{O}_l \in \mathbb{L}_0(K)$, $l = 0, 3$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует постоянная $C''_\epsilon = C''_\epsilon(\hat{\mathcal{O}}) > 0$ такая, что для всех векторов $k' \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = \pi$, всех $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$ и всех вектор-функций $\psi, \phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$: $\hat{\sigma}_1\phi = \phi$ справедливы неравенства

$$|\mathcal{R}_j(\hat{\mathcal{O}}; \psi, \phi)| \leq \epsilon \|\hat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\hat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\| + C''_\epsilon \|\psi'_\mu\| \cdot \|\phi'_\mu\|, \quad j = 1, 2.$$

Лемма 4 следует из равенств (12) и (13) с учетом аппроксимации функций $\mathcal{O}_l$ функциями из $\tilde{C}^1(K)$.

Обозначим

$$\hat{\mathcal{D}}(A; k + i\kappa) = \hat{\mathcal{D}}(k + i\kappa) - (\mathcal{G}\hat{\sigma}_1 + \mathcal{F}\hat{\sigma}_2)A_1 - \mathcal{H}\hat{\sigma}_2A_2.$$

Для всех $k, \kappa \in \mathbb{R}^2$ и $\psi, \phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 \tilde{\mathcal{W}}(A; k + i\kappa; \psi_s, \phi_s) &= (\hat{\mathcal{D}}(\bar{A}; k - i\kappa)\psi, \hat{\mathcal{D}}(A; k + i\kappa)\phi) - \\ &- \left(\left(k_1 - i\kappa_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1} - \bar{A}_1 \right) \psi, i\mathcal{GH}\hat{\sigma}_3 \left(k_2 + i\kappa_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \phi \right) + \\ &+ \left(\left(k_2 - i\kappa_2 - i\frac{\partial}{\partial x_2} - \bar{A}_2 \right) \psi, i\mathcal{GH}\hat{\sigma}_3 \left(k_1 + i\kappa_1 - i\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1 \right) \phi \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\bar{A} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2)$. Умножение на функцию $\sqrt{\mathcal{GH}}$ не выводит за пределы пространства $\tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$ и для любой вектор-функции $\chi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}} \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{\mathcal{GH}} \chi = \frac{1}{2\mathcal{GH}} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_j} \chi + \frac{\partial \chi}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2,$$

при этом $\mathcal{GH} \in \tilde{H}^1(K)$, $\partial \mathcal{GH} / \partial x_j \in \mathbb{L}_0(K)$, $j = 1, 2$. Пусть $\tilde{\kappa}$ – вектор из следствия теоремы 2, $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$. Из (6) и (14) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 \tilde{\mathcal{W}}(A; k + i\kappa + i\mu\tilde{\kappa}; \psi_s, \phi_s) &- \\ &- \left(\hat{\mathcal{D}}(\bar{A}; k - i\kappa - i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\psi, \frac{1}{\mathcal{GH}} \hat{\mathcal{D}}(A; k + i\kappa + i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\phi \right) = \\ &= -\frac{i}{2} \mathcal{R}_1 \left(\frac{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}{\mathcal{GH}} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_1} + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_2}; \psi, \phi \right) - \frac{i}{2} \mathcal{R}_2 \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_1} + \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_2}; \psi, \phi \right) - \\ &- i\mathcal{R}_1(\mathcal{GH}(A_2 - i\kappa_2)\hat{\sigma}_3; \psi, \phi) + i\mathcal{R}_2(\mathcal{GH}(A_1 - i\kappa_1)\hat{\sigma}_3; \psi, \phi) - \\ &- \left(e^{-2i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_1} \psi'_\mu, (A_2 - i\kappa_2)\hat{\sigma}_3 \phi'_\mu \right) + \left(e^{-2i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_2} \psi'_\mu, (A_1 - i\kappa_1)\hat{\sigma}_3 \phi'_\mu \right) - \\ &- \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_1} e^{-2i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} \psi'_\mu, \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_1} \phi'_\mu \right) - \\ &- \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathcal{GH}} \left(\mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_1} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_2} \right) e^{-2i\mu\hat{\sigma}_3\Omega} \psi'_\mu, \frac{1}{\mathcal{GH}} \left(\mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_1} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{GH}}{\partial x_2} \right) \phi'_\mu \right). \end{aligned} \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 5. Для любых вектора $\kappa \in \mathbb{R}^2$ и числа $\epsilon > 0$ найдется такое число $\tilde{C}_\epsilon = \tilde{C}_\epsilon(G, A; \kappa) > 0$, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$ и $k' \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = \pi$, всех чисел $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$ и всех вектор-функций $\psi, \phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$: $\hat{\sigma}_1\phi = \phi$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{s=1}^2 \tilde{\mathcal{W}}(A; k + i\kappa + i\mu\tilde{\kappa}; \psi_s, \phi_1) - \left(\hat{\mathcal{D}}(\bar{A}; k - i\kappa - i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\psi, \frac{1}{\mathcal{GH}}\hat{\mathcal{D}}(A; k + i\kappa + i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\phi \right) \right| \leq \leq \epsilon \|\hat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\hat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\| + \tilde{C}_\epsilon \|\psi'_\mu\| \cdot \|\phi'_\mu\|.$$

