Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Двухчастотные автоволновые процессы в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 3, 353–373

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:11:44

© 2003 г.

А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов†

ДВУХЧАСТОТНЫЕ АВОВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОМПЛЕКСНОМ УРАВНЕНИИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Исследуется комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с нулевыми граничными условиями Неймана на конечном отрезке. Устанавливается, что эта краевая задача (при подходящем выборе параметров) имеет счетное число устойчивых двумерных автомодельных торов. Изучается также случай периодических граничных условий.

Ключевые слова: уравнение Гинзбурга–Ландау, авоволновой процесс, краевая задача, автомодельный тор, квазипериодическое решение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамики, в частности в теории волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости, широко используется так называемое кубическое уравнение Шредингера [1]–[3]

$$iu_t + \sigma_0 u_{xx} - c_0 |u|^2 u = 0, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$ – комплекснозначная функция, σ_0, c_0 – вещественные постоянные, причем $\sigma_0 > 0$, а знак c_0 произволен. Это уравнение имеет бесконечное число законов сохранения, а его типичные решения – солитоны [2]. В тех случаях, когда необходим учет диссипативных процессов, источников и стоков, уравнение (1) нуждается в обобщении. Одним из таких обобщений служит уравнение

$$iu_t + \sigma_0 u_{xx} - iu + (i - c_0) |u|^2 u = 0, \quad (2)$$

получающееся из (1) путем добавления слагаемого $-iu$, отвечающего за “подкачку” энергии, и слагаемого $i|u|^2 u$, характеризующего диссипацию.

Обратим внимание, что (2) – это известное уравнение Гинзбурга–Ландау, в левой части которого учтена дифракция (слагаемое $\sigma_0 u_{xx}$), но отсутствует диффузионный

* Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия.
E-mail: kolesov@univ.uni Yar.ac.ru

† Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: rozov@rozov.mcsme.ru

член $-iau_{xx}$, $a > 0$. Такая ситуация типична для лазерных резонаторов и других нелинейных оптических пространственных сред, поскольку световые лучи обладают поперечной дифракцией, но не диффузией. Само же уравнение (2) описывает в этом случае пространственную эволюцию электромагнитного волнового пакета $u(t, x)$ в указанных средах.

Рассмотрим уравнение (2) на отрезке $0 \leq x \leq \pi$, дополнив нулевыми граничными условиями Неймана на его концах,

$$u_t = i\sigma_0 u_{xx} + u - (1 + ic_0)|u|^2 u, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0. \quad (3)$$

Помимо уже упоминавшихся физических приложений исследование полученной краевой задачи актуально и в связи с тем, что она описывает автоколебательные процессы в целом классе сингулярно возмущенных волновых уравнений [4], [5]. С ее помощью также моделируется явление диффузионной буферности, возникающее в экологии [6], [7].

В этой связи представляют интерес аттракторы краевой задачи (3) в фазовом пространстве $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in \mathring{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$, где $\mathring{W}_2^2$ – гильбертово пространство вектор-функций класса W_2^2 , удовлетворяющих граничным условиям из (3). Использование фазового пространства позволяет практически без изменений распространять на уравнения с частными производными основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как показано в работах [4], [5], основной интерес представляют специальные решения краевой задачи (3) – так называемые автомодельные циклы и торы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Автомодельным циклом краевой задачи (3) назовем ее периодическое по t решение вида

$$u = u_0(x)e^{i\alpha_0 t}, \quad \alpha_0 = \operatorname{const} \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Двумерным автомодельным тором краевой задачи (3) будем называть ее квазипериодическое по t решение вида

$$u = u_0(t, x)e^{i\alpha_0 t}. \quad (5)$$

Здесь $\alpha_0 = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$, амплитуда $u_0(t, x)$ периодична по t с периодом $T > 0$, функции $\partial u_0 / \partial t$, iu_0 линейно независимы (последнее требование гарантирует неприводимость решения (5) к виду (4)).

Вопрос об автомодельных циклах рассматриваемой задачи к настоящему времени изучен достаточно подробно. В работах [4], [5] было доказано существование у нее сразу счетного числа высокомодовых циклов

$$u = u_n(x)e^{i\alpha_n t}, \quad n \geq n_0. \quad (6)$$

Здесь натуральное число n_0 достаточно велико и при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\alpha_n = -\sigma_0 n^2 - c_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_n(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (7)$$

(второе из них выполняется равномерно по x). Было установлено также, что все циклы (6) экспоненциально орбитально устойчивы (неустойчивы) при

$$\sigma_0 + \frac{2}{3}c_0 > 0 \quad (< 0). \quad (8)$$

В данной статье рассматриваются вопросы о существовании и устойчивости у краевой задачи (3) автомодельных торов вида (5). Показывается, что при подходящем выборе параметров $c_0 < 0$ и σ_0 она имеет счетное число устойчивых двумерных торов, которые бифуркируют из циклов (6), (7) при уменьшении параметра σ_0 и при прохождении его через критическое значение $\sigma_0 = -2c_0/3$. Аналогичный круг вопросов исследуется и для уравнения (2) с граничными условиями периодичности по x .

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi$ рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{aligned} v_t &= i\sigma_0 v_{\varphi\varphi} + v - (1 + ic_0)[|v|^2 v + 2vM(|v|^2)], \\ v_{\varphi}|_{\varphi=0} &= v_{\varphi}|_{\varphi=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $v = v(t, \varphi)$ – комплекснозначная функция, $M(*)$ – среднее значение по $\varphi \in [0, \pi]$. Предположим, что краевая задача (9) имеет нетривиально зависящий от φ автомодельный цикл

$$v(t, \varphi) = v_0(\varphi)e^{i\alpha_0 t}, \quad v'_0(\varphi) \neq 0, \quad (10)$$

удовлетворяющий определенным условиям грубости. Чтобы их сформулировать, рассмотрим спектральные задачи

$$L_1 z = \lambda z, \quad z'|_{\varphi=0} = z'|_{\varphi=\pi} = 0; \quad L_2 z = \lambda z, \quad z|_{\varphi=0} = z|_{\varphi=\pi} = 0, \quad (11)$$

где $z(\varphi) = (z_1(\varphi), z_2(\varphi))^T$, здесь и далее индекс Т означает транспонирование,

$$\begin{aligned} L_1 z &= D_0 z'' + D_1(\varphi)z + l(z), \quad L_2 z = D_0 z'' + D_1(\varphi)z, \\ D_0 &= \begin{pmatrix} i\sigma_0 & 0 \\ 0 & -i\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad D_1(\varphi) = \begin{pmatrix} p(\varphi) & q(\varphi) \\ \bar{q}(\varphi) & \bar{p}(\varphi) \end{pmatrix}, \\ p(\varphi) &= 1 - i\alpha_0 - 2(1 + ic_0)[|v_0(\varphi)|^2 + M(|v_0|^2)], \quad q(\varphi) = -(1 + ic_0)v_0^2(\varphi), \\ l(z) &= 2[M(\bar{v}_0 z_1) + M(v_0 z_2)] \begin{pmatrix} -(1 + ic_0)v_0(\varphi) \\ -(1 - ic_0)\bar{v}_0(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что оператор L_1 получается из уравнения (9) и комплексно-сопряженного уравнения после замен

$$ve^{-i\alpha_0 t} \rightarrow v, \quad \bar{v}e^{i\alpha_0 t} \rightarrow \bar{v}, \quad (13)$$

переводящих цикл (10) в состояние равновесия $(v_0(\varphi), \bar{v}_0(\varphi))$, и последующей линеаризации на этом состоянии равновесия. Тем самым оператор L_1 всегда имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция

$$z_0^1(\varphi) = \begin{pmatrix} iv_0(\varphi) \\ -i\bar{v}_0(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Оператор L_2 также имеет нулевое собственное значение с собственной функцией

$$z_0^2(\varphi) = \begin{pmatrix} v_0'(\varphi) \\ \bar{v}_0'(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Отметим также, что если какая-либо из спектральных задач (11) имеет собственное значение λ_0 с собственной функцией $(z_1^*(x), z_2^*(x))^T$, то собственным будет и значение $\bar{\lambda}_0$ с собственной функцией $(\bar{z}_2^*(x), \bar{z}_1^*(x))^T$.

