Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Орлов, К выводу уравнений гидродинамики в рамках функциональной гипотезы Боголюбова, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 3, 501–512

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:00:11

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ В РАМКАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГИПОТЕЗЫ БОГОЛЮБОВА

Функциональная гипотеза Боголюбова обобщена на случай многочастичного взаимодействия, зависящего как от координат, так и от импульсов частиц. В качестве примера рассматриваются две слабoreлятивистские модели: модель Дарвина в теории заряженных частиц и модель Фока в общей теории относительности. Для них на основе цепочки уравнений ББГКИ вычисляются слабoreлятивистские поправки к классическим коэффициентам переноса, а также определяются условия, при которых отсутствует взаимно однозначная связь между параметрами локально-равновесного распределения и гидродинамическими величинами.

Ключевые слова: цепочка Боголюбова, слабoreлятивистское приближение, уравнения гидродинамики.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ГИПОТЕЗА

Одной из центральных задач статистической механики является нахождение коэффициентов переноса, связывающих (в линейной теории) термодинамические потоки с градиентами параметров, характеризующих конкретную систему (обычно это масса, полный импульс и энергия). Эти связи, будучи подставленными в законы сохранения, приводят к уравнениям вязкой гидродинамики и теплопроводности. Исходным пунктом при выводе законов сохранения являются динамические уравнения (в гамильтоновой или лагранжевой формах) и основанное на них уравнение Лиувилля для функции распределения частиц системы в фазовом пространстве. Вывод уравнений гидродинамики из уравнения Лиувилля был дан Боголюбовым в работах [1], [2].

Ниже исследуются особенности вывода уравнений гидродинамики для систем с выродженными связями между гидродинамическими переменными и параметрами локально-равновесного распределения. В качестве примера рассмотрена слабoreлятивистская функция Гамильтона, моделирующая системы с запаздыванием взаимодействия [3], [4], приводятся выражения для необратимых потоков и вычисляются слабoreлятивистские поправки к классическим коэффициентам переноса на основе слабoreлятивистской цепочки уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ).

* Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Приведем краткое изложение функциональной гипотезы Боголюбова [2], обобщенной на случай систем с многократным взаимодействием, зависящим от координат и импульсов частиц в декартовом фазовом пространстве. Рассматривается система из N тождественных частиц без внутренней структуры, заключенных в объеме Ω . Гамильтониан системы представляется в виде суммы величин унарного, бинарного и т.д. типов, симметричных относительно перестановки индексов, нумерующих частицы,

$$H_N = \sum_{k=1}^K \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} h_k(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}). \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{x}_i = (\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ – фазовая координата i -й частицы, $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$, n – размерность координатного пространства. Такое усложнение вида гамильтониана по сравнению со стандартным случаем учета только парных (бинарных) взаимодействий оправданно, так как известны модели с тернарным взаимодействием, например гамильтониан Фока [5] в слаборелятивистском приближении общей теории относительности.

Далее вводится функция распределения (ФР) всей системы $F_N(x, t)$ как плотность вероятности нахождения системы в окрестности фазовой точки $x = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ в момент времени t . Ее эволюция определяется уравнением Лиувилля

$$\partial_t F_N(x, t) = [H_N, F_N], \quad (1.2)$$

где $[\cdot, \cdot]$ – классическая скобка Пуассона. Вводятся также s -частичные ФР комплексов частиц и условие нормировки

$$\begin{aligned} F_s(x^s, t) &= \Omega^s \int d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_N F_N, \quad x^s = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s), \\ \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{x}_1 F_1(\mathbf{x}_1, t) &= 1, \quad F_s = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{x}_{s+1} F_{s+1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В термодинамическом пределе ($N \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$, $N/\Omega \rightarrow 1/\omega$) из соотношений (1.2), (1.3) следуют уравнения эволюции s -частичных ФР, называемые цепочкой уравнений ББГКИ,

$$\begin{aligned} \partial_t F_s(x^s, t) &= [H_s, F_s] + \sum_{k=2}^K \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq s} \frac{1}{m! \omega^m} \times \\ &\times \int d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_{s+m} [h_k(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{k-1}}, \mathbf{x}_{s+1}, \dots, \mathbf{x}_{s+m}), F_{s+m}(x^{s+m}, t)]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если слагаемые в гамильтониане (1.1) инвариантны относительно сдвига по координатам, то тем же свойством обладают и стационарные решения цепочки (1.4), которые будем обозначать F_s^0 . В частности, функция F_1^0 однородна по $|\mathbf{q}_1|$, F_2^0 зависит только от модуля разности $|\mathbf{q}_{12}| = |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|$ и т.д. Вблизи равновесного состояния ФР модифицируются: вводятся параметр неоднородности μ , имеющий порядок отношения радиуса действия межмолекулярных сил к характерному размеру макроскопической неоднородности, и дополнительная модифицированная координата $\mathbf{r} = \mu \mathbf{q}_1$. Значение $\mu = 0$

