Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Демской, А. Г. Мешков, Представление Лакса для триплета скалярных полей, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 3, 401–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:36:19

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ ТРИПЛЕТА СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Построено матричное (3×3) -представление нулевой кривизны для системы из трех двумерных релятивистски-инвариантных скалярных полей. Эта система принадлежит к классу, описываемому лагранжианом вида $L = [g_{ij}(u)u_x^i u_t^j]/2 + f(u)$, где g_{ij} – метрический тензор трехмерного приводимого риманова пространства. Ранее авторами были найдены все системы из указанного класса, обладающие высшими полиномиальными симметриями 2, 3, 4 или 5-го порядка. В данной работе найдено представление нулевой кривизны для одной из этих систем. Вычисление опирается на исследование эволюционной системы $u_t = S(u)$, где S – одна из высших симметрий. Такой подход может быть применен и к другим гиперболическим системам. Кроме того, найдены рекуррентные соотношения для последовательности сохраняющихся токов рассмотренного триплета скалярных полей.

Ключевые слова: представление Лакса, гиперболические системы, высшие симметрии, высшие законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая в работе система принадлежит к классу лагранжевых релятивистски-инвариантных двумерных систем вида

$$u_{tx}^i + \Gamma_{jk}^i(u)u_x^j u_t^k = f^i(u), \quad f^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j}, \quad (1)$$

где g_{ij} – метрический тензор n -мерного риманова пространства, Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля второго рода. Лагранжиан системы записывается в виде

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(u) u_x^i u_t^j + f(u). \quad (2)$$

Первая интегрируемая система вида (1) – система для полей со значениями на $\mathbb{S}^n$ – была описана в работе [1]. Такие системы являются модельными в квантовой теории поля и в теории магнетиков, поэтому они постоянно привлекают к себе интерес исследователей и им посвящено огромное число публикаций. По этой причине мы сошлемся

*Орловский государственный университет, Орел, Россия. E-mail: demskoy@iname.com, meshkov@orel.ru

лишь на некоторые обзорные работы [2], попавшие в поле нашего зрения. В большинстве работ, процитированных в указанных обзорах, изучаются уравнения главных киральных полей при помощи известного представления нулевой кривизны. Там же можно найти ссылки на работы, в которых получены новые интегрируемые системы при помощи редукций, введенных в работе [3] для главных киральных полей.

Иной подход к интегрируемым системам, основанный на теории двумерных поверхностей, по сути дела был заложен в работах Бианки, Беклунда и других классиков (см. например, [4]). Эти идеи были переосмыслены в работах [5] и применены к построению интегрируемых систем вида (1). В связи с этим геометрический подход называется иногда методом Лунда–Редже. Геометрический подход описан во многих обзорах (см., например, [6]). Известны также работы, в которых системы вида (1) возникли в результате удачного выбора матриц, реализующих представление нулевой кривизны нелинейной системы (см., например, [7]).

В недавней работе [8] предложена теоретико-групповая конструкция интегрируемых систем вида (1) с аффинной связностью Γ_{jk}^i и ненулевой вектор-функцией f^i . Выбирая конкретную полупростую группу Ли, можно получать новые интегрируемые системы. Авторы приводят два примера: $SL(2)$ и $SO(3)$. В первом случае получается уравнение синус-Гордон, а во втором – новая, по-видимому, интегрируемая система с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(u_x^1 u_t^1 + u_x^2 u_t^2 + u_x^3 u_t^3) + \cos u^3 u_t^1 u_x^2 - p \cos u^3 + a \cos u^1 \sin u^3,$$

где a и p – постоянные. Заметим, что этот лагранжиан можно записать в виде (2) только с несимметричной метрикой.

Все перечисленные выше подходы затруднительно применить для решения задачи об интегрируемости наперед заданной системы. Наиболее последовательным подходом к решению таких (а также классификационных) задач является, на наш взгляд, симметричный подход [9]. Однако при симметричной классификации систем (1) в общей постановке возникают серьезные технические трудности в противоположность эволюционным системам. Поэтому обычно делаются разного рода упрощающие предположения. Наиболее важные результаты, полученные этим способом, содержатся в работах [10], где получено “векторно-матричное” обобщение системы главных киральных полей и изучены поля со значениями в неассоциативных алгебрах, а также найдены новые интегрируемые системы вида (1) (при $f = 0$) на таких алгебрах.

В работе [11], идейно близкой к симметричному подходу, найдены все системы с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\psi(u, v)(u_t v_x + u_x v_t) + f(u, v),$$

допускающие высшие сохраняющиеся плотности порядка 2 и 3, являющиеся полиномами от $u_n = \partial_x^n u$ и $v_m = \partial_x^m v$, $n, m > 0$. Таких систем существует только три:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \frac{u_t v_x + u_x v_t}{uv + c} + kuv, \\ L_2 &= \frac{1}{2} \frac{u_t v_x + u_x v_t}{uv + c} + kuv(uv + c), \\ L_3 &= \frac{1}{2} \frac{u_t v_x + u_x v_t}{u + v} + k(u + v), \end{aligned}$$

где $c \neq 0$ и k – постоянные. Отметим, что эти лагранжианы отличаются от приведенных в работе [11] точечным преобразованием. Система с лагранжианом L_1 эквивалентна системе Лунда–Редже (комплексный синус-Гордон), а лагранжиан L_3 приводится к квадратичному по полям виду $L_3 = \phi_t \psi_x + \phi_x \psi_t + 2k\phi\psi$ подстановкой

$$\begin{aligned} u + v &= 2\phi\psi, \\ u_t &= (\phi\psi)_t + i(\phi_t\psi - \phi\psi_t), & u_x &= (\phi\psi)_x - i(\phi_x\psi - \phi\psi_x), \\ v_t &= (\phi\psi)_t - i(\phi_t\psi - \phi\psi_t), & v_x &= (\phi\psi)_x + i(\phi_x\psi - \phi\psi_x). \end{aligned}$$

Эта подстановка совместна только при условии $\phi_{tx}\psi = \psi_{tx}\phi$ (или $(\phi_x\psi)_t = (\psi_t\phi)_x$), которое заведомо выполнено на решениях линейной системы уравнений Клейна–Гордона $\phi_{tx} = k\phi$, $\psi_{tx} = k\psi$.