УСЛОВИЕ 1. *Считаем, что $\lambda = 0$ – простое собственное значение каждого из операторов (12).*

Ненулевые собственные значения операторов L_j , $j = 1, 2$, занумеруем в порядке возрастания их модулей и обозначим соответственно через

$$\lambda_m^j, \bar{\lambda}_m^j, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Из классических свойств дифференциальных операторов второго порядка [8] вытекает, что при всех достаточно больших m они являются простыми, комплексными и допускают асимптотику

$$\lambda_m^j = -i\sigma_0(m + s_j)^2 + \varkappa_0 + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad j = 1, 2, \quad (15)$$

где s_j – некоторые фиксированные целые числа,

$$\varkappa_0 = M(p). \quad (16)$$

УСЛОВИЕ 2. *Предполагаем, что все собственные значения (14) находятся в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Считаем также, что $\operatorname{Re} \varkappa_0 < 0$.*

Из приведенных условий и равенств (15), (16) очевидным образом следует, что все ненулевые собственные значения операторов (12) принадлежат множеству $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0\}$, где $\gamma_0 > 0$ – некоторая не зависящая от m постоянная.

В формулируемой ниже теореме предполагается, что фигурирующая в (10) функция $v_0(\varphi)$ продолжена на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю ось φ по периодичности с периодом 2π .

ТЕОРЕМА 1. Пусть вспомогательная краевая задача (9) имеет автомодельный цикл (10), удовлетворяющий условиям 1, 2. Тогда исходная краевая задача (3) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых двумерных автомодельных торов

$$u = u_n(\tau, x)e^{i\alpha_n t}, \quad \tau = \omega_n t, \quad n \geq n_0. \quad (17)$$

Здесь n_0 – достаточно большое натуральное число, частоты $\alpha_n, \omega_n \in \mathbb{R}$ удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$\alpha_n = -i\sigma_0 n^2 + \alpha_0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \omega_n = 2n\sigma_0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (18)$$

а для 2π -периодической по τ функции $u_n(\tau, x)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по τ, x справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} u_n(\tau, x) = & (v_0(\tau + x) + v_0(\tau - x)) \cos nx - \\ & - i(v_0(\tau + x) - v_0(\tau - x)) \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку условия данной теоремы сформулированы в терминах нелокального цикла (10), то вопрос об их реализуемости отнюдь не прост и будет рассмотрен отдельно. Смысл всех перечисленных выше ограничений и причины, по которым оказывается справедливым утверждение теоремы 1, прояснятся далее.

3. МЕТОД ВЫСОКОМОДОВОЙ КВАЗИНОРМАЛИЗАЦИИ

Обоснование всех приведенных фактов, касающихся существования и устойчивости автомодельных решений (6), (17), может быть получено в рамках единого подхода – так называемого метода высокомодовой квазинормализации.

Будем считать, что интересующие нас решения краевой задачи (3) зависят от двух пространственных переменных x и $y = nx$, где n – достаточно большое натуральное число. После подстановки в (3) равенства $u = u(t, x, y)$ и выполнения замены $ue^{i\sigma_0 n^2 t} \rightarrow u$ приходим к уравнению

$$\varepsilon u_t = i\sigma_0(u_{yy} + u) + \sqrt{\varepsilon}i\sigma_0(2u_{xy} + \sqrt{\varepsilon}u_{xx}) + \varepsilon[u - (1 + i\sigma_0)|u|^2 u], \quad (20)$$

в котором параметр ε , принимающий дискретные значения $1/n^2$, для удобства считаем непрерывно меняющимся и малым. Дополним уравнение (20) краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(t, x, y + 2\pi) & \equiv u(t, x, y), \\ \frac{\partial u_+}{\partial x} \Big|_{x=0} & = \frac{\partial u_+}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = u_-|_{x=0} = u_-|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $u_{\pm} = u(t, x, y) \pm u(t, x, -y)$. Выбор этих условий обусловлен тем обстоятельством, что если $u = u(t, x, y, \varepsilon)$ – произвольное решение задачи (20), (21), то при любом достаточно большом натуральном n функция

$$u = u\left(t, x, nx, \frac{1}{n^2}\right) e^{-i\sigma_0 n^2 t} \quad (22)$$

будет решением исходной краевой задачи (3).

Следующий этап состоит в асимптотическом вычислении возможных автоколебательных режимов получившейся краевой задачи (20), (21). В связи с этим обратим внимание, что при $\varepsilon = 0$ ее общее решение имеет вид

$$u = \xi_1(t, x) \cos y + \xi_2(t, x) \sin y, \quad (23)$$

где $\xi_j(t, x)$, $j = 1, 2$, – произвольные комплекснозначные функции, которые в силу условий (21) должны удовлетворять граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad \xi_2|_{x=0} = \xi_2|_{x=\pi} = 0. \quad (24)$$

Наличие семейства решений (23) позволяет при $\varepsilon > 0$ применить к краевой задаче (20), (21) некоторый аналог известного метода медленно меняющихся фаз и амплитуд. А именно, в данном случае подставим в (20), (21) ряд

$$u = u_0(t, \tau, x, y) + \sqrt{\varepsilon} u_1(t, \tau, x, y) + \varepsilon u_2(t, \tau, x, y) + \dots, \quad (25)$$

где $\tau = 2\sigma_0 t / \sqrt{\varepsilon}$,

$$u_0 = \xi_1(t, \tau, x) \cos y + \xi_2(t, \tau, x) \sin y, \quad (26)$$

и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате для нахождения коэффициентов u_j , $j \geq 1$, этого ряда получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач вида

$$i\sigma_0 \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + u_j \right) = g_j(t, \tau, x, y), \quad u_j(t, \tau, x, y + 2\pi) \equiv u_j(t, \tau, x, y), \quad (27)$$

в которых переменные t, τ, x рассматриваются как параметры.