отвечает пространственно однородному состоянию. ФР переопределяются следующим образом:

$$F_1(x_1, t) \mapsto \tilde{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t; \mu); \quad F_s(x^s, t) \mapsto \tilde{F}_s(\mathbf{r}, x^s, t; \mu), \quad s \geq 2.$$

Далее для краткости знак тильды опускаем. Вместо цепочки (1.4) получаем модифицированную цепочку

$$\begin{aligned} \partial_t F_s + \mu \frac{\partial H_s}{\partial p_1^\alpha} \frac{\partial F_s}{\partial r^\alpha} = [H_s, F_s] + \sum_{k=2}^K \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-l} \leq s} \frac{1}{m! \omega^m} \int d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_{s+m} \times \\ \times \left\{ [h_k(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{k-l}}, \mathbf{x}_{s+1}, \dots, \mathbf{x}_{s+m}), F_{s+m}] - \mu \frac{\partial h_k}{\partial p_1^\alpha} \frac{\partial F_{s+m}}{\partial r^\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь обозначение скобки Пуассона сохранено для канонических переменных q, p ; по индексу α подразумевается суммирование от 1 до n . Функции $F_s(\mathbf{r}, x^s, t; \mu)$ асимптотически регулярны по μ в окрестности нуля, т.е.

$$F_s(\mathbf{r}, x^s, t; \mu) \sim \sum_k \mu^k F_s^k(\mathbf{r}, x^s, t), \quad (1.6)$$

а ФР нулевого приближения $F_s^0(\mathbf{r}, x^s, t)$ определяются как локально-равновесные решения стационарной цепочки (1.4), в которые $\mathbf{r}$ и t входят как параметры, причем только через гидродинамические переменные (ГДП). Используя затем симметрию ФР относительно перестановок канонических координат и принцип ослабления корреляций [2], получаем уравнения гидродинамики в виде асимптотических разложений по μ . Такой подход обобщает метод Чепмена–Энскога [6], разработанный для уравнения Больцмана.

2. ЭВОЛЮЦИЯ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

Если имеется динамическая величина s -кратного типа, симметричная относительно перестановок индексов частиц,

$$B^{(s)}(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq N} b_s(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_s}), \quad (2.1)$$

то ее среднее значение в момент времени t в термодинамическом пределе есть [1]

$$\overline{B^{(s)}} = \frac{1}{s! \omega^s} \int dx^s b_s(x^s) F_s \equiv b_s(t). \quad (2.2)$$

Локальная одночастичная координатная плотность определяется как

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega} \int d\mathbf{p} F_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (2.3)$$

Средней локальной плотностью величины $B^{(s)}$ называется величина

$$\langle B_s \rangle = \frac{1}{\rho \omega^s s!} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_s b_s(x^s) F_s. \quad (2.4)$$

Эволюция локальной плотности ρ (2.3) определяется из первого уравнения цепочки (1.5):

$$\partial_t F_1 + \mu \frac{\partial}{\partial r^\alpha} (v_{\text{eff}}^\alpha F_1) = [H_1, F_1] + \sum_{k=2}^K \frac{1}{(k-1)! \omega^{k-1}} \int d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_k [h_k(x^k), F_k], \quad (2.5)$$

где

$$v_{\text{eff}}^\alpha = \frac{\partial H_1}{\partial p_1^\alpha} + \sum_{k=2}^K \frac{1}{(k-1)! \omega^{k-1}} \frac{1}{F_1} \int d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_k \frac{\partial h_k(x^k)}{\partial p_1^\alpha} F_k.$$

Эффективная скорость v_{eff} есть аналог унарной динамической величины, среднее значение которой определяет среднюю локальную скорость частиц системы

$$u^\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^K k \left\langle \frac{\partial h_k}{\partial p_1^\alpha} \right\rangle = \frac{1}{\omega \rho} \int d\mathbf{p}_1 v_{\text{eff}}^\alpha F_1. \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.3), (2.5) следует, что эволюция локальной плотности определяется уравнением

$$\partial_t \rho = -\mu \frac{\partial}{\partial r^\alpha} (\rho u^\alpha). \quad (2.7)$$