В работе [12] были исследованы свойства высших полиномиальных симметрий системы (1) общего вида. В частности, было доказано, что если существуют высшие полиномиальные симметрии, то существуют *однородные* высшие полиномиальные симметрии

$$\begin{aligned} \tau^i(u, u_k) &= a_j^i(u)u_n^j + A_{jk}^i(u)u_{n-1}^j u_1^k + \\ &+ B_{jk}^i(u)u_{n-2}^j u_2^k + F_{jks}^i(u)u_{n-2}^j u_1^k u_1^s + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_k^i = \partial_x^k u^i$. Коэффициенты симметрии τ удовлетворяют некоторым уравнениям, первые два из которых имеют вид

$$\nabla_i a_k^j = 0, \quad \nabla_i T_{ks}^j = (n+1)a_m^j R_{k si}^m + a_m^j R_{iks}^m + a_k^m R_{sim}^j, \quad (4)$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования по u^i , $R_{jks}^i(u)$ – тензор Римана конфигурационного пространства, а T_{jk}^i – тензор, выражающийся через A_{jk}^i . При решении уравнений (4) в пространстве размерности $n > 2$ возникают серьезные трудности, поэтому мы ввели в работе [13] дополнительное ограничение, выбрав конфигурационное пространство 3-мерным и приводимым. В этом случае лагранжиан записывается в виде

$$L = \frac{1}{2}(u_t u_x + \psi(v, w)(v_t w_x + v_x w_t)) + f(u, v, w). \quad (5)$$

Нам не известны работы других авторов, в которых предпринимались бы попытки классифицировать интегрируемые системы с лагранжианом (5). Приводимые ниже результаты относятся именно к таким системам.

Из первого из уравнений (4) вытекает, что матрица a диагональна: $a = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$ для всех ψ , где c_i – постоянные. Будем считать, что $(u, v, w) = (u^1, u^2, u^3)$. Тогда из второго уравнения (4) следует, что если $(c_2, c_3) \neq 0$, то либо $\psi = (v+w)^{-1}$, либо $\psi = (vw+c)^{-1}$, где c – постоянная (как и для 2-полевой системы). Наоборот, если $a = \text{diag}(1, 0, 0)$, то, как отмечено в работе [13], система (1) с лагранжианом (5), где $f = g(v, w)e^{ku}$, $k = \text{const}$, а ψ и g – произвольные функции, допускает бесконечное число симметрий любых порядков с функциональным произволом вида

$$\sigma^1 = (D_x + k u_x^1)F, \quad \sigma^2 = k u_x^2 F, \quad \sigma^3 = k u_x^3 F, \quad (6)$$

где F – интеграл характеристического уравнения $D_t F = 0$. При произвольной функции g это уравнение имеет интеграл второго порядка $F_1 = u_{xx}^1 - k\psi u_x^2 u_x^3 - (k/2)(u_x^1)^2$. Произвольная функция вида $F = F(x, F_1, D_x F_1, D_x^2 F_1, \dots)$, очевидно, также является интегралом. Другие независимые интегралы для общего случая нам не известны. Наличие симметрий вида (6), которые мы называем вырожденными, скорее всего означает, что систему полевых уравнений можно частично проинтегрировать (пример подобного сорта содержится в работе [14]). Так как нашей целью было отыскание систем, интегрируемых методом обратной задачи, то мы считали $(c_2, c_3) \neq 0$ и рассматривали только две возможности: $\psi = (v + w)^{-1}$ и $\psi = (vw + c)^{-1}$. Для $\psi = (v + w)^{-1}$ невырожденные высшие симметрии существуют, только если система полевых уравнений распадается на две независимые подсистемы, что не интересно. В случае $\psi = (vw + c)^{-1}$ мы считали, что $c \neq 0$, так как в противном случае кривизна конфигурационного пространства равна нулю, а это другая задача. Таким образом, все нетривиальные системы с полиномиальными высшими симметриями, не сводящимися к (6), в 3-мерном приводимом пространстве имеют лагранжианы

$$L = \frac{1}{2}u_t u_x + \frac{1}{2} \frac{v_t w_x + v_x w_t}{vw + c} + f(u, v, w), \quad (7)$$

отличающиеся только видом функции f .

Задав симметрии в виде (3) при $n = 2, 3, 4, 5$ и решив определяющие уравнения, мы получили в работе [13] 9 различных функций f , причем функции $f(u, v, w) = f_1(u) + f_2(v, w)$, приводящие к распадающимся системам, отбрасывались в ходе классификации. Симметрии порядков выше пятого не рассматривались по той причине, что вычисления становятся слишком громоздкими.

Ввиду малодоступности источника [13] мы приводим ниже список функций f , соответствующих системам, допускающим высшие полиномиальные симметрии:

$$f = ave^{\sqrt{2}u} + bwe^{-\sqrt{2}u}, \quad (8a)$$

$$f = av^2 e^{2u} + bw^2 e^{-2u}, \quad (8б)$$

$$f = av^2 e^{2u} + bwe^{-u}, \quad (8в)$$

$$f = ave^u + bwe^{-u}, \quad (8г)$$

$$f = \left(vw + \frac{c}{2}\right) [ae^{\sqrt{2}u} + be^{-\sqrt{2}u}], \quad (8д)$$

$$f = a \left(vw + \frac{c}{2}\right) e^{\sqrt{2}u} + be^{-\sqrt{2}u}, \quad (8е)$$

$$f = a \left(vw + \frac{c}{2}\right) e^{\sqrt{2}u} + be^{-2\sqrt{2}u}, \quad (8ж)$$

$$f = \left(v^2 w + \frac{2}{3}vc\right) e^{\sqrt{2}u}, \quad (8з)$$

$$f = ve^{\sqrt{2/3}u}. \quad (8и)$$

Здесь a и b – произвольные постоянные. Заметим, что полевые функции u, v и w могут быть как вещественными, так и комплексными. В частности, можно считать, что

функции v и w – комплексно-сопряженные. Кроме того, при помощи преобразования $u \rightarrow u + \text{const}$ можно изменить значения постоянных a и b , если они ненулевые. Все системы с одной экспонентой (при $a = 0$ или $b = 0$, а также (8з), (8и)) имеют бесконечно много вырожденных симметрий вида (6), но не исключено существование и других вырожденных симметрий. Далее речь идет только о невырожденных симметриях.

