Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Караханян, О представлениях квантовой группы $SL_q(2)$ в пространстве функций, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 3, 374–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:18:09

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КВАНТОВОЙ ГРУППЫ $SL_q(2)$ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

Построены представления квантовой группы $SL_q(2)$ в функциональном пространстве. Рассмотрены случаи общих и исключительных значений параметра деформации q .

Ключевые слова: квантовая деформация, циклическое представление, операторы Казимира.

1. ВВЕДЕНИЕ

Представление групп симметрий в пространстве функций может быть использовано в приложениях теории интегрируемых систем для построения универсальной (сплетающей два произвольных представления) R -матрицы [1], поскольку оно дает единообразное описание представлений независимо от их размерности [2]. Представления q -деформированных (квантовых) групп [3] для вещественных положительных значений параметра деформации q являются по существу теми же самыми, что и в недеформированном случае. Когда параметр q принимает произвольные комплексные значения, q -деформированная универсальная обертывающая алгебра становится комплексной, с неунитарными представлениями, которые менее интересны с точки зрения физических приложений. Однако с точки зрения реализации в пространстве функций никаких принципиальных отличий от случая вещественных положительных значений q нет. Исключение составляет случай комплексных корней из единицы, который рассматривался еще на ранней стадии развития теории квантовых групп [4]. В этом случае появляются представления нового типа (циклические), не имеющие классического аналога. При этом унитарные представления существуют и, более того, появляются в физических приложениях [5]. При помощи функциональных представлений были вычислены собственные значения универсальной R -матрицы для магнетика Гейзенберга, симметричного относительно групп $SL(2)$, $SL(2|1)$ и $SL_q(2)$, а также дана ее реализация в виде интегрального оператора, действующего в соответствующих функциональных пространствах [2].

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения. E-mail: karakhan@lx2.yerphi.am

2. СЛУЧАЙ ОБЩИХ ЗНАЧЕНИЙ q

Группа $SL_q(2)$ характеризуется коммутационными соотношениями

$$[S^+, S^-] = \frac{q^{2S} - q^{-2S}}{q - q^{-1}} \equiv [2S]_q, \quad q^S S^\pm = S^\pm q^{S \pm 1}, \quad (1)$$

которые могут быть реализованы посредством операторов, действующих в конечных разностях:

$$\begin{aligned} q^S &= q^{x\partial - \ell}, & q^S f(x) &\equiv q^{-\ell} f(qx), \\ S^- &= x^{-1} \frac{q^{x\partial} - q^{-x\partial}}{q - q^{-1}}, & S^- f(x) &\equiv x^{-1} \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{q - q^{-1}}, \\ S^+ &= x \frac{q^{2\ell - x\partial} - q^{-2\ell + x\partial}}{q - q^{-1}}, & S^+ f(x) &\equiv x \frac{q^{2\ell} f(q^{-1}x) - q^{-2\ell} f(qx)}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

В общем случае существует только один оператор Казимира

$$\mathcal{C} = S^+ S^- + [S]_q [S - 1]_q = S^- S^+ + [S]_q [S + 1]_q, \quad (3)$$

который в указанной функциональной реализации кратен единичному:

$$\mathcal{C} = [\ell]_q [\ell + 1]_q, \quad \mathcal{C} f(x) = [\ell]_q [\ell + 1]_q f(x).$$

От мультипликативного действия операторов $S^\pm$ и $q^{\pm S}$ можно перейти к аддитивному при помощи замены переменных $x = q^t$:

$$\begin{aligned} q^S &= q^{-\ell} e^{\partial_t}, & q^S f(t) &\equiv q^{-\ell} f(t + 1), \\ S^- &= q^{-t} \frac{e^{\partial_t} - e^{-\partial_t}}{q - q^{-1}}, & S^- f(t) &\equiv q^{-t} \frac{f(t + 1) - f(t - 1)}{q - q^{-1}}, \\ S^+ &= q^t \frac{q^{2\ell} e^{-\partial_t} - q^{-2\ell} e^{\partial_t}}{q - q^{-1}}, & S^+ f(t) &\equiv q^t \frac{q^{2\ell} f(t - 1) - q^{-2\ell} f(t + 1)}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для построения представлений с наименьшим (наибольшим) весом необходимо решить уравнение

$$S^- \varphi_0 = 0 \quad (S^+ \varphi_0 = 0)$$

для младшего (старшего) веса представления. Имеем

$$S^- \varphi_0(t) = \frac{q^{-t}}{q - q^{-1}} [\varphi_0(t + 1) - \varphi_0(t - 1)] = 0, \quad \varphi_0(t + 1) = \varphi_0(t - 1),$$