На первом шаге, т.е. после приравнивания коэффициентов при $\sqrt{\varepsilon}$, для u_1 приходим к краевой задаче (27) при $j = 1$, в которой

$$g_1 = 2\sigma_0 \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} - i \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) \cos y + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} + i \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) \sin y \right]. \quad (28)$$

Далее, из условий ее разрешимости для определения фигурирующих в (26) амплитуд ξ_1, ξ_2 выводим систему уравнений

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} = i \frac{\partial \xi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} = -i \frac{\partial \xi_1}{\partial x}. \quad (29)$$

В итоге, дополняя систему (29) граничными условиями (24), убеждаемся, что

$$\xi_1 = v(t, \varphi_1) + v(t, \varphi_2), \quad \xi_2 = -i(v(t, \varphi_1) - v(t, \varphi_2)), \quad (30)$$

где $\varphi_1 = \tau + x$, $\varphi_2 = \tau - x$, а $v = v(t, \varphi)$ – пока произвольная комплекснозначная 2π -периодическая по φ функция. Наконец, подставляя формулы (30) в выражение (28), заключаем, что $g_1 \equiv 0$. Поэтому для функции u_1 получается равенство

$$u_1 = \eta_1(t, \tau, x) \cos y + \eta_2(t, \tau, x) \sin y, \quad (31)$$

в котором комплексные амплитуды η_1, η_2 , удовлетворяющие аналогичным (24) граничным условиям, также пока произвольны.

На втором шаге рассмотрению подлежит краевая задача (27) при $j = 2$ с неоднородностью

$$g_2 = \frac{\partial u_0}{\partial t} + 2\sigma_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - i\sigma_0 \left(2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) - [u_0 - (1 + ic_0)|u_0|^2 u_0], \quad (32)$$

анализ которой идентичен описанному выше. Действительно, из условий разрешимости этой краевой задачи в классе 2π -периодических по y функций, т.е. из равенства нулю коэффициентов при $\sin y$ и $\cos y$ в правой части формулы (32), для определения фигурирующих в (31) амплитуд η_1, η_2 выводим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} &= i \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + (2\sigma_0)^{-1} \Delta_1, & \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} &= -i \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + (2\sigma_0)^{-1} \Delta_2, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, & \eta_2|_{x=0} &= \eta_2|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь неоднородности $\Delta_j = \Delta_j(t, \varphi_1, \varphi_2)$, $j = 1, 2$, задаются формулами

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \xi_1 - (1 + ic_0) \left[\frac{3}{4} |\xi_1|^2 \xi_1 + \frac{1}{4} \xi_2^2 \bar{\xi}_1 + \frac{1}{2} |\xi_2|^2 \xi_1 \right], \\ \Delta_2 &= -\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + \xi_2 - (1 + ic_0) \left[\frac{3}{4} |\xi_2|^2 \xi_2 + \frac{1}{4} \xi_1^2 \bar{\xi}_2 + \frac{1}{2} |\xi_1|^2 \xi_2 \right], \end{aligned} \quad (34)$$

в которых учтены равенства (30), а переменная t рассматривается как параметр.

Заключительный этап метода высокомодовой квазинормализации состоит в нахождении фигурирующей в (30) функции v из условий разрешимости краевой задачи (33) в классе 2π -периодических по τ функций. Эти условия задаются равенствами

$$iM_{\varphi_2}(\Delta_2) + M_{\varphi_2}(\Delta_1) \equiv 0, \quad M_{\varphi_1}(\Delta_1) - iM_{\varphi_1}(\Delta_2) \equiv 0, \quad (35)$$

где $M_{\varphi_j}(\ast)$, $j = 1, 2$, – средние значения по $\varphi_j \in [0, 2\pi]$. Однако поскольку в силу формул (30), (34) имеем

$$\Delta_1(t, \varphi_1, \varphi_2) \equiv \Delta_1(t, \varphi_2, \varphi_1), \quad \Delta_2(t, \varphi_1, \varphi_2) \equiv -\Delta_2(t, \varphi_2, \varphi_1),$$

то второе тождество (35) вытекает из первого. Первое же тождество после некоторых преобразований и последующей подстановки $\varphi_1 = \varphi$ приводит к краевой задаче

$$\begin{aligned} v_t &= i\sigma_0 v_{\varphi\varphi} + v - (1 + ic_0)[|v|^2 v + 2vM(|v|^2)], \\ v(t, \varphi + 2\pi) &\equiv v(t, \varphi), \end{aligned} \quad (36)$$

где $M(*)$ – среднее значение по $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Следуя принятой в работе [9] терминологии, краевую задачу (36) будем называть *квазинормальной формой* исходной задачи (3). Подобное название оправдано тем, что при ее выводе отбрасываются слагаемые, хотя и малые по порядку относительно ε , но отнюдь не являющиеся подчиненными остальным. Однако несмотря на это, определенное соответствие между стационарными режимами краевых задач (36) и (3) имеет место.

Начнем с простейшего случая. Рассмотрим пространственно-однородный (не зависящий от φ) автомодельный цикл краевой задачи (36),

$$v = v_0 e^{i\alpha_0 t}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_0 = -c_0. \quad (37)$$

Несложный анализ показывает, что этот цикл экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при условии (8). Подставим, далее, равенства (37) в формулы (25), (26), (30) и учтем соотношение (22), связывающее решения задач (3) и (20), (21). В итоге убеждаемся, что циклу (37) квазинормальной формы (36) в исходной краевой задаче (3) соответствует счетное число высокомодовых автомодельных циклов (6) с асимптотикой (7) и с теми же свойствами устойчивости.

Предположим теперь, что краевая задача (36) имеет однопараметрическое семейство автомодельных циклов вида

$$v = v_0(\varphi + c) e^{i\alpha_0 t}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

где $v_0(\varphi + 2\pi) \equiv v_0(\varphi)$ и функции $iv_0(\varphi)$, $v'_0(\varphi)$ линейно независимы. Пусть это семейство экспоненциально орбитально устойчиво или дихотомично. Тогда, рассуждая как и выше, заключаем, что в исходной краевой задаче (3) ему отвечает счетное число автомодельных торов (17) той же устойчивости с асимптотикой (18), (19). Добавим еще, что сформулированные утверждения, составляющие содержание метода квазинормальных форм, вытекают из результатов работы [5], где этот метод рассмотрен весьма подробно.

Обратимся теперь к условиям теоремы 1 и заметим, что автомодельный цикл (10) вспомогательной краевой задачи (9) после продолжения по φ на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю ось по периодичности с периодом 2π порождает семейство (38) автомодельных циклов квазинормальной формы (36) с требуемыми свойствами. Действительно, за устойчивость построенного таким способом семейства отвечает расположение собственных значений спектральной задачи

$$Lz = \lambda z, \quad z(\varphi + 2\pi) \equiv z(\varphi), \quad (39)$$

получающейся из (36) после замены (13) и последующей линеаризации на состоянии равновесия $(v_0(\varphi), \bar{v}_0(\varphi))$. Здесь $z(\varphi) = (z_1(\varphi), z_2(\varphi))^T$, оператор L задается тем же равенством, что и L_1 (см. (12)), но в его коэффициентах среднее значение M берется уже не по отрезку $\varphi \in [0, \pi]$, а по $\varphi \in [0, 2\pi]$. Заметим далее, что в силу четности функции $v_0(\varphi)$ после подстановки в уравнение (39) $z = z_*(\varphi) + z_{**}(\varphi)$, где $z_*(\varphi)$ и $z_{**}(\varphi)$ – четная и нечетная периодические функции, получаем равенство

$$L_1 z_* - \lambda z_* = \lambda z_{**} - L_2 z_{**},$$

левая и правая части которого также являются четной и нечетной функциями, соответственно. Отсюда следует, что $L_1 z_* - \lambda z_* = 0$, $L_2 z_{**} - \lambda z_{**} = 0$ и выполняются граничные условия $z'_*(0) = z'_*(\pi) = 0$, $z_{**}(0) = z_{**}(\pi) = 0$, т.е. приходим к первой и второй краевым задачам (11). Тем самым проясняется роль условий 1, 2 (они обеспечивают устойчивость рассматриваемого семейства (38)) и становятся понятными причины справедливости утверждения теоремы 1.