Обозначим оператор $\mu(\partial/\partial \mathbf{r})$ через ∇ . Для эволюции средней локальной плотности (2.4) получаем уравнение

$$\partial_t \rho \langle B_s \rangle = -\nabla_\alpha \rho \Pi_s^\alpha + \rho T_s, \quad (2.8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Pi_s^\alpha &= \frac{1}{\rho \omega^s s!} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_s b_s(x^s) \left\{ \frac{\partial H_s}{\partial p_1^\alpha} F_s + \sum_{k=2}^K \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_{k-l} \leq s} \frac{1}{m! \omega^m} \times \right. \\ &\quad \times \left. \int d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_{s+m} \frac{\partial h_k(x^{k-l}, \mathbf{x}_{s+1}, \dots, \mathbf{x}_{s+m})}{\partial p_1^\alpha} F_{s+m} \right\}, \\ T_s &= \langle [b_s, H_s^{\text{eff}}] \rangle, \quad H_s^{\text{eff}} = H_s + \sum_{k=2}^K \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_{k-l} \leq s} \frac{1}{m! \omega^m F_s} \times \\ &\quad \times \int d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_{s+m} h_k(x^{k-l}, \mathbf{x}_{s+1}, \dots, \mathbf{x}_{s+m}) F_{s+m}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Соотношения (2.9) обобщают результаты работ [1], [2] на случай, когда гамильтониан является произвольной функцией координат и импульсов. Таким образом, эволюция локальной плотности s -кратной динамической величины определяется дивергенцией потока этой плотности и средним значением скобки Пуассона рассматриваемой динамической величины и эффективного гамильтониана s -частичного взаимодействия. Подставляя в (2.8) различные динамические величины $B^{(s)}$, получаем уравнения эволюции

макроскопических средних величин (ГДП). В гидродинамике используются следующие ГДП, обозначаемые далее ρ^ν , $\nu = 1, \dots, n+2$:

$$\rho^1 = \rho, \quad \rho^{\alpha+1} = \rho \langle p^\alpha \rangle \equiv \rho p^{*\alpha}, \quad \rho^{n+2} = \rho \langle \tilde{H}_N \rangle \equiv \rho \varepsilon. \quad (2.10)$$

Тильда у гамильтониана означает, что он записан в системе отсчета, движущейся со скоростью, отвечающей среднему импульсу $\mathbf{p}^*$. Согласно функциональной гипотезе нулевое приближение определяется локально-равновесными ФР. Нахождение этих функций для системы взаимодействующих частиц является отдельной сложной задачей, связанной с вычислением конфигурационного интеграла [1], [7], [8], и здесь получение функции F_s^0 не приводится. Локально-равновесные ФР зависят от фазовых переменных через аддитивные интегралы движения, а интенсивные параметры (ИП), сопряженные этим инвариантам, зависят от $\mathbf{r}$ и t . Обычно ИП – это плотность, импульс, температура, обозначаемые далее π^ν , которые затем связываются с ГДП (2.10),

$$\rho^\nu = \rho^\nu|_{F_s^0}, \quad \rho^\nu|_{F_s^k} = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.11)$$

Следует подчеркнуть, что для идеального газа уравнения (2.11) взаимно однозначно определяют ГДП через ИП. В общем случае требуется невырожденность матрицы

$$\mathcal{Q}_\nu^\mu = \frac{\partial \rho^\mu}{\partial \pi^\nu}, \quad (2.12)$$

так как уравнения гидродинамики связывают в локально-равновесном приближении временные производные ГДП с градиентами ИП, а для нахождения первой неравновесной поправки к ФР надо записать эти уравнения в единых переменных. Например, для идеального релятивистского газа [9] с единичной энергией покоя атома ($mc^2 \equiv 1$) имеем

$$F_1^0 = \frac{\omega p}{Z_0} e^{-\beta \tilde{H}_0}, \quad (2.13)$$

где

$$Z_0 = 2 \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{(n-1)/2} \sqrt{1+s^2} K_{(n+1)/2}(\beta), \quad \tilde{H}_0 = \sqrt{(1+p^2)(1+s^2)} - \mathbf{p}\mathbf{s}.$$

Здесь $K_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Параметрами распределения (2.13) являются ИП ρ , $\mathbf{s}$, β ; $\mathbf{s}$ – импульс, который отвечает средней скорости, а $\mathbf{p}^* = \langle \mathbf{p} \rangle$ – средний импульс системы,

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \mathbf{u} = \left\langle \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1+p^2}} \right\rangle, \quad \mathbf{p}^* = \gamma \mathbf{s}, \\ \gamma &= \frac{K_{(n+3)/2}(\beta)}{K_{(n+1)/2}(\beta)}, \quad \varepsilon = \gamma - 1 - \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку $\mathbf{p}^*$ зависит от фактора Гиббса β , возникает проблема разрешимости уравнений гидродинамики первого приближения относительно временных производных ГДП. Для случая (2.14) эта задача разрешима [10], но уже в постньютоновском приближении возможно вырождение матрицы (2.12). В приближении малых слабoreлятивистских поправок, когда $\det \mathcal{Q} \neq 0$, можно получить выражения для коэффициентов переноса, если соответствующие классические значения считать известными.