т.е. младший вес представления дается функциями вида

$$\varphi_0(t) = \sum_k a_k e^{i\pi k t}$$

с произвольными комплексными коэффициентами a_k . Младший вес порождает все пространство представления:

$$\begin{aligned} \{\varphi_n(t)\} &= \{(S^+)^n \varphi_0(t)\}, \\ \varphi_n(t) &= (S^+)^n \varphi_0(t) = [2\ell]_q [2\ell - 1]_q \dots [2\ell - n + 1]_q \sum_k (-1)^{nk} a_k e^{(i\pi k + n \ln q)t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда видно, что младшие веса $\varphi_0^{(k)}(t) \equiv a_k e^{i\pi kt}$, являющиеся собственными векторами третьей компоненты проекции спина:

$$q^S \varphi_0^{(0)}(t) = (-1)^k q^{-\ell} \varphi_0^{(k)}(t),$$

порождают эквивалентные представления: $\{\varphi_0^{(k)}(t)\} = \{q^{nt} e^{i\pi kt}\}$.

В случае, когда параметр 2ℓ , характеризующий представление, дается положительным целым числом, произведение $\prod_{k=0}^{n-1} [2\ell - k]_q$ при некотором значении n обратится в нуль, т.е. представления с младшим весом, имеющие целый или полуцелый спин, обладают также и старшим весом и, следовательно, конечномерны. Базис в них дается $2\ell + 1$ функциями $\{\varphi_n^{(k)}\} = \{q^{nt} e^{2\pi ikt}\}$. В противном случае старшего веса не существует и представления бесконечномерны.

3. СЛУЧАЙ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ q

Условие обращения q -числа в нуль

$$[\alpha]_q \equiv \frac{q^\alpha - q^{-\alpha}}{q - q^{-1}} = 0, \quad q^{2\alpha} = 1,$$

имеет два решения: $\alpha = 0$ и $\alpha = N/2$, $q = e^{\pi i n/N}$. Первое возникает в рассмотренном выше случае общих значений q , а второе – в случае исключительных значений, соответствующих корням из единицы. Для простоты ограничимся рассмотрением примитивных корней $q = e^{\pi i/N}$. При этом возникают три новых оператора Казимира: $q^N S$ и $(S^\pm)^N$. Действительно, соотношения (1) дают

$$\begin{aligned} (q^S)^N S^\pm &= q^\pm S^\pm q^{NS} = S^\pm (q^S)^N, \\ q^S (S^-)^N &= q^N (S^-)^N q^S = (S^-)^N q^S, \\ [S^+, (S^-)^N] &= \sum_{n=0}^{N-1} (S^-)^{N-n-1} [S^+, S^-] (S^-)^n = \\ &= \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{n=0}^{N-1} (S^-)^{N-n-1} (q^{-2n} (S^-)^n q^{2S} - q^{2n} (S^-)^n q^{-2S}) = \\ &= \frac{(S^-)^{N-1}}{q - q^{-1}} \left(q^{2S} \sum_{n=0}^{N-1} q^{-2n} - q^{-2S} \sum_{n=0}^{N-1} q^{2n} \right) = 0, \end{aligned}$$

где мы учли, что для упомянутых значений q обе суммы обращаются в нуль по формуле суммирования геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^{2n} = \frac{q^{2N} - 1}{q^2 - 1} = 0.$$

Аналогично получим

$$[(S^+)^N, S^-] = 0, \quad (S^+)^N q^S = q^S (S^+)^N.$$

Это означает, что для указанных операторов соотношения

$$(S^\pm)^N = \alpha^\pm \mathbb{I}, \quad q^{NS} = q^{N\gamma} \mathbb{I}, \quad (6)$$