Для доказательства теоремы 5 достаточно воспользоваться равенством (15) и леммой 4. Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 6. Существуют векторы $k^0, \kappa^0 \in \mathbb{R}^2$ и функции $\Phi_0, \Psi_0 \in \tilde{H}_0^1(K) \cap \tilde{C}(K)$ такие, что:

- 1) умножение на функции $e^{\pm i\Phi_0}$ и матричные функции $e^{\pm \hat{\sigma}_3\Psi_0}$ не выводит за пределы пространства $\tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$;
- 2) для всех векторов $k, \kappa \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}(A; k + i\kappa) &= e^{\hat{\sigma}_3\Psi_0} e^{-i\Phi_0} \hat{\mathcal{D}}(k + k^0 + i\kappa^0 + i\kappa) e^{i\Phi_0} e^{\hat{\sigma}_3\Psi_0}, \\ \hat{\mathcal{D}}(\bar{A}; k - i\kappa) &= e^{\hat{\sigma}_3\bar{\Psi}_0} e^{-i\bar{\Phi}_0} \hat{\mathcal{D}}(k + k^0 - i\kappa^0 - i\kappa) e^{i\bar{\Phi}_0} e^{\hat{\sigma}_3\bar{\Psi}_0}; \end{aligned}$$

- 3) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \max\{\|\Phi_0\|_{L^\infty(K)}, \|\Psi_0\|_{L^\infty(K)}\} &\leq c_6 \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^2\{g\}}, \\ |k^0|^2 + |\kappa^0|^2 &\leq c_7 \|A\|_{L^2(K; \mathbb{C}^2)}^2, \end{aligned}$$

где $c_6 = c_6(p, q, F; g) > 0$ и $c_7 = c_7(p, q, F) > 0$.

Обозначим

$$\psi''_\mu = e^{i\bar{\Phi}_0} e^{\hat{\sigma}_3\bar{\Psi}_0} \sqrt{\mathcal{GH}}\psi'_\mu, \quad \phi''_\mu = e^{i\Phi_0} e^{\hat{\sigma}_3\Psi_0} \sqrt{\mathcal{GH}}\phi'_\mu.$$

Из теоремы 6 для всех $k' \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = \pi$ следует оценка

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathcal{D}}(k')\psi'_\mu\| &\leq \exp\left(2c_6 \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^2\{g\}}\right) \left\| \hat{\mathcal{D}}(\bar{A}; k' + k^0 - i\kappa^0) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{GH}}} \psi''_\mu \right\| \leq \\ &\leq C'_1 \exp\left(c'_1 \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^2\{g\}}\right) \|\hat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu\|, \end{aligned}$$

где $C'_1 = C'_1(G) > 0$ и $c'_1 = c'_1(G, g) > 0$. Аналогичная оценка справедлива для вектор-функций ϕ'_μ и ϕ''_μ . Пусть $k' = k + k^0$. Будем выбирать векторы $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $k'_1 = k_1 + k_1^0 = \pi$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{\mathcal{D}}(\bar{A}; k + i\kappa^0 - i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\psi, \frac{1}{\mathcal{GH}}\widehat{\mathcal{D}}(A; k - i\kappa^0 + i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\phi \right) = \\ & = \left(\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu, \frac{1}{\mathcal{GH}}e^{2\hat{\sigma}_3(\Psi_0 - i\mu\Omega)}\widehat{\mathcal{D}}(k')\phi''_\mu \right). \end{aligned}$$

Для оператора $\widehat{\mathcal{D}}(k')$ из выражения (5) вытекает (так как $k'_1 = \pi$), что $\ker \widehat{\mathcal{D}}(k') = \{0\}$ и $R(\widehat{\mathcal{D}}(k')) = L^2(K; \mathbb{C}^2)$. Для каждой вектор-функции $\phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$ далее будем выбирать такую вектор-функцию $\psi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$, зависящую также от $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, A, \mu$ и k' , что

$$\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu = \frac{1}{\mathcal{GH}}e^{2\hat{\sigma}_3(\Psi_0 - i\mu\Omega)}\widehat{\mathcal{D}}(k')\phi''_\mu. \quad (16)$$