Симметрию 2-го порядка допускает одна и только одна система (8а). Симметрии 3-го порядка допускают системы (8а)–(8ж). Симметрии 4-го порядка допускают только три системы – (8а), (8г) и (8е). Все они имеют структуру $\sigma = \{F_1, v_4 + F_2, -w_4 + F_3\}$, где $\text{ord } F_i = 3$. Системы (8з), (8и) имеют симметрии 5-го порядка и не допускают невырожденных симметрий более низкого порядка. Существование симметрий 5-го порядка у систем (8а)–(8ж) не проверялось, так как трудоемкость этой задачи сравнима с трудоемкостью вычисления представлений Лакса. Наличие у систем (8г) и (8е) симметрий 4-го порядка при отсутствии симметрий 2-го порядка – удивительный факт, объяснить который мы пока не можем.

Для доказательства интегрируемости систем (8а)–(8и) следует построить представления Лакса или преобразования Беклунда для этих систем. В данной работе мы строим представление нулевой кривизны для системы (8а).

2. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА

Опустив индекс в равенстве (1), можно записать его в виде

$$J_{ij} u_t^j = \frac{\delta f}{\delta u^i}, \quad J_{ij} = g_{ij} D_x + \Gamma_{j|k|i} u_x^k. \quad (9)$$

Вероятно, впервые в работе [15] было замечено, что оператор J – симплектический, а система (9) – гамильтонова. Она обладает трансляционной инвариантностью, и в силу теоремы Нетер (см., например, [16]) две компоненты ее тензора энергии-импульса T^{ij} являются сохраняющимися плотностями:

$$T^{00} = \frac{1}{2} g_{ij} u_x^i u_x^j, \quad T^{10} = -f.$$

Заменив в (9) f на $H = -T^{00}$, после несложных вычислений получаем эволюционную систему $u_t^i = u_x^i$. Это наводит на мысль о том, что высшие сохраняющиеся плотности могут привести к цепочке гамильтоновых систем, являющихся симметриями системы (9).

Для системы с лагранжианом (7) оператор J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varphi} D_x e^{\varphi} \psi \\ 0 & \psi e^{\varphi} D_x e^{-\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\psi = 1/(vw + c)$, $\varphi = D_x^{-1}(\psi v_x w)$. Нетрудно проверить, что

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} D_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\varphi} D_x^{-1} e^{-\varphi} \psi^{-1} \\ 0 & \psi^{-1} e^{-\varphi} D_x^{-1} e^{\varphi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждой сохраняющейся плотности H системы

$$u_{tx} = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad v_{tx} - \psi w v_x v_t = \psi^{-1} \frac{\partial f}{\partial w}, \quad w_{tx} - \psi v w_t w_x = \psi^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (10)$$

с лагранжианом (7) можно поставить в соответствие эволюционную систему в явной гамильтоновой форме:

$$u_t = D_x^{-1} \frac{\delta H}{\delta u}, \quad v_t = e^\varphi D_x^{-1} e^{-\varphi} \psi^{-1} \frac{\delta H}{\delta w}, \quad w_t = \psi^{-1} e^{-\varphi} D_x^{-1} e^\varphi \frac{\delta H}{\delta v}, \quad (11)$$

возможно, нелокальную.

Можно проверить, что функции

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} \psi (v w_x - v_x w), \\ H_1 &= \frac{1}{2} \psi (v_x w_{xx} - v_{xx} w_x - 2\sqrt{2} u_x v_x w_x) + \frac{1}{2} \psi^2 v_x w_x (v w_x - v_x w), \\ H_2 &= \frac{1}{8} u_{xx}^2 + \psi v_{xx} w_{xx} + \frac{1}{4} v_{xx} (2v \psi^2 w_x^2 - 3\sqrt{2} \psi u_x w_x) + \frac{1}{16} u_x^4 + \\ &\quad + \frac{1}{4} w_{xx} (2w \psi^2 v_x^2 + 3\sqrt{2} \psi u_x v_x) - \psi^3 v_x w_x (w^2 v_x^2 + v^2 w_x^2) + \\ &\quad + \frac{3}{4} \sqrt{2} \psi^2 u_x v_x w_x (v w_x - w v_x) - \frac{3}{4} \psi u_x^2 v_x w_x + \psi^2 \left(c\psi + \frac{1}{4} \right) w_x^2 v_x^2 \end{aligned}$$