где $\mathbb{I}$ – единичная матрица, должны выполняться на *всех* векторах представления. Таким образом, все функции, реализующие представление, характеризуются значениями параметров ℓ , γ и $\alpha^\pm$, определяются как решения системы уравнений

$$(S^\pm)^N f(t) = \alpha^\pm f(t), \quad q^{NS} f(t) = q^{N\gamma} f(t). \quad (7)$$

Если $\alpha^+ = 0$ ($\alpha^- = 0$), это означает, что оператор S^+ (S^-) нильпотентен, а именно существует вектор, который аннигилируется этим оператором, т.е. представление обладает старшим (младшим) весом. Обратно, если предположить, что старшего (младшего) веса не существует, то это будет противоречить нильпотентности оператора S^+ (S^-). Таким образом, представление, соответствующее случаю $\alpha^+ = 0$ ($\alpha^- = 0$), можно получить, полагая параметр q равным соответствующему корню из единицы, в уже рассмотренном случае представлений со старшим (младшим) весом для общих значений q . Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что оба собственных значения $\alpha^\pm$ отличны от нуля. Рассмотрим уравнение для оператора $(S^-)^N$ (уравнение для оператора $(S^+)^N$ рассматривается совершенно аналогично), коммутируя множители $q^{-t} = x^{-1}$ налево. Получим

$$(S^-)^N f(x) = q^{-Nt} \prod_{n=0}^{N-1} [x\partial + n]_q f(x) = \alpha^- f(x).$$

Для функции

$$\Phi_N(\alpha) \equiv \prod_{n=0}^{N-1} [\alpha + n]_q \quad (8)$$

при помощи очевидного тождества

$$[\alpha + kN]_q = [\alpha]_q, \quad k \in \mathbb{Z},$$

легко установить свойство периодичности

$$\Phi_N(\alpha + 1) = \Phi_N(\alpha),$$

из которого следует, что при разложении произведения (8) в сумму могут остаться лишь члены, кратные $q^{\pm N\alpha}$ и единице:

$$\begin{aligned}\Phi_N(\alpha) &= (q - q^{-1})^{-N} (q^\alpha - q^{-\alpha}) (q^{\alpha+1} - q^{-\alpha-1}) \dots (q^{\alpha+N-1} - q^{-\alpha+1-N}) = \\ &= (q - q^{-1})^{-N} e^{i\pi(N-1)/2} (q^{\alpha N} - q^{-\alpha N}).\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь члены, кратные единице, появляются с коэффициентом $q^{N/2} + q^{-N/2}$, который при $q = e^{i\pi/N}$ обращается в нуль, и первые два уравнения из системы (7) приобретают следующий простой вид:

$$\begin{aligned}(S^+)^N f(t) &= (q - q^{-1})^{-N} e^{i\pi(1-N)/2} q^{Nt} (q^{2\ell N} f(t-N) - q^{-2\ell N} f(t+N)), \\ (S^-)^N f(t) &= (q - q^{-1})^{-N} q^{-Nt} e^{i\pi(N-1)/2} (f(t+N) - f(t-N)).\end{aligned}$$

Учитывая уравнения для третьего оператора Казимира

$$\begin{aligned}q^{N\gamma} f(t) &= q^{-N\ell} f(t+N), \\ q^{-N\gamma} f(t) &= q^{N\ell} f(t-N),\end{aligned}$$

которые выражают условие квазипериодичности образующих алгебры на языке аддитивной переменной t , получим

$$[q^{-Nt} (q^{N(\ell+\gamma)} - q^{-N(\ell+\gamma)}) - \alpha^- (q - q^{-1})^N] f(t) = 0, \quad (10)$$

$$[q^{Nt} (q^{N(\ell-\gamma)} - q^{-N(\ell-\gamma)}) - \alpha^+ (q - q^{-1})^N] f(t) = 0. \quad (11)$$

В качестве условия совместности этих уравнений возникает соотношение, устанавливающее зависимость между параметрами, характеризующими представление:

$$(q - q^{-1})^{2N} \alpha^+ \alpha^- = q^{2N\ell} + q^{-2N\ell} - q^{2N\gamma} - q^{-2N\gamma}. \quad (12)$$

Заметим, что предположение $\gamma = \pm\ell$, эквивалентное условию периодичности образующих алгебры (или предположение, что образующие реализуют состояния с определенной проекцией спина), немедленно приводит к условию $\alpha^+ = 0$ или $\alpha^- = 0$, т.е. к представлению со старшим или младшим весом. Легко видеть, что уравнениям (10), (11) удовлетворяет функция $f(t)$, равная нулю почти всюду:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - t_0 + n),$$