Тогда (см. (4) и теорему 6)

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{\mathcal{D}}(\bar{A}; k + i\kappa^0 - i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\psi, \frac{1}{\mathcal{GH}}\widehat{\mathcal{D}}(A; k - i\kappa^0 + i\mu\tilde{\kappa})\sqrt{\mathcal{GH}}\phi \right) \geq \\ & \geq p^{-2} \exp\left(-2c_6 \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^2\{g\}}\right) \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\psi''_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}(k')\phi''_\mu\| \geq \\ & \geq c_1^2 (pC'_1)^{-2} \exp\left(-2(c'_1 + c_6) \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^2\{g\}}\right) \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\|. \end{aligned}$$

Из полученной оценки и теоремы 5 следует

ТЕОРЕМА 7. *Существуют константы $\tilde{C} = \tilde{C}(G) > 0$, $c' = c'(G, g) > 0$ и $C'_2 = C'_2(G, A) > 0$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = k_1 + k_1^0 = \pi$, всех чисел $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$ и всех вектор-функций $\psi, \phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$, для которых $\hat{\sigma}_1\phi = \phi$ и выполнено равенство (16), справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{s=1}^2 \widetilde{\mathcal{W}}(A; k - i\kappa^0 + i\mu\tilde{\kappa}; \psi_s, \phi_1) \right| \geq \\ & \geq \tilde{C} \exp\left(-c' \sum_{j=1}^2 \|A_j\|_{L^2\{g\}}\right) \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\| - C'_2 \|\psi'_\mu\| \cdot \|\phi'_\mu\|. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. *Равномерно по всем векторам $k' \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = \pi$ и всем ненулевым вектор-функциям $\phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$, для которых $\hat{\sigma}_1\phi = \phi$, имеем*

$$\frac{\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\|}{\|\phi'_\mu\|} \rightarrow +\infty$$

при $\mu \rightarrow +\infty$ ($\mu \in 2\pi\mathbb{N}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\tilde{\phi}_\mu = e^{\mu\Phi}\phi$. Тогда $\phi'_\mu = e^{-i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\tilde{\phi}_\mu$ и

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\|^2 = \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\tilde{\phi}_\mu\|^2 + \mu^2 \int_K \left(\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} \right)^2 \right) |\tilde{\phi}_\mu|^2 d^2x$$

$(\partial\Omega/\partial x_j \cdot |\tilde{\phi}_\mu| \in L^2(K), j = 1, 2, \text{ в силу леммы 1}).$ Пусть

$$K_\epsilon = \left\{ x \in K : \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} \right)^2 \leq \epsilon^2 \right\}, \quad \epsilon > 0.$$

Из леммы 3 следует, что $\text{mes}(K_\epsilon) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow +0$. Для всех функций $W \in L^3(K)$, всех векторов $k' \in \mathbb{R}^2 : k'_1 = \pi$ и всех вектор-функций $\chi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2)$ справедливо неравенство

$$\|W\chi\| \leq c_8 \|W\|_{L^3(K)} \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\chi\|, \quad (17)$$

где c_8 — универсальная постоянная. Определим невозрастающую функцию $[\pi, +\infty) \ni t \rightarrow \epsilon(t) > 0$ так, что $c_8^2 (\text{mes}(K_{\epsilon(t)}))^{2/3} t^2 \leq 1/2$ для всех t . Если $\|\tilde{\phi}_\mu\| = 1$, то для каждого $t \geq \pi$ либо $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\tilde{\phi}_\mu\| \geq t$, либо $\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\tilde{\phi}_\mu\| < t$. Во втором случае из (17) получаем

$$\int_{K_{\epsilon(t)}} |\tilde{\phi}_\mu|^2 d^2x \leq c_8^2 (\text{mes}(K_{\epsilon(t)}))^{2/3} \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\tilde{\phi}_\mu\|^2 \leq \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\int_K \left(\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} \right)^2 \right) |\tilde{\phi}_\mu|^2 d^2x \geq \int_{K \setminus K_{\epsilon(t)}} \epsilon^2(t) |\tilde{\phi}_\mu|^2 d^2x \geq \frac{1}{2} \epsilon^2(t).$$