4. О РЕАЛИЗУЕМОСТИ УСЛОВИЙ ТЕОРЕМЫ 1

Проверка реализуемости условий 1, 2 состоит в нахождении у вспомогательной краевой задачи (9) тех автомоделных циклов (10), которым соответствуют устойчивые семейства (38). Покажем, что при некоторых дополнительных ограничениях на c_0 такого рода циклы бифурцируют из однородного цикла (37) задачи (9) при уменьшении параметра σ_0 .

За устойчивость цикла (37) в рамках краевой задачи (9), как нетрудно увидеть, отвечает расположение спектра оператора L_1 (см. (12)), в коэффициентах которого необходимо положить $v_0(\varphi) = 1/\sqrt{3}$, $\alpha_0 = -c_0$. Применяя затем к указанному оператору метод Фурье по системе функций $\cos k\varphi$, $k = 0, 1, \dots$, убеждаемся, что его спектр – это совокупность собственных значений матриц

$$\begin{aligned} B_0 &= - \begin{pmatrix} 1 + ic_0 & 1 + ic_0 \\ 1 - ic_0 & 1 - ic_0 \end{pmatrix}, \\ B_k &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + ic_0 + 3i\sigma_0 k^2 & 1 + ic_0 \\ 1 - ic_0 & 1 - ic_0 - 3i\sigma_0 k^2 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Из очевидных равенств

$$\operatorname{tr} B_k = -\frac{2}{3}, \quad \det B_k = \sigma_0 k^2 \left(\sigma_0 k^2 + \frac{2c_0}{3} \right), \quad k \geq 1, \quad (41)$$

вытекает, что при условии $\sigma_0 + 2c_0/3 > 0$ все матрицы (40) при $k \geq 1$ являются гурвицевыми. Если при $c_0 < 0$ выполняется равенство $\sigma_0 = -2c_0/3$, то

$$B_1 e_0 = 0, \quad e_0 = \begin{pmatrix} -c_0 + i \\ -c_0 - i \end{pmatrix}, \quad (42)$$

а все матрицы B_k , $k \geq 2$, в силу (41) по-прежнему гурвицевы.

Из сказанного выше следует, что интересующая нас бифуркационная проблема имеет смысл при

$$c_0 = -\delta_0, \quad \sigma_0 = \frac{2\delta_0}{3} - \mu, \quad (43)$$

где $\delta_0 > 0$, $0 < \mu \ll 1$. Поставим вопрос о существовании и устойчивости у краевой задачи (9) при выполнении данных условий пространственно-неоднородных автомодельных циклов вида

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + h(\varphi, \mu)) \exp[i(\delta_0 + \alpha(\mu))t], \quad (44)$$

где $h(\varphi, 0) \equiv 0$, $\alpha(0) = 0$.

Подставляя равенства (43), (44) в (9), для нахождения комплекснозначной функции $h(\varphi, \mu)$ и вещественной поправки к частоте $\alpha(\mu)$ приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} i\alpha(\mu)(1 + h) &= i\left(\frac{2}{3}\delta_0 - \mu\right)h'' - \frac{(1 - i\delta_0)}{3}[h + \bar{h} + 2M(h + \bar{h}) + \\ &+ 2|h|^2 + h^2 + 2M(|h|^2) + 2hM(h + \bar{h}) + |h|^2h + 2hM(|h|^2)], \\ h'|_{\varphi=0} &= h'|_{\varphi=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

В силу равенств $\det B_0 = \det B_1 = 0$ (см. (40), (42)) краевая задача, получающаяся из (45) при $\alpha = \mu = 0$ и после отбрасывания нелинейных слагаемых,

$$Ph \equiv i\frac{2}{3}\delta_0 h'' - \frac{(1 - i\delta_0)}{3}[h + \bar{h} + 2M(h + \bar{h})] = 0, \quad h'|_{\varphi=0} = h'|_{\varphi=\pi} = 0, \quad (46)$$

имеет два линейно независимых ненулевых решения

$$h_1(\varphi) = (\delta_0 + i) \cos \varphi, \quad h_2(\varphi) = i. \quad (47)$$

Поэтому для построения асимптотики пары функций $\alpha(\mu)$, $h(\varphi, \mu)$, обращающих уравнение (45) в тождество, воспользуемся вариантом стандартного одночастотного метода из книги [10]. В данном случае, предполагая существование у краевой задачи (46) первого из решений (47), будем искать функции $\alpha(\mu)$, $h(\varphi, \mu)$ в виде рядов по целым степеням μ и $\sqrt{\mu}$, соответственно. Запишем эти ряды как

$$\alpha(\mu) = \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \dots, \quad (48)$$

$$h(\varphi, \mu) = \sqrt{\mu}h_0(\varphi) + \mu h_1(\varphi) + \mu^{3/2}h_2(\varphi) + \dots, \quad h_0(\varphi) = \xi_0(\delta_0 + i) \cos \varphi, \quad (49)$$

где ξ_0 — произвольная (подлежащая определению) вещественная амплитуда.

Подставляя ряды (48), (49) в уравнение (45) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , для функций h_k , $k \geq 1$, получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач вида

$$Ph_k = g_k(\varphi), \quad h'_k|_{\varphi=0} = h'_k|_{\varphi=\pi} = 0. \quad (50)$$

Неизвестные коэффициенты ряда (48) вместе с амплитудой ξ_0 (и другими возникающими в ходе алгоритма амплитудами) определяются из условий разрешимости данных краевых задач. Эти условия задаются равенствами

$$\operatorname{Im} \left[(1 + i\delta_0) \int_0^\pi g_k(\varphi) d\varphi \right] = 0, \quad \operatorname{Im} \left[\int_0^\pi g_k(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right] = 0. \quad (51)$$

На первом шаге алгоритма возникает краевая задача (50) при $k = 1$, в которой

$$g_1 = i\alpha_1 + \frac{(1 - i\delta_0)}{3} \xi_0^2 [(3\delta_0^2 + 1 + 2i\delta_0) \cos^2 \varphi + 1 + \delta_0^2]. \quad (52)$$

Поскольку неоднородность (52) представляет собой линейную комбинацию функций 1 , $\cos 2\varphi$, то второе условие разрешимости (51) здесь выполняется автоматически. Первое же из них приводит к равенству

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3} \delta_0 (1 + \delta_0^2) \xi_0^2. \quad (53)$$

После нахождения α_1 решение $h_1(\varphi)$ рассматриваемой краевой задачи, удовлетворяющее дополнительному условию

$$\operatorname{Im} \left[(1 + i\delta_0) \int_0^\pi h_1(\varphi) d\varphi \right] = 0, \quad (54)$$