3. ГИДРОДИНАМИКА ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим сначала систему классических частиц единичной массы, которые взаимодействуют через парный потенциал $h_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \equiv \Phi_{ij} = \Phi(|\mathbf{q}_{ij}|)$, зависящий только от модуля разности координат. Локально-равновесные ФР для такой системы имеют вид [2]

$$F_s^0 = (\omega \rho)^s \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ns/2} g_s(q^s) \prod_{k=1}^s e^{-\frac{\beta(\mathbf{p}_k - \mathbf{u})^2}{2}}, \quad (3.1)$$

где $\rho, \mathbf{u}, \beta$ – функции от $\mathbf{r}$ и t , а g_s – равновесная координатная ФР, зависящая от β, ρ как от параметров; $g_1 \equiv 1$, $g_2 = g(|\mathbf{q}_{12}|)$. Согласно (2.11) получаем

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\beta}(n + U(\rho, \beta)), \quad U(\rho, \beta) = \beta \rho \int dq \Phi(q)g(q). \quad (3.2)$$

Уравнения эволюции ГДП имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= -\nabla_\alpha \rho u^\alpha, \\ \partial_t u^\alpha &= -u^\beta \nabla_\beta u^\alpha - \frac{1}{\rho} \nabla_\beta \rho P^{\alpha\beta}, \\ \partial_t \varepsilon &= -u^\alpha \nabla_\alpha \varepsilon - \frac{1}{\rho} \nabla_\alpha \rho J^\alpha - P^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u^\beta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta} &= \langle p^\alpha p^\beta \rangle - u^\alpha u^\beta - \left\langle q^\beta \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q^\alpha} \right\rangle, \\ J^\alpha &= \frac{1}{2} \langle p_1^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{u})^2 \rangle + \langle p_1^\alpha \Phi \rangle - u^\alpha \varepsilon - \left\langle (p_1^\beta - u^\beta) q^\alpha \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q^\beta} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В локально-равновесном приближении (3.1) выражения для потоков (3.4) принимают вид

$$\begin{aligned} P_0^{\alpha\beta} &= \frac{1}{\beta} \delta^{\alpha\beta} (1 - G(\rho, \beta)), \quad J_0^\alpha = 0, \\ G(\rho, \beta) &= \frac{\beta \rho}{2n} \int dq q \Phi'(q)g(q). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку правые части уравнений (3.3) имеют порядок $O(\mu)$, то

$$\partial_t F_1^0 = F_1^0 \sigma^\nu \partial_t \pi^\nu = O(\mu), \quad \sigma^\nu = \frac{\partial \ln F_1^0}{\partial \pi^\nu} = \left(1, \beta \mathbf{w}, \frac{n - \beta w^2}{2\beta} \right), \quad \mathbf{w} = \mathbf{p} - \mathbf{u}. \quad (3.6)$$

Подставляя разложение (1.6) в уравнение (2.5) и приравнявая в нем члены порядка $O(\mu)$, получаем уравнение для поправки F_2^1 к бинарной локально-равновесной ФР,

$$\sigma^\nu \partial_t \pi^\nu + \left(\sigma^\nu v_{\text{eff}}^\alpha + \frac{\partial v_{\text{eff}}^\alpha}{\partial \pi^\nu} \right) \nabla_\alpha \pi^\nu = \frac{1}{\omega F_1^0} \int d\mathbf{x}_2 [\Phi_{12}, F_2^1]. \quad (3.7)$$

Если теперь выразить производные по времени от ИП через градиенты ГДП согласно (3.3) при условии $\det \mathcal{Q} \neq 0$, то функцию F_2^1 можно представить в виде разложения по

градиентам ИП. В рассматриваемом случае уравнения ГДП (3.3) в терминах ИП имеют вид

$$\partial_t \pi^\nu = \Lambda_\alpha^{\nu\mu} \nabla^\alpha \pi_\mu, \quad (3.8)$$

где коэффициенты $\Lambda_\alpha^{\nu\mu}$ зависят от π^ν и объединяются в блочную матрицу

$$\Lambda_{\text{cl}} = \left\| \begin{array}{ccc} -\mathbf{u} & -\hat{\mathbf{I}} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{I}} \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \rho G}{\partial \rho} - 1 \right) & \mathbf{u} \hat{\mathbf{I}} & \hat{\mathbf{I}} \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{\partial \left(\frac{G}{\beta} \right)}{\partial \beta} \right) \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{I}} \beta \frac{\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