где t_0 — некоторый корень алгебраического уравнения, выражающего равенство нулю квадратной скобки в (10) или (11). Подставляя это выражение для функции $f(t)$ в уравнение для третьего оператора Казимира, получим рекуррентное соотношение, ограничивающее вид коэффициентов a_n :

$$a_{n-N} = q^{N(\gamma+\ell)} a_n \quad (13)$$

или

$$a_{k+pN} = q^{-N(\gamma+\ell)} a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, представления квантовой группы $SL_q(2)$ при $q = e^{2\pi i/N}$ конечномерны (имеют размерность N) и цикличны (все элементы могут быть получены из одного путем последовательного применения оператора S^+ (или S^-)). Явный вид образующих представления дается квазипериодическими обобщенными функциями:

$$f_k = \sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{-Np(\gamma+\ell)} \delta(t - t_0 + k + pN). \quad (14)$$

Другая реализация пространства представления алгебры $sl_q(2)$ при помощи аналитических квазипериодических функций может быть получена посредством реализации генераторов алгебры.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ТЕТА-ФУНКЦИЙ

Коммутационные соотношения алгебры $sl_q(2)$ могут быть реализованы при помощи генераторов алгебры Вейля $t_{\pm x}$ и $t_{\pm y}$:

$$\begin{aligned} t_{\pm y} t_{\pm x} &= q^2 t_{\pm x} t_{\pm y}, & t_{\pm y} t_{\mp x} &= q^{-2} t_{\mp x} t_{\pm y}, \\ t_x t_{-x} &= t_y t_{-y} = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

В такой записи образующие группы Вейля соответствуют генераторам “магнитных” трансляций в модели Анбеля–Хофштадтера [6], [7]. Полагая

$$S^{\pm} = \frac{q^{-\ell-1/2} t_{\pm x} + q^{\ell+1/2} t_{\pm y}}{q - q^{-1}}, \quad q^{\pm 2S} = -q t_{\pm x} t_{\mp y}, \quad (16)$$

легко получить, что операторы $S^{\pm}$ и S удовлетворяют алгебре (1). В случае, когда параметр деформации дается корнем из единицы, $q = e^{\pi i n/N}$, удобная реализация представлений группы Вейля была найдена в работе [6]. Напомним, что тета-функцией называется аналитическая функция, определяемая своим рядом Фурье:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(k^2\tau + 2kz)}, \quad \text{Im } \tau > 0. \quad (17)$$

Тета-функции с характеристиками вводятся при помощи операторов квазитрансляций S_a и T_b

$$S_b f(z) = f(z + b), \quad T_a f(z) = e^{i\pi(a^2\tau + 2az)} f(z + a\tau).$$

Они образуют следующую алгебру:

$$S_a S_b = S_{a+b}, \quad T_a T_b = T_{a+b}, \quad S_b T_a = e^{2\pi i a b} T_a S_b.$$

Тета-функции с характеристиками a, b определяются как результат действия этих операторов на обычную тета-функцию:

$$\theta_{a,b}(z, \tau) \equiv T_a S_b \theta(z, \tau). \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что операторы

$$t_{\pm x} \equiv T_{\mp 1/N}, \quad t_{\pm y} \equiv S_{\pm n} = S_{\pm 1}^n$$

удовлетворяют алгебре Вейля, а набор N функций

$$\theta_k(z, \tau) \equiv (T_{k/N} \theta)(z, \tau), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

реализует представление алгебры Вейля:

$$S_{\pm n} \theta_k = e^{\pm 2\pi i n k / N} \theta_k = q^{\pm k} \theta_k, \quad T_{\pm 1/N} \theta_k = \theta_{k \mp 1}.$$

Можно показать далее, что функции θ_k являются собственными функциями операторов Казимира $C, (S^\pm)^N, q^{NS}$. Имеем

$$(S^\pm)^N \theta_k(z, \tau) = \frac{q^{N(\ell+1/2)} \pm q^{-N(\ell+1/2)}}{(q - q^{-1})^N} \theta_k(z, \tau).$$

Иначе говоря, эти функции дают другую реализацию соответствующего циклического представления квантовой группы $SL_q(2)$. Связь между этими двумя реализациями дается сложным нелокальным преобразованием, включающим обобщенные функции.