являются сохраняющимися плотностями системы (10) с функцией (8а). Уравнения (11) для ЭТИХ ГАМИЛЬТонианов имеют вид

$$u_{t_0} = k, \quad v_{t_0} = -v, \quad w_{t_0} = w, \quad (12)$$

где k – постоянная интегрирования,

$$u_{t_1} = \sqrt{2} \psi v_x w_x, \quad v_{t_1} = v_{xx} - 2v \psi v_x w_x + \sqrt{2} u_x v_x, \quad (13)$$

$$w_{t_1} = -w_{xx} + 2w \psi v_x w_x + \sqrt{2} u_x w_x,$$

$$\begin{aligned} u_{t_2} &= \frac{1}{4} (u_{xxx} - u_x^3) + \frac{3}{4} \sqrt{2} \psi (v_{xx} w_x - w_{xx} v_x) + \\ &\quad + \frac{3}{4} \psi v_x w_x (\sqrt{2} \psi (v_x w - w_x v) + 2u_x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{t_2} &= v_{xxx} + \frac{3}{2} v_{xx} (\sqrt{2} u_x - 2\psi v w_x) + \frac{3}{4} v_x (\sqrt{2} u_{xx} + u_x^2) + \\ &\quad + 3\psi v_x w_x \left(v^2 w_x \psi - \sqrt{2} v u_x - \frac{1}{2} v_x \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} w_{t_2} &= w_{xxx} - \frac{3}{2} w_{xx} (\sqrt{2} u_x + 2\psi w v_x) + \frac{3}{4} w_x (u_x^2 - \sqrt{2} u_{xx}) + \\ &\quad + 3\psi v_x w_x \left(w^2 v_x \psi + \sqrt{2} w u_x - \frac{1}{2} w_x \right). \end{aligned}$$

Записывая систему (10) с функцией (8а) в явном виде

$$\begin{aligned} u_{xt} &= \sqrt{2}(ave^{\sqrt{2}u} - bwe^{-\sqrt{2}u}), \\ v_{xt} &= b\psi^{-1}e^{-\sqrt{2}u} + \psi wv_xv_t, \\ w_{xt} &= a\psi^{-1}e^{\sqrt{2}u} + \psi vw_xw_t, \end{aligned} \quad (15)$$

легко проверить, что “симметрия” (12) порождает группу эквивалентности этой системы:

$$u' = u + k\tau, \quad v' = ve^{-\tau}, \quad w' = we^{\tau}, \quad a' = ae^{\tau(1-k\sqrt{2})}, \quad b' = be^{-\tau(1-k\sqrt{2})}.$$

При $k = 1/\sqrt{2}$ группа эквивалентности становится группой масштабных симметрий системы (15). Ясно, что приведенное выше преобразование эквивалентности является суперпозицией трансляции $u' = u + \kappa$ и масштабной симметрии. Системы (13) и (14) в точности совпадают с высшими симметриями, которые вычислялись нами ранее.

При выводе уравнений (12)–(14) мы использовали тождества

$$\begin{aligned} cD_x^{-1}(\psi v_x e^{-\varphi}) &= ve^{-\varphi}, \quad cD_x^{-1}(\psi^2 w_x e^{\varphi}) = \psi w e^{\varphi}, \\ e^{\varphi} D_x^{-1} e^{-\varphi} h D_x &= h + e^{\varphi} D_x^{-1} e^{-\varphi} h \psi v_x w - e^{\varphi} D_x^{-1} e^{-\varphi} h_x, \\ e^{\varphi} D_x^{-1} e^{-\varphi} \psi^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial w} - D_x \frac{\partial H}{\partial w_x} + D_x^2 \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} \right) &= \\ &= \psi^{-1} D_x \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} - vw_x \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} - \psi^{-1} \frac{\partial H}{\partial w_x} + \\ &+ e^{\varphi} D_x^{-1} e^{-\varphi} \left(\psi^{-1} \frac{\partial H}{\partial w} + vw_x \frac{\partial H}{\partial w_x} + \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} (vw_{xx} + c\psi v_x w_x) \right), \end{aligned}$$

легко проверяемые дифференцированием.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Если какую-либо нелинейную систему можно представить как условие совместности линейной матричной системы $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_t = V\Psi$, т.е. в виде

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad (16)$$

то говорят, что эта система имеет представление нулевой кривизны. В уравнении (16) $[U, V]$ – коммутатор матриц, матрицы U и V зависят от полевых функций, их производных и некоторого параметра λ , называемого обычно спектральным параметром.

Для построения представления нулевой кривизны можно исходить из самого уравнения (16), считая матрицы U и V неизвестными функциями от полевых функций и некоторого конечного набора их производных. Для вполне интегрируемых эволюционных систем такая задача обычно легко решается, но для гиперболических систем ситуация совершенно иная: для заданной системы (1) получается практически нерешаемая система уравнений. Для упрощения можно выбрать матрицы U и V в виде

$$U = U_i(u)u_x^i + \bar{U}(u), \quad V = V_i(u)u_t^i + \bar{V}(u), \quad (17)$$

что соответствует решению, приведенному ниже. Тогда, подставив (17) в (16) и потребовав, чтобы получилась система (1), нетрудно получить для $U_i, V_i, \bar{U}$ и $\bar{V}$ следующую матричную систему уравнений в ковариантных производных:

$$\begin{aligned} \nabla_j U_i - \nabla_i V_j + [U_i, V_j] &= 0, & f^i(U_i - V_i) + [\bar{U}, \bar{V}] &= 0, \\ \nabla_i \bar{U} + [\bar{U}, V_i] &= 0, & \nabla_i \bar{V} + [\bar{V}, U_i] &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Непосредственное решение подобных систем представляется довольно безнадежной задачей. Поэтому мы использовали иной подход. Результаты раздела 2 позволяют надеяться, что рассматриваемая система (15), записанная в форме (11), является нелокальным членом иерархии эволюционных систем $u_t = S_n(u)$, подобно тому как уравнения синус-Гордон, мКдФ и его высшие аналоги образуют одну иерархию (см., например, [17]).

Если эта гипотеза верна, то будет естественным предположить, что эволюционные системы иерархии связаны не зависящим от D_t рекурсионным оператором R : $RS_n = S_{n+1}$, удовлетворяющим уравнениям

$$[D_t - S_n', R] = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

где D_t — эволюционная производная, а штрих означает производную Фреше. Заменив здесь R на $L = R - \lambda$, где λ — параметр, получаем представления Лакса для всех уравнений иерархии. Если преобразовать систему $R\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi_t = S_n'\varphi$ к нормальной форме $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_t = V_n\Psi$, то получим матрицы U и V_n , входящие в представление нулевой кривизны для n -го уравнения иерархии. Таким образом, матрица U представления нулевой кривизны одна и та же для всех уравнений иерархии.