Поэтому для всех вектор-функций $\tilde{\phi}_\mu$, для которых $\|\tilde{\phi}_\mu\| = 1$ (тогда также $\|\phi'_\mu\| = 1$), имеем

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\|^2 \geq \sup_{t \geq \pi} \min \left\{ t^2, \frac{1}{2} \mu^2 \epsilon^2(t) \right\} \rightarrow +\infty$$

при $\mu \rightarrow +\infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8. Для всех $\epsilon > 0$, всех векторов $k' \in \mathbb{R}^2 : k'_1 = \pi$, всех $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$ и всех вектор-функций $\psi, \phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^2) : \hat{\sigma}_1\phi = \phi$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{s=1}^2 \tilde{\mathcal{V}}(\psi_s, \phi_1) \right| \leq \epsilon \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\| + C'_\epsilon \|\psi'_\mu\| \cdot \|\phi'_\mu\|,$$

где C'_ϵ — константы из оценки (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\tilde{\mathcal{V}}'(\psi, \phi) = \sum_{s=1}^2 \tilde{\mathcal{V}}(\psi_s, \phi_s)$. Из (10) следует равенство $\tilde{\mathcal{V}}'(\psi, \phi) = \tilde{\mathcal{V}}'(\psi'_\mu, e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\tilde{\phi}_\mu)$, $\tilde{\phi}_\mu = e^{\mu\Phi}\phi$, которое с учетом (9) приводит к оценке

$$|\tilde{\mathcal{V}}'(\psi, \phi)| \leq \epsilon \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\psi'_\mu\| \cdot \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\tilde{\phi}_\mu\| + C'_\epsilon \|\psi'_\mu\| \cdot \|\phi'_\mu\|,$$

справедливой для всех $\epsilon > 0$, всех векторов $k' \in \mathbb{R}^2$: $k'_1 = \pi$ и всех $\mu \in 2\pi\mathbb{N}$. Но с другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')e^{i\mu\hat{\sigma}_3\Omega}\tilde{\phi}_\mu\|^2 &= \left\| \left(\widehat{\mathcal{D}}_0(k') + i\mu \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\hat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\hat{\sigma}_2 \right) \right) \tilde{\phi}_\mu \right\|^2 = \\ &= \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\tilde{\phi}_\mu\|^2 + \mu^2 \left\| \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\hat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\hat{\sigma}_2 \right) \tilde{\phi}_\mu \right\|^2 = \\ &= \left\| \left(\widehat{\mathcal{D}}_0(k') - i\mu \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\hat{\sigma}_1 - \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\hat{\sigma}_2 \right) \right) \tilde{\phi}_\mu \right\|^2 = \|\widehat{\mathcal{D}}_0(k')\phi'_\mu\|^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 4 теперь следует из теорем 7, 8 и леммы 5.

Список литературы

- [1] *P. Kuchment, S. Levendorskii.* Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 354. P. 537–569.
- [2] *М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина.* Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
- [3] *Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг.* Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 5. С. 197–240.
- [4] *Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг.* Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 2. С. 159–206.
- [5] *Л. И. Данилов.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 3–17.
- [6] *Л. И. Данилов.* Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 1. С. 49–62.
- [7] *L. Friedlander.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 229. P. 49–55.
- [8] *М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина.* Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36.
- [9] *A. Morame.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 7593–7601.
- [10] *М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг.* Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 6. С. 140–177.
- [11] *Р. Г. Штеренберг.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 276–312.
- [12] *Р. Г. Штеренберг.* Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 4. С. 196–228.
- [13] *E. Shargorodsky, A. V. Sobolev.* Quasi-conformal mappings and periodic spectral problems in dimension two. math.SP/0109216.
- [14] *Л. И. Данилов.* Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. II. Деп. в ВИНТИ 09.04.01. № 916-B2001. М.: ВИНТИ, 2001.
- [15] *Л. И. Данилов.* Изв. Института математики и информатики УдГУ. 2002. № 3 (26). С. 3–98.
- [16] *Л. И. Данилов.* ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 3–14.
- [17] *M. Sh. Birman, T. A. Suslina.* The periodic Dirac operator is absolutely continuous. Preprint ESI № 603. Wien: The Erwin Schrödinger Internat. Inst. for Math. Phys., 1998.
- [18] *P. Kuchment.* Floquet Theory for Partial Differential Equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
- [19] *М. Руд, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
- [20] *Z. Shen.* Int. Math. Res. Notices. 2001. V. 1. P. 1–31.
- [21] *L. E. Thomas.* Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 335–343.

Поступила в редакцию 10.I.2002 г.,
после доработки 13.VI.2002 г.