определяется однозначно и имеет вид

$$\begin{aligned} h_1 &= \xi_0^2 h_{1,0}(\varphi), \quad h_{1,0} = (1 - i\delta_0) R_0 + (R_1 + iR_2) \cos 2\varphi, \\ R_0 &= -\frac{1}{12} (7\delta_0^2 + 3), \quad R_1 = \frac{1}{12} (3\delta_0^2 - 1), \quad R_2 = \frac{1}{24\delta_0} (9\delta_0^2 + 1). \end{aligned} \quad (55)$$

На втором шаге алгоритма приходим к краевой задаче (50) при $k = 2$ с неоднородностью

$$\begin{aligned} g_2 &= i\alpha_1 h_0 + ih_0'' + \frac{(1 - i\delta_0)}{3} [4 \operatorname{Re}(h_0 \bar{h}_1) + 2h_0 h_1 + \\ &\quad + 2h_0 M(h_1 + \bar{h}_1) + |h_0|^2 h_0 + 2h_0 M(|h_0|^2)], \end{aligned} \quad (56)$$

которая, как следует из явного вида функций h_0 , h_1 (см. (49), (55)), представляет собой линейную комбинацию нечетных гармоник $\cos \varphi$, $\cos 3\varphi$. Поэтому в данном случае автоматически выполняется первое из условий разрешимости (51). Второе из этих условий с учетом формул (53), (55) после некоторых преобразований приобретает вид

$$-\delta_0 \xi_0 + Q(\delta_0) \frac{\xi_0^3}{18} = 0, \quad (57)$$

где $Q(\delta_0) = 14\delta_0^4 - 9\delta_0^2 + 1$.

Будем рассматривать равенство (57) как уравнение для нахождения неизвестной амплитуды ξ_0 . В связи с этим предположим, что в дополнение к (43) выполнено условие

$$\delta_0 \notin [1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{2}], \quad (58)$$

при котором многочлен $Q(\delta_0)$ положителен. Сначала из (57) находим амплитуду

$$\xi_0(\delta_0) = \sqrt{\frac{18\delta_0}{Q(\delta_0)}}, \quad (59)$$

а затем определяем и функцию

$$h_2 = h_2^0 + \xi_1(\delta_0 + i) \cos \varphi,$$

где h_2^0 – единственное решение краевой задачи (50) при $k = 2$, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{Im} \left[\int_0^\pi h_2^0(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right] = 0, \quad (60)$$

а ξ_1 – произвольная вещественная постоянная.

Как нетрудно заметить, после выбора решения (59) уравнения разветвления (57) приведенный алгоритм продолжается неограниченно. Действительно, в общем случае на шаге с номером $k = 2j - 1$, $j = 1, 2, \dots$, неоднородность в краевой задаче (50) имеет вид $g_{2j-1} = i\alpha_j + g_{2j-1}^0(\varphi)$, где g_{2j-1}^0 представляет собой линейную комбинацию гармоник $\cos 2s\varphi$, $s = 0, 1, \dots, j$, с коэффициентами, зависящими от α_m , $m \leq j - 1$, и ξ_r , $r \leq j$. Таким образом, второе из условий разрешимости (51) здесь выполняется автоматически. Первое же из них позволяет найти очередную постоянную α_j . После этого функция $h_{2j-1}(\varphi)$, удовлетворяющая равенству вида (54), определяется однозначно.

На шаге с номером $k = 2j$, $j = 1, 2, \dots$, ситуация несколько иная. Неоднородность g_{2j} является линейной комбинацией нечетных гармоник $\cos(2s + 1)\varphi$, $s = 0, \dots, j$. Поэтому в данном случае автоматически выполняется первое из условий разрешимости (51). Выполнения же второго добиваемся за счет слагаемого $\xi_{j-1}(\delta_0 + i) \cos \varphi$, с точностью до которого определяется функция $h_{2(j-1)}$. Заметим еще, что, как это обычно бывает в теории ветвления, для отыскания ξ_{j-1} , $j \geq 2$, в отличие от (57) возникают уже линейные неоднородные уравнения вида $2\delta_0 \xi_{j-1} = \varphi_j$.

После нахождения константы ξ_{j-1} функция h_{2j} определяется в виде

$$h_{2j} = h_{2j}^0(\varphi) + \xi_j(\delta_0 + i) \cos \varphi,$$

где $h_{2j}^0(\varphi)$ удовлетворяет аналогичному (60) равенству, а ξ_j – произвольная вещественная постоянная. Далее переходим к шагу с номером $2j + 2$ и весь описанный процесс повторяется.

Строгий смысл изложенным формальным построениям придает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (43), (58). Тогда найдется такое достаточно малое число $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ существуют две пары функций

$$(\alpha(\mu), h_{\pm}(\varphi, \mu)): \quad h_{-}(\varphi, \mu) = h_{+}(\pi - \varphi, \mu), \quad (61)$$

обращающие краевую задачу (45) в тождество. При этом функции $\alpha(\mu)$, $h_{+}(\varphi, \mu)$ допускают асимптотику (48), (49), (59), а соответствующие парам (61) авто-модельные циклы (44) краевой задачи (9) экспоненциально орбитально устойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулированная теорема представляет собой автоколебательный вариант классической бифуркационной теоремы Тьюринга–Пригожина [11]. Ее обоснование существенно опирается на тот факт, что при условиях (43) и при всех малых по модулю значениях μ краевая задача (9) в окрестности однородного цикла (37) имеет экспоненциально орбитально устойчивое двумерное интегральное многообразие [12], достаточно гладко зависящее от параметра μ .

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы и заметим, что в силу специфики задачи (9) упомянутое выше многообразие обладает некоторыми дополнительными свойствами. Чтобы убедиться в этом, выполним в (9) замену

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + h(t, \varphi)]e^{i\psi(t)}, \quad (62)$$

где $\text{Im}[(1 + i\delta_0) \int_0^\pi h(t, \varphi) d\varphi] = 0$. В результате для комплекснозначной функции $h(t, \varphi)$ и вещественной фазовой переменной $\psi(t)$ получаем систему треугольного вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= i \left(\frac{2}{3} \delta_0 - \mu \right) \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + G_1(h) - i(1 + h)G_2(h), \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{\partial h}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi} = 0; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \delta_0 + G_2(h), \end{aligned}$$

в которой

$$\begin{aligned} G_1(h) &= -\frac{(1 - i\delta_0)}{3} [h + \bar{h} + 2M(h + \bar{h}) + 2|h|^2 + h^2 + 2M(|h|^2) + \\ &\quad + 2hM(h + \bar{h}) + |h|^2 h + 2hM(|h|^2)], \\ G_2(h) &= \text{Im}[(1 + i\delta_0)M(G_1(h))] (1 + \text{Im}[(i - \delta_0)M(h)])^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому интересующее нас многообразие задается аналогичным (62) равенством

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + \xi(\delta_0 + i) \cos \varphi + \xi^2 h_{1,0}(\varphi) + H(\xi, \varphi, \mu)]e^{i\psi}, \quad (63)$$