Итак, если наши предположения верны, то исследование интегрируемости системы (15) можно выполнить двумя способами: 1) вычислив рекурсионный оператор R , получим представления Лакса (19) сразу для всех систем иерархии; 2) вычислив матрицы U и V , входящие в представление нулевой кривизны для простейшей из систем $u_t = S_1$, можно подставить матрицу U в уравнения (18) и найти матрицу V для системы (1). Мы избрали в данной работе второй способ.

Предположим, что матрица U для системы (13) имеет вид (17). Тогда соответствующая матрица V_1 должна зависеть от полевых функций и их производных до второго порядка включительно. Заменяя в (16) u_t, v_t и w_t согласно (13), мы нашли

$$U = \frac{1}{3}v^{-1}v_x\psi A_1 + be^{-\sqrt{2}u}v^{-1}(A_2 - (3vw + c)A_3) + \lambda ave^{\sqrt{2}u}A_4, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}[v^{-1}\psi(v_{xx} + \sqrt{2}v_xu_x) - \psi^2v_xw_x]A_1 + 3be^{-\sqrt{2}u}w_xA_3 + \\ &+ \lambda ae^{\sqrt{2}u}v_x\left(A_4 - \frac{1}{3}\psi A_5\right) - ab(3\lambda vwA_6 + A_9), \end{aligned} \quad (21)$$

где λ – параметр, а постоянные матрицы A_i удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= 2c(cA_3 - A_2), & [A_1, A_3] &= A_2 - cA_3, \\ [A_1, A_4] &= A_5, & [A_1, A_5] &= 3cA_5, & [A_1, A_6] &= A_8, \\ [A_1, A_9] &= \lambda c(2A_7 + A_8 - 2cA_6) - \lambda[A_2, A_5], \\ [A_2, A_3] &= 0, & [A_2, A_4] &= A_7, & [A_2, A_9] &= c\lambda[A_2, A_6], \\ [A_3, A_4] &= A_6, & [A_3, A_6] &= 0, & [A_3, A_5] &= cA_6 - A_7 + A_8, \\ [A_3, A_9] &= \lambda[A_2, A_6], & [A_4, A_5] &= [A_4, A_6] = [A_4, A_9] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Приведенные здесь уравнения были упрощены с помощью тождества Якоби, а при их выводе предполагалось, что $ab \neq 0$.

Возможны по меньшей мере два способа решения коммутационных уравнений (22). Первый способ состоит в том, чтобы задать размер матриц, выбрать одну из них в нормальной форме и найти элементы остальных матриц из имеющихся уравнений. Этот способ требует перебора огромного числа вариантов. Идея второго способа содержится в работах [18] и сводится к тому, чтобы замкнуть таблицу коммутаторов, а затем построить представление полученной алгебры Ли. Для этого неизвестные коммутаторы либо задаются в виде разложения по имеющимся элементам алгебры A_i , либо объявляются новыми независимыми элементами алгебры. Точнее говоря, на каждом шаге проверяются следующие предположения относительно имеющихся элементов алгебры:

- а) A_i линейно зависимы;
- б) A_i линейно независимы и образуют базис;
- в) A_i линейно независимы, но не образуют базиса.

Чтобы проверить предположение а), линейная комбинация всех элементов A_i приравнивается к нулю и вычисляются коммутаторы этого уравнения со всеми элементами алгебры. Получаемые таким путем соотношения либо пополняют таблицу коммутаторов, либо приводят к противоречию.

В случае б) разлагаем недостающие коммутаторы по базису с неопределенными коэффициентами и проверяем тождества Якоби. Это можно сделать двумя способами: 1) некоторый часто встречающийся неизвестный коммутатор разложить по базису с неопределенными коэффициентами и отыскать простые следствия из этого равенства при помощи тождеств Якоби, затем рассмотреть следующий коммутатор и т.д.; 2) задать сразу все недостающие коммутаторы с неопределенными коэффициентами, построить присоединенное представление и подставить его матрицы в коммутационные соотношения. Это дает полную систему следствий из всех тождеств Якоби. Решение такой квадратичной системы обычно требует длительных расчетов на высокопроизводительном компьютере.

В случае в) для каждого из неизвестных коммутаторов есть две возможности: либо это новый элемент алгебры, либо он разлагается по предыдущим элементам. Для исследования этих вариантов вновь используются тождества Якоби.

Для выполнения описанной работы мы применяли пакет программ JET, который содержит практически полный набор программ для исследования полной интегрируемой

ти двумерных эволюционных систем [19]. Наш опыт показал, что при построении алгебр псевдопотенциалов для 2- и 3-полевых эволюционных систем до третьего порядка включительно для замыкания таблицы коммутаторов требуется не очень большое число шагов. При детальном исследовании полученных алгебр Ли обычно выявлялся центр алгебры. В таких случаях мы переходили к фактор-алгебре, полагая элементы центра равными нулю. В итоге матрицы U и V всегда вкладывались в простые классические алгебры. Для построения представления найденной алгебры мы применяли стандартный алгоритм: отыскивалась подалгебра Картана, строился базис Картана–Вейля и выписывался явный вид всех матриц.

Решение уравнений (22) низшей матричной размерности 3 имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= c(e_{22} - e_{33}) + 2c^2 e_{13} + e_{31}, & A_2 &= e_{32}, & A_3 &= e_{12}, \\ A_4 &= e_{23}, & A_5 &= 2ce_{23} - e_{21}, & A_6 &= e_{13}, & A_7 &= e_{33} - e_{22}, \\ A_8 &= e_{33} - e_{11} + ce_{13}, & A_9 &= \lambda(e_{11} + ce_{13}), \end{aligned} \quad (23)$$

где e_{ij} – базисные матрицы Вейля. Эти выражения позволяют получить явный вид матриц (20) и (21), реализующих представление нулевой кривизны для эволюционной системы (13).