5. СВЯЗЬ С ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ КАЦА–ДЕ КОНЧИНИ

Связь генераторов алгебры $sl_q(2)$ с образующими алгебры Вейля позволяет сопоставить полученный результат с реализацией Каца–Де Кончини и Арnaudона–Роше [8]. Для этого удобно несколько изменить определение предыдущего раздела, переопределяя параметр деформации:

$$t_{\pm y} t_{\pm x} = q t_{\pm x} t_{\pm y}, \quad t_{\pm y} t_{\mp x} = q^{-1} t_{\mp x} t_{\pm y}. \quad (19)$$

Теперь мы полагаем $q = e^{2\pi i / N}$, где число N нечетно. Такие соотношения легко реализовать при помощи введенных выше разностных операторов: $t_x = x, t_y = q^{x\partial}$. Тогда матричным генераторам Каца–Де Кончини соответствуют операторы

$$\begin{aligned} S^+ &= \frac{\lambda}{q - q^{-1}} t_x (q^\alpha t_y - q^{-\alpha} t_{-y}), \\ q^S &= q^{(\alpha+\beta)/2} t_y, \\ S^- &= \frac{\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} t_{-x} (q^\beta t_y - q^{-\beta} t_{-y}). \end{aligned} \quad (20)$$

В матричном виде образующие алгебры Вейля даются двумя квадратными матрицами: диагональной матрицей (t_x) со степенями $q^k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, на диагонали и матрицей (t_y) с N ненулевыми элементами – единицами над диагональю и в левом нижнем углу.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при реализации генераторов алгебры $sl_q(2)$ с помощью дифференциальных, а точнее конечно-разностных, операторов (2) или (4) оказалось возможным построить функциональное представление (14), которое дает возможность легко оперировать с представлениями любой размерности, а также строить прямое произведение таких представлений и определить на нем универсальный R -оператор. Такое исследование представляется актуальным, так как тригонометрические решения уравнения Янга–Бакстера, соответствующие комплексным корням из единицы, до сих пор изучены недостаточно. Оказывается, что при помощи описанной конструкции можно реализовать тензорное произведение двух таких представлений произвольной размерности. Тогда универсальная R -матрица, представленная в качестве оператора, действующего на таком пространстве, может быть получена из соответствующих операторнозначных соотношений Янга–Бакстера, из которых определяются собственные векторы и собственные значения универсального R -оператора. Эти расчеты близки к завершению и скоро будут опубликованы.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Volkswagen Stiftung.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тазтаджян. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 178.
- [2] S. Derkachov, D. Karakhanian, R. Kirschner. Nucl. Phys. B. 2000. V. 583. P. 691; 2001. V. 618. P. 589; D. Karakhanian, R. Kirschner, M. Mirumyan. Nucl. Phys. B. 2002. V. 636. P. 529.
- [3] П. П. Кулиш, Е. К. Склянин. ТМФ. 1979. Т. 40. С. 194; V. G. Drinfel'd. Quantum groups. In: Proc. Intl. Congress of Mathematicians (Berkeley, California, 1986). Ed. A. M. Gleason. Providence, RI: AMS, 1987. P. 798.
- [4] Е. К. Склянин. Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 4. С. 34.
- [5] L. Alvarez-Gaume, C. Gomes, G. Sierra. Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 347.
- [6] T. Hakobyan, A. Sedrakyan. Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. P. 495.
- [7] P. W. Wiegmann, A. V. Zabrodin. Mod. Phys. Lett. A. 1987. V. 2. P. 893.
- [8] C. De Concini, V. G. Кас. Representations of quantum groups at roots of 1. In: Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras and Invariant Theory. Proc. Colloq. in Honour of J. Dixmier (Paris, 22–26 May, 1989). Progr. Math. V. 92. Eds. A. Connes, M. Duflo, A. Joseph, R. Rentschler. Boston, MA: Birkhäuser, 1990. P. 471; D. Arnaudon, P. Roche. Lett. Math. Phys. 1989. V. 17. P. 295.

Поступила в редакцию 29.XI.2001 г.,
после доработки 2.IV.2002 г.