а система уравнений на нем также имеет треугольный вид

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \mu\delta_0\xi - Q(\delta_0)\frac{\xi^3}{18} + \Phi_1(\xi, \mu), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \delta_0 - \frac{1}{3}\delta_0(1 + \delta_0^2)\xi^2 + \Phi_2(\xi, \mu).\end{aligned}\tag{64}$$

Здесь (ξ, ψ) – вещественные параметры на многообразии, причем $\psi \in [0, 2\pi] \pmod{2\pi}$, $\xi \in [-q, q]$, где $q > 0$ достаточно мало, а комплекснозначная функция H и вещественные функции Φ_j , $j = 1, 2$, достаточно гладко зависят от своих переменных и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}H(0, \varphi, \mu) &\equiv \frac{\partial H}{\partial \xi}(0, \varphi, 0) \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}(0, \varphi, 0) \equiv 0, \\ \operatorname{Im} \left[(1 + i\delta_0) \int_0^\pi H(\xi, \varphi, \mu) d\varphi \right] &\equiv 0, \\ \Phi_1(0, \mu) &\equiv 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}(0, 0) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi^3}(0, 0) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi \partial \mu}(0, 0) = 0, \\ \Phi_2(0, \mu) &\equiv 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}(0, 0) = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2}(0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Из перечисленных свойств функций Φ_j , $j = 1, 2$, вытекает, что после выполнения в системе (64) замены $\xi/\sqrt{\mu} \rightarrow \xi$ и отбрасывания слагаемых порядка $\mu^{3/2}$ “укороченная” нормальная форма на многообразии (63) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu \left[\delta_0\xi - Q(\delta_0)\frac{\xi^3}{18} \right], \quad \frac{d\psi}{dt} = \delta_0 - \frac{\mu}{3}\delta_0(1 + \delta_0^2)\xi^2.\tag{65}$$

Отметим еще, что здесь справедливо стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной краевой задачи (9) и системы (65). Поэтому при условии $Q(\delta_0) > 0$ (см. (58)) двум экспоненциально орбитально устойчивым циклам

$$\xi = \pm \xi_0(\delta_0), \quad \frac{d\psi}{dt} = \delta_0 - \frac{\mu}{3}\delta_0(1 + \delta_0^2)\xi_0^2(\delta_0)$$

системы (65) отвечают два устойчивых цикла задачи (9) вида (44), переходящих друг в друга при замене $\pi - \varphi \rightarrow \varphi$. Остается добавить, что асимптотические представления (48), (49) являются следствием гладкости многообразия (63) по μ . Более того, используя развитые в монографии [13] методы, можно показать сходимость рядов (48), (49) при всех достаточно малых $\mu > 0$. Теорема 2 доказана.

Обратимся теперь к квазинормальной форме (36) и заметим, что пара циклов (44), (61) порождает одно и то же семейство ее автомодельных циклов вида (38). Поэтому при проверке условий устойчивости получившегося семейства ограничимся рассмотрением случая $h = h_+(\varphi, \mu)$, а соответствующий автомодельный цикл (44) краевой задачи (9) обозначим через $v_+(t, \mu)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (43), (58) и параметр $\mu > 0$ достаточно мал. Тогда цикл $v_+(t, \mu)$ удовлетворяет условиям 1, 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что поскольку цикл $v_+(t, \mu)$ экспоненциально орбитально устойчив в рамках задачи (9) (см. теорему 2), то весь спектр соответствующего ему оператора L_1 (за исключением простого нулевого собственного значения) лежит в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Оператор L_2 при $\mu = 0$ имеет вид

$$L_2 = \begin{pmatrix} i\frac{2}{3}\delta_0 & 0 \\ 0 & -i\frac{2}{3}\delta_0 \end{pmatrix} \frac{d^2}{d\varphi^2} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - i\delta_0 & 1 - i\delta_0 \\ 1 + i\delta_0 & 1 + i\delta_0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Применяя к получившемуся оператору метод Фурье по системе функций $\sin k\varphi$, $k = 1, 2, \dots$, убеждаемся, что его спектр – это совокупность собственных значений матриц (40) при $k \geq 1$, $c_0 = -\delta_0$, $\sigma_0 = 2\delta_0/3$. Таким образом, оператор (66) имеет одно простое нулевое собственное значение, а весь остальной его спектр находится в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < -r_0\}$, где $r_0 \in (0, 1/3)$. Ясно также, что данная ситуация сохранится и при малых возмущениях, т.е. при $\mu > 0$. Для постоянной $\varkappa_0 = \varkappa_0(\mu)$ (см. (16)), отвечающей циклу $v_+(t, \mu)$, выполняется требуемое в условии 2 неравенство $\operatorname{Re} \varkappa_0 < 0$, так как $\operatorname{Re} \varkappa_0(0) = -1/3$. Теорема 3 доказана.

Суммируя утверждения теорем 1–3, приходим к выводу о существовании у исходной краевой задачи (3) при условиях (43), (58) счетного числа устойчивых автомоделей тором (17). Отметим также, что поскольку для данных тором справедливы асимптотические представления (18), (19), в которых следует положить

$$\alpha_0 = \alpha(\mu), \quad v_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + h_+(\varphi, \mu)),$$

то становится понятным их происхождение: они бифурцируют из циклов (6), (7) при уменьшении параметра σ_0 .

5. СЛУЧАЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Типовыми граничными условиями, при которых обычно рассматривается уравнение (2), наряду с условиями Неймана являются условия периодичности по x . Связано это с тем, что соответствующая краевая задача

$$u_t = i\sigma_0 u_{xx} + u - (1 + ic_0)|u|^2 u, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x) \quad (67)$$

описывает эволюцию электромагнитного поля в кольцевых лазерных резонаторах, а также в лазерах типа VCSELs с цилиндрическими резонаторами [14].

Как и в предыдущем случае, поставим вопрос о существовании и устойчивости у краевой задачи (67) двухчастотных автоволновых режимов. При этом устойчивость будем понимать в метрике фазового пространства $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E$, где E – гильбертово пространство 2π -периодических вектор-функций $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ с компонентами класса W_2^2 .

Проблему аттракторов задачи (67) существенно облегчает так называемый *принцип самоподобия*, суть которого заключается в следующем. Выполним в (67) замену $u(t, x) = T_n[v(t, x)]$, где

$$T_n[v(t, x)] = v(t, -2\sigma_0 n t + x) \exp[i(-\sigma_0 n^2 t + nx)], \quad (68)$$

n – произвольное целое число, а затем перейдем к новой пространственной переменной $\varphi = -2n\sigma_0 t + x$. В результате для функции $v = v(t, \varphi)$ получим прежнюю краевую задачу

$$v_t = i\sigma_0 v_{\varphi\varphi} + v - (1 + ic_0)|v|^2 v, \quad v(t, \varphi + 2\pi) \equiv v(t, \varphi).$$

Иными словами, оператор (68) переводит любое решение $u(t, x)$ задачи (67) в решение $T_n[u(t, x)]$ той же самой краевой задачи.