Обратимся теперь к вычислению матрицы V для исходной гиперболической системы (15). Подставляя в уравнения (18) матрицу (20), нетрудно найти, что матрица V имеет вид

$$V = u_t B_1 + v^{-1} v_t B_2 + w_t v \psi B_3 + B_4,$$

где B_i – постоянные матрицы:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\sqrt{2}}{3}(e_{22} - e_{11} - e_{33}), & B_2 &= \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} - 2e_{33}) + ce_{13}, \\ B_3 &= \frac{1}{3}(2e_{11} - e_{22} - e_{33}) - 2ce_{13}, & B_4 &= \frac{1}{\lambda}(2ce_{12} + e_{32}) - \frac{1}{3}(e_{21} + ce_{23}). \end{aligned}$$

Таким образом, представление нулевой кривизны для системы (15) реализуется матрицами

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -v^{-1}(3vw + c)be^{-\sqrt{2}u} & \frac{2c^2}{3}v^{-1}v_x\psi \\ 0 & \frac{c}{3}v^{-1}v_x\psi & \lambda v a e^{\sqrt{2}u} \\ \frac{1}{3}v^{-1}v_x\psi & v^{-1}be^{-\sqrt{2}u} & -\frac{c}{3}v^{-1}v_x\psi \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$V = \begin{pmatrix} h_1 & 2c\lambda^{-1} & cv^{-1}v_t - 2cw_t v\psi \\ -\frac{1}{3} & h_2 - h_1 & -\frac{c}{3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -h_2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где

$$\psi = (vw + c)^{-1}, \quad h_1 = \frac{1}{3}(v^{-1}v_t + 2w_t v\psi - \sqrt{2}u_t), \quad h_2 = \frac{1}{3}(2v^{-1}v_t + w_t v\psi + \sqrt{2}u_t).$$

Напомним, что с самого начала мы считали $ab \neq 0$. А так как система (15) симметрична относительно перестановки $v \leftrightarrow w$, $u \leftrightarrow -u$, $a \leftrightarrow b$, то мы будем считать, что постоянная $a \neq 0$ и ее можно обратить в единицу подстановкой $u \rightarrow u - 2^{-1/2} \ln a$. Если $b = 0$, то легко заметить, что в этом случае система $\Psi_x = U\Psi$ интегрируется в квадратах и не пригодна для решения нелинейной системы.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Для построения законов сохранения системы (15) мы воспользуемся алгоритмом, предложенным в работе [20].

Пусть вектор-функция Ψ удовлетворяет линейной системе уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi. \quad (26)$$

Положим $\varphi = \Psi/(c, \Psi)$, где c – постоянный вектор, а (c, ψ) – евклидово скалярное произведение. Тогда, как легко проверить, вектор-функция φ удовлетворяет нелинейной системе

$$\varphi_x = U\varphi - \varphi(cU\varphi), \quad \varphi_t = V\varphi - \varphi(cV\varphi), \quad (c, \varphi) = 1. \quad (27)$$

Условие совместности этой системы приводит (с учетом (16)) к дифференциальному закону сохранения

$$D_t(cU\varphi) = D_x(cV\varphi).$$

Разлагая здесь φ по степеням λ , можно получить бесконечную последовательность законов сохранения. Следовательно, функции

$$\rho = (cU\varphi), \quad \theta = (cV\varphi) \quad (28)$$

являются производящими функциями для сохраняющихся плотностей и плотностей потоков соответственно.

Рассмотрим уравнения (27) с матрицами (24) и (25), где в соответствии с замечанием, сделанным в конце предыдущего параграфа, положим $a = 1$ и будем считать $b \neq 0$. В этом случае можно выбрать $c = (0, 1, 0)$. Тогда из тождества $(c, \varphi) = 1$ следует $\varphi = (\varphi_1, 1, \varphi_3)$, а первая из систем (27) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_x &= -c \frac{v_x}{v} \psi \Phi - 3b \frac{e^{-\sqrt{2}u}}{v\psi} - \lambda v e^{\sqrt{2}u} \Phi \varphi_3, \\ \varphi_{3,x} &= \frac{v_x}{3v} \psi \Phi + b \frac{e^{-\sqrt{2}u}}{v} - \lambda v e^{\sqrt{2}u} \varphi_3^2, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\Phi = \varphi_1 - 2c\varphi_3$. При этом производящие функции (28) записываются в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \lambda v e^{\sqrt{2}u} \varphi_3 + \frac{cv_x}{3v} \psi, \\ \theta &= \frac{1}{3} \left(2\sqrt{2}u_t + \frac{v_t}{v} - v w_t \psi \right) - c\varphi_3 - \frac{1}{3} \Phi. \end{aligned} \quad (30)$$

Чтобы получить ВКБ-разложение для системы (29), положим

$$\lambda = \frac{k^2}{b}, \quad \Phi = gk^{-1}v^{-1}be^{-\sqrt{2}u}, \quad \varphi_3 = hk^{-1}v^{-1}be^{-\sqrt{2}u}.$$

Тогда уравнения (29) преобразуются к более простому виду

$$\begin{aligned} h_x &= \left(\frac{v_x}{v} + \sqrt{2} u_x \right) h + \frac{v_x}{3v} \psi g + k(1 - h^2), \\ g_x &= (v_x w \psi + \sqrt{2} u_x) g - k(3\psi^{-1} + gh). \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда ясно, что разложения для g и h должны иметь вид

$$h = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} h_i k^{-i}, \quad g = -3\psi^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i k^{-i}. \quad (32)$$

Подставляя эти ряды в (31), приходим к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} h_{i+1} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} u_x + \frac{v_x}{v} \right) h_i - \frac{1}{2} D_x h_i + \frac{v_x}{6v} \psi g_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i h_j h_{i-j+1}, \\ g_{i+1} &= 3\psi^{-1} h_{i+1} + (\sqrt{2} u_x + v_x w \psi) g_i - D_x g_i - \sum_{j=1}^i h_j g_{i-j+1}, \\ h_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_x, \quad g_1 = 3v w_x - \frac{3\sqrt{2}}{2\psi} u_x, \end{aligned} \quad (33)$$

где $i \geq 1$.

Выполняя все подстановки в (30), получаем ряды

$$\rho = k + \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i k^{-i}, \quad \theta = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i k^{-i},$$

определяющие канонические сохраняющиеся токи (ρ_i, θ_i) системы (15):

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{c v_x}{3v} \psi, \quad \rho_i = h_{i+1}, \quad i \geq 1, \\ \theta_0 &= \frac{1}{3} \left(2\sqrt{2} u_t + \frac{v_t}{v} - v w_t \psi \right), \quad \theta_1 = w b e^{-\sqrt{2} u}, \\ \theta_{i+1} &= -v^{-1} b e^{-\sqrt{2} u} \left(c h_i + \frac{1}{3} g_i \right), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Соотношения (33) и (34) легко кодируются в любой из символьных систем, поэтому нетрудно найти любое число сохраняющихся токов. Например,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= h_2 = \frac{1}{4} (u_x^2 + 2v_x w_x \psi - \sqrt{2} u_{xx}), \\ \rho_2 &= \frac{1}{4} \psi (v_{xx} w_x - v_x w_{xx} + 2\sqrt{2} u_x v_x w_x) + \frac{1}{4} \psi^2 v_x w_x (v_x w - v w_x) - \\ &\quad - \frac{1}{8} D_x (u_x^2 - \sqrt{2} u_{xx} + 4\psi v_x w_x), \\ \theta_2 &= b e^{-\sqrt{2} u} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} w u_x - w_x \right). \end{aligned}$$

Первые три закона сохранения $D_t \rho_i = D_x \theta_i$, $i = 0, 1, 2$, можно представить в симметричной форме:

$$\begin{aligned} D_t \left((vw_x - v_x w) \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} u_x \right) + D_x \left((vw_t - v_t w) \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} u_t \right) &= 0, \\ D_t \left(\frac{1}{2} u_x^2 + v_x w_x \psi \right) &= D_x (ve^{\sqrt{2}u} + wbe^{-\sqrt{2}u}), \\ D_t (\psi(v_{xx}w_x - v_x w_{xx} + 2\sqrt{2}u_x v_x w_x) + \psi^2 v_x w_x (v_x w - v w_x)) &= \\ &= D_x (e^{\sqrt{2}u} v_x - be^{-\sqrt{2}u} w_x). \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до полных производных $\rho_0 = H_0/3$, $\rho_1 = T^{00}/2$, $\rho_2 = -H_1/2$, а плотность ρ_3 эквивалентна гамильтониану H_2 .

Из соотношений (33) и формул (34) легко видеть, что сохраняющиеся плотности ρ_n не зависят от параметра b , а плотности потоков θ_n пропорциональны b при $n > 0$. Так как b не входит в знаменатели, то законы сохранения $D_t \rho_n = D_x \theta_n$ остаются справедливыми и при $b = 0$. Следовательно, в этом случае все ρ_n , $n > 0$, являются интегралами характеристического уравнения $D_t F = 0$. В частности, плотность ρ_1 пропорциональна интегралу F_1 , приведенному во введении. Плотность ρ_2 за вычетом $D_x F_1$ дает нам еще один независимый интеграл второго порядка.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Во-первых, отметим, что преобразование эквивалентности

$$U \rightarrow \tilde{U} = P^{-1}UP - P^{-1}P_x, \quad V \rightarrow \tilde{V} = P^{-1}VP - P^{-1}P_t$$

с матрицей

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2cv^{1/3} & 0 & -cv^{2/3} \\ 0 & v^{1/3} & 0 \\ v^{1/3} & 0 & v^{-2/3} \end{pmatrix}$$

приводит матрицы U и V к более симметричной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\psi v_x w & -bc^{-1}we^{-\sqrt{2}u} & 0 \\ \lambda ave^{\sqrt{2}u} & -\frac{1}{3}\psi v_x w & -\lambda ae^{\sqrt{2}u} \\ 0 & -bc^{-1}\psi^{-1}e^{-\sqrt{2}u} & \frac{2}{3}\psi v_x w \end{pmatrix}, \\ \tilde{V} &= \begin{pmatrix} h'_1 & \lambda^{-1} & -w_t \psi \\ -c & h'_2 - h'_1 & 0 \\ -v_t & 0 & -h'_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $h'_1 = -(\sqrt{2}u_t + \psi v w_t)/3$, $h'_2 = (\sqrt{2}u_t - 2\psi v w_t)/3$.

Для физических приложений могут оказаться полезными другие параметризации лагранжиана (7). Например, полагая $v = ze^{i\varphi}$, $w = ze^{-i\varphi}$, где z и φ — вещественные поля, получим

$$L = \frac{1}{2}u_t u_x + \frac{z_t z_x + z^2 \varphi_x \varphi_t}{z^2 + c} + f(u, ze^{i\varphi}, ze^{-i\varphi}). \quad (35)$$

Чтобы лагранжиан был вещественным, необходимо в каждом конкретном случае вводить некоторые дополнительные ограничения. Так, для системы (8а), где $a = b = 1$, поле u должно быть мнимым. Заменив в (35) для удобства $u \rightarrow iu\sqrt{2}$, получаем

$$L = -u_t u_x + \frac{z_t z_x + z^2 \varphi_x \varphi_t}{z^2 + c} + 2z \cos(\varphi + 2u). \quad (36)$$

Выбирая различным образом постоянную c , можно получить модели с разными свойствами. Если $c = m^2 > 0$, то, положив в (36) $z = m \operatorname{tg} \chi$, получаем конфигурационное пространство с индефинитной метрикой:

$$L = -u_t u_x + \cos^{-2} \chi \chi_t \chi_x + \sin^2 \chi \varphi_x \varphi_t + 2m \operatorname{tg} \chi \cos(\varphi + 2u). \quad (37)$$

Если же $c = -m^2 < 0$, то, положив $z = m \sin \chi$, получаем конфигурационное пространство с положительной метрикой:

$$L = u_t u_x + \chi_t \chi_x + \operatorname{tg}^2 \chi \varphi_x \varphi_t - 2m \sin \chi \cos(\varphi + 2u). \quad (38)$$

Все эти модели, как и исходная, являются интегрируемыми.