Из принципа самоподобия вытекают два важных следствия. Во-первых, пусть в фазовом пространстве E краевой задачи (67) имеется компактное множество A , инвариантное относительно ее траекторий

$$(u_1(t, x), u_2(t, x)): \quad u_1 = \operatorname{Re} u(t, x), \quad u_2 = \operatorname{Im} u(t, x) \quad (69)$$

(как обычно, это означает, что если $(u_1, u_2) \in A$ при $t = 0$, то аналогичное включение справедливо при всех $t \in \mathbb{R}$). Тогда, применяя к каждой траектории (69) из множества A оператор

$$\tilde{T}_n: (u_1(t, x), u_2(t, x)) \rightarrow (\operatorname{Re} T_n[u(t, x)], \operatorname{Im} T_n[u(t, x)]), \quad (70)$$

получим серию множеств

$$A_n = \tilde{T}_n(A), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (71)$$

также инвариантных для траекторий задачи (67). Во-вторых, если в предыдущем случае множество A – аттрактор краевой задачи (67), то ее аттракторами будут и все множества (71). Таким образом, если известен какой-либо один из аттракторов A задачи (67), то с помощью оператора (70) получаем счетное их число.

Начнем с простейшего примера, иллюстрирующего применение принципа самоподобия. В качестве инвариантного множества A задачи (67) возьмем ее однородный цикл

$$u = e^{-ic_0 t}, \quad (72)$$

являющийся экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) при

$$\sigma_0 + 2c_0 > 0 \quad (< 0). \quad (73)$$

Тогда, применяя к этому циклу оператор (68) при всевозможных целых n , получим счетное число периодических решений краевой задачи (67) типа бегущих волн

$$u_n(t, x) = \exp[-i(\sigma_0 n^2 + c_0)t + inx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (74)$$

условия устойчивости или неустойчивости которых задаются теми же неравенствами (73).

Разберем теперь более сложный случай. Заметим, что любое решение $u(t, x)$ краевой задачи (3) после продолжения по x на всю ось стандартным способом (т.е. по четности и 2π -периодичности) становится решением краевой задачи (67). В частности, каждый пространственно-неоднородный цикл (4) задачи (3) после продолжения по x порождает семейство автомодельных циклов

$$u = u_0(x + c)e^{i\alpha_0 t}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (75)$$

краевой задачи (67). За устойчивость этого семейства отвечает (ср. с разделом 3) расположение собственных значений спектральных задач

$$Lz = \lambda z, \quad z'|_{x=0} = z'|_{x=\pi} = 0; \quad Lz = \lambda z, \quad z|_{x=0} = z|_{x=\pi} = 0, \quad (76)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad L = D_0 \frac{d^2}{dx^2} + D_1(x), \quad D_0 = \text{diag}\{i\sigma_0, -i\sigma_0\},$$

$$D_1(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ \bar{q}(x) & \bar{p}(x) \end{pmatrix},$$

$$p(x) = 1 - i\alpha_0 - 2(1 + ic_0)|u_0(x)|^2, \quad q(x) = -(1 + ic_0)u_0^2(x).$$

Как и в случае задач (11), каждая из задач (76) имеет нулевое собственное значение.

Итак, возьмем в качестве инвариантного множества A задачи (67) некоторое семейство автомодельных циклов (75), построенное по описанному выше правилу. Применяя затем к этому множеству принцип самоподобия, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что вспомогательная задача (3) имеет пространственно-неоднородный автомодельный цикл (4), удовлетворяющий следующим условиям: $\lambda = 0$ – простое собственное значение каждой из краевых задач (76), а весь остальной их спектр лежит в полуплоскости $\{\lambda: \text{Re } \lambda < 0\}$ и $1 - 2M(|u_0(x)|^2) < 0$. Тогда исходная краевая задача (67) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых двумерных торов вида*

$$u = u_0(-2\sigma_0 nt + x) \exp[i(\alpha_0 - \sigma_0 n^2)t + inx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (77)$$

Подчеркнем, что сформулированная теорема носит пока условный характер, так как заранее неизвестно, может ли вспомогательная краевая задача (3) иметь автомодельный цикл с требуемыми свойствами. Здесь возникает проблема реализуемости описанных ограничений, при решении которой поступим так же, как и в разделе 4, а именно покажем, что в случае

$$c_0 = -\delta_0, \quad \sigma_0 = 2\delta_0 - \mu, \quad \delta_0 > 0, \quad 0 < \mu \ll 1 \quad (78)$$

интересующий нас цикл бифурцирует из однородного цикла (72) задачи (3) и, следовательно, имеет вид

$$u = (1 + h(x, \mu)) \exp[i(\delta_0 + \alpha(\mu))t], \quad (79)$$

где $h(x, 0) \equiv 0$, $\alpha(0) = 0$.

Подставляя равенства (78), (79) в (3), для определения комплекснозначной функции $h(x, \mu)$ и вещественной функции $\alpha(\mu)$ приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} i\alpha(\mu)(1 + h) &= i(2\delta_0 - \mu)h'' - (1 - i\delta_0)[h + \bar{h} + 2|h|^2 + h^2 + |h|^2h], \\ h'|_{x=0} &= h'|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (80)$$

анализ которой идентичен исследованию задачи (45). Поэтому здесь ограничимся лишь краткой сводкой результатов.

Как и в случае задачи (45), функции $h(x, \mu)$, $\alpha(\mu)$, обращающие уравнение (80) в тождество, разлагаются в сходящиеся при малых $\mu > 0$ ряды

$$h(x, \mu) = \sqrt{\mu}h_0(x) + \mu h_1(x) + \mu^{3/2}h_2(x) + \dots, \quad \alpha(\mu) = \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \dots, \quad (81)$$

где

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \xi_0(\delta_0 + i) \cos x, \quad h_1(x) = \xi_0^2[(1 - i\delta_0)R_0 + (R_1 + iR_2) \cos 2x], \\ R_0 &= -\frac{1}{4}(5\delta_0^2 + 1), \quad R_1 = \frac{1}{12}(3\delta_0^2 - 1), \quad R_2 = \frac{1}{24\delta_0}(9\delta_0^2 + 1), \quad \alpha_1 = -\delta_0(1 + \delta_0^2)\xi_0^2, \\ \xi_0 &= \sqrt{\frac{6\delta_0}{Q(\delta_0)}}, \quad Q(\delta_0) = 30\delta_0^4 - 9\delta_0^2 + 1. \end{aligned}$$

Здесь многочлен $Q(\delta_0)$ положителен при всех $\delta_0 > 0$, а значит, не возникает никаких дополнительных условий вида (58). Повторяя практически дословно все соответствующие рассуждения из раздела 4 (см. доказательства теорем 2, 3), убеждаемся, что автомодельный цикл (79), (81) задачи (3) является искомым, т.е. удовлетворяет условиям теоремы 4.

Возвращаясь к краевой задаче (67) и суммируя полученные результаты, приходим к выводу, что в наиболее интересном случае $c_0 < 0$ основные особенности динамики этой задачи по параметру σ_0 таковы.

1) При $\sigma_0 > -2c_0$ аттракторы задачи (67) представляют собой счетное семейство бегущих волн (74) и, по всей видимости, других аттракторов у нее в этом случае нет.

2) При уменьшении параметра σ_0 и прохождении его через критическое значение $\sigma_0 = -2c_0$ циклы (74) становятся неустойчивыми и от них ответвляются устойчивые торы (77).