Для приложений, возможно, имеет значение эволюционная система (13), поэтому мы приведем здесь матрицу V_1 , входящую в представление нулевой кривизны этой системы:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\lambda ab & 3be^{-\sqrt{2}u} w_x & 2c^2 g - \lambda ab(3vw + c) \\ \frac{\lambda}{3} ae^{\sqrt{2}u} v_x \psi & cg & (1 - \frac{2}{3}c\psi) \lambda ae^{\sqrt{2}u} v_x \\ g & 0 & -cg \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$g = \frac{1}{3} v^{-1} \psi (v_{xx} + \sqrt{2} v_x u_x) - \frac{1}{3} \psi^2 v_x w_x.$$

Примененная нами модификация метода Уолквиста–Эстабрука может с успехом использоваться для других формально интегрируемых гиперболических систем. В дальнейшем мы собираемся доказать интегрируемость всех систем (8б)–(8и). Для систем (8б), (8г), (8д), (8е) соответствующие расчеты уже выполнены.

Благодарности. Авторы признательны участникам семинара в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау, в особенности А. Б. Шабату, В. В. Соколову и В. Г. Марихину за полезные обсуждения. Мы также благодарим рецензентов за стимулирующие критические замечания. Работа частично поддержана грантом РФФИ № 02-01-00431.

Список литературы

- [1] *K. Pohlmeyer*. Commun. Math. Phys. 1976. V. 46. P. 207–221.
- [2] *И. В. Чередник*. Алгебраические аспекты двумерных киральных полей I. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 17. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1981. С. 175–218; *А. М. Переломов*. УФН. 1981. Т. 134. № 4. С. 577–609; *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov*. Phys. Rep. 1983. V. 94. № 6. P. 313–404.
- [3] *В. Е. Захаров, А. В. Михайлов*. ЖЭТФ. 1978. Т. 74. № 6. С. 1953–1973.
- [4] *A. V. Bäcklund*. Lund Universitets Arsskrift. 1883. V. 19.
- [5] *F. Lund, T. Regge*. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 1524; *F. Lund*. Solitons and geometry. In: Nonlinear Equations in Physics and Mathematics. Proc. NATO Adv. Study Inst. Istanbul, Turkey, August 1–13, 1977. NATO Adv. Study Inst. Ser., Ser. C, V. 40. Ed. A. O. Barut. Dordrecht: Reidel, 1978. P. 143–175.
- [6] *A. Sym*. Soliton surfaces and their application (soliton geometry from spectral problems). In: Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems. Proc. 6th Scheveningen Conf., Scheveningen, The Netherlands, August 26–31, 1984. Lect. Notes Phys. V. 239. Ed. R. Martini. Berlin: Springer, 1985. P. 154–231.
- [7] *А. Б. Бопусов, В. В. Киселев*. ТМФ. 1983. Т. 54. № 2. С. 246–257; *H. Steudel*. Phys. Lett. A. 1985. V. 109. № 3. P. 85–86; *F. Pempinelli, S. Potenza*. J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 12. P. 2861–2867; *A. Roy Chowdhury, P. Mitra*. Int. J. Theor. Phys. 1989. V. 28. № 1. P. 119–126.
- [8] *A. V. Balandin, O. N. Pakhareva, G. V. Potyomin*. Phys. Lett. A. 2001. V. 283. № 3–4. P. 168–176.
- [9] *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, В. В. Соколов*. Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений. В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Ред. В. Г. Баряхтар, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко. Киев: Наукова думка, 1990. С. 213–279.
- [10] *С. И. Свинолулов, В. В. Соколов*. ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 214–218; *V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov*. Acta Appl. Math. 1995. V. 41. P. 323–339.
- [11] *Б. С. Гетманов*. Высшие интегралы в двумерных моделях теории поля. Комплексные скалярные поля. В сб.: Теоретико-групповые методы в физике. Тр. Междунар. Семинара, Звенигород, 24–26 ноября, 1982. Т. 2. Ред. М. А. Марков. М.: Наука, 1983. С. 333–344.
- [12] *А. Г. Мешков*. К симметрии двумерных скалярных полей кирального типа. Препринт № 28. Томск: ТНЦ СО АН СССР, 1991.
- [13] *D. K. Demskoi, A. G. Meshkov*. New integrable string-like fields in 1 + 1 dimensions. In: Proc. Second Int. Conf. Quantum Field Theory and Gravity (July 28 – August 2, 1997, Tomsk, Russia). Eds. I. L. Bukhbinder, K. E. Osetrin. Tomsk: Tomsk Pedagogical University, 1998. P. 282–285.
- [14] *А. Г. Мешков*. ТМФ. 1985. Т. 63. № 3. С. 323–332.
- [15] *О. И. Мокhov*. Функци. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. № 3. С. 86.
- [16] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [17] *S. Kumei*. J. Math. Phys. 1975. V. 16. № 12. P. 2461–2468; *K. M. Case, A. M. Roos*. J. Math. Phys. 1982. V. 23. № 3. P. 392–395; *P. Kaliappan, M. Lakshmanan*. J. Math. Phys. 1982. V. 23. № 3. P. 456–459.
- [18] *H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook*. J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1–7; 1976. V. 17. P. 1293–1297.
- [19] *А. Г. Мешков*. Инструменты для симметричного анализа дифференциальных уравнений в частных производных. Электронный журнал. Дифференц. Уравн. и Процессы Управления. 2002. № 1.
- [20] *J. M. Alberty, T. Koikawa, R. Sasaki*. Physica. D. 1982. V. 5. № 1. P. 43–74.

Поступила в редакцию 21.II.2002 г.,
после доработки 28.VIII.2002 г.