3) При дальнейшем уменьшении σ_0 , как следует из результатов численного анализа [14], торы (77) теряют устойчивость и появляются более сложные аттракторы – как регулярные, так и хаотические. Однако и в этом случае в силу принципа самоподобия

таких аттракторов у краевой задачи (67) существует счетное число. В работе [14] установлено, что при определенном выборе параметров $c_0 < 0$, $\sigma_0 < -2c_0$ задача (67) может иметь устойчивые семейства автомодельных торов вида

$$u = u_*(t, x + c)e^{i\alpha_* t}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (82)$$

где $u_*(t + T, x) \equiv u_*(t, x)$ при некотором $T > 0$, $u_*(t, x + 2\pi) \equiv u_*(t, x)$ и все три функции iu_* , $\partial u_*/\partial t$, $\partial u_*/\partial x$ линейно независимы (такие режимы названы в [14] осцилляторными решениями). Применяя затем к любому устойчивому семейству (82) принцип самоподобия, получаем счетное число устойчивых трехмерных автомодельных торов задачи (67) вида

$$u = u_*(t, -2\sigma_0 n t + x) \exp[i(\alpha_* - \sigma_0 n^2)t + inx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (83)$$

4) При существенном уменьшении σ_0 происходит хаотизация всех аттракторов задачи (67). Точнее говоря, из принципа самоподобия и результатов численного анализа [14] вытекает, что в данном случае типовой сценарий перехода к хаосу, реализующийся при фиксированных, достаточно больших по модулю значениях c_0 и при уменьшении σ_0 , следующий: устойчивые циклы (74) $\rightarrow$ устойчивые двумерные торы (77) $\rightarrow$ устойчивые трехмерные торы вида (83) $\rightarrow$ счетное число однотипных хаотических аттракторов A_n , $n = 0, \pm 1, \dots$

Отметим, что в силу принципа самоподобия все аттракторы A_n имеют одну и ту же ляпуновскую размерность d_L и, как следует из результатов работы [4], $d_L \rightarrow \infty$ при $\sigma_0 \rightarrow 0$.

В случае краевой задачи (3) перечисленные особенности динамики в основном сохраняются, хотя принцип самоподобия и отсутствует. В частности, роль бегущих волн (74) здесь выполняют автомодельные циклы (6).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье установлено существование у краевых задач (3), (67) при подходящем выборе параметров $\sigma_0 > 0$, $c_0 < 0$ счетного числа устойчивых двумерных торов. Показано, что устойчивые торы бифурцируют из соответствующих автомодельных циклов (6) и (74) при уменьшении σ_0 . В отличие от задачи (67), где в силу принципа самоподобия данная проблема решается тривиально, ее исследование в рамках задачи (3) потребовало привлечения достаточно сложного математического аппарата – метода высокомодовой квазинормализации. Попутно была введена в рассмотрение новая краевая задача (36), представляющая и самостоятельный интерес.

Добавим, что утверждения теорем 1, 4 справедливы и в более общем случае: достаточно потребовать, чтобы спектр соответствующих краевых задач (см. (11), (76)) не пересекался с мнимой осью (за исключением, естественно, двух нулевых собственных значений) и выполнялось неравенство $\operatorname{Re} M(p) \neq 0$. Но при этом возникающие в данных теоремах счетные семейства двумерных автомодельных торов будут, вообще говоря, дихотомичными, с размерностью неустойчивых многообразий, равной количеству собственных значений упомянутых краевых задач в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$.

Область применимости теорем 1, 4 в их обобщенном варианте существенно шире, чем в исходном случае. Действительно, если устойчивые двумерные торы обнаружить достаточно сложно, то счетные семейства неустойчивых двумерных автомодельных торов краевые задачи (3), (67) имеют при любом выборе параметров $\sigma_0 > 0$, $c_0 \in \mathbb{R}$. Например, можно показать, что каждый автомодельный цикл (6) после стандартного продолжения по x порождает семейство автомодельных циклов вида (75), экспоненциально неустойчивое в рамках краевой задачи (67) (в этом случае вещественное положительное собственное значение имеет вторая из краевых задач (76)). Применяя к такому семейству принцип самоподобия, получаем счетное число неустойчивых автомодельных торов вида (77).

В случае краевой задачи (3) ситуация аналогична. Здесь можно показать, что, во-первых, при всех достаточно больших натуральных k вспомогательная задача (9) имеет высокомодовые автомодельные циклы

$$v = v_k(\varphi)e^{i\alpha_k t} \quad (84)$$

с асимптотикой

$$\alpha_k = -\sigma_0 k^2 - c_0 + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad v_k(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{7}} \cos k\varphi + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

(второе из этих равенств справедливо равномерно по φ). Во-вторых, в квазинормальной форме (36) каждый цикл (84) порождает экспоненциально неустойчивое (по тем же причинам, что и в предыдущем случае) семейство периодических решений вида (38). А отсюда и из теоремы 1 заключаем, что при некоторой общности положения любому такому семейству в исходной задаче (3) соответствует счетное число неустойчивых автомодельных торов (17).

В заключение отметим, что наряду с многочисленными физическими приложениями краевая задача (67) представляет интерес в качестве простейшей феноменологической модели так называемого *явления буферности*. Об этом явлении принято говорить, если в фазовом пространстве рассматриваемой системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование любого фиксированного числа одностипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т.д.). Имеющаяся к настоящему времени достаточно обширная совокупность исследований позволяет утверждать, что буферность представляет собой некоторый универсальный закон функционирования нелинейных систем из радиофизики [5], [15], экологии [6], [7], механики [16], биофизики [17] и т.д. В случае же краевой задачи (67) этот феномен устанавливается наиболее просто, так как, например, часть ее возможных устойчивых режимов выписывается в явном виде (см. (74)). Кроме того, в силу принципа самоподобия здесь наблюдается даже *гипербуферность*, т.е. при любом выборе параметров $\sigma_0 > 0$, $c_0 \in \mathbb{R}$ существует сразу счетное число одностипных аттракторов.

Список литературы

- [1] Э. Скотт. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио, 1977.
- [2] Дж. Уизем. Линеинные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [3] П. С. Ланда. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997.
- [4] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов. ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 281–283.
- [5] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. Тр. МИАН. 1998. Т. 222. С. 1–193.
- [6] А. А. Захаров, Ю. С. Колесов. Пространственно-неоднородные режимы в задаче хищник–жертва. В сб.: Нелинейные колебания и экология. Ред. В. Ш. Бурд и др. Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1984. С. 3–15.
- [7] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 135–164.
- [8] М. А. Наймарк. Линеинные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [9] Ю. С. Колесов. Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
- [10] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [11] П. Гленсдорф, И. Пригожин. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
- [12] А. Ю. Колесов. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 345–362.
- [13] Ю. С. Колесов, Д. И. Швitra. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979.
- [14] J. Scheuer, B. A. Malomed. Physica D. 2002. V. 161. P. 102–115.
- [15] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. УМН. 2000. Т. 65. № 2(332). С. 95–120.
- [16] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. ПММ. 2001. Т. 65. № 2. С. 183–198.
- [17] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий. Теорема Тьюринга–Пригожина для систем параболических уравнений с малой диффузией. В сб.: Тр. семинара “Время, хаос и математические проблемы”. Рук. семинара В. А. Садовничий. № 2. М.: Книжный дом “Университет”, 2000. С. 9–41.

Поступила в редакцию 27.III.2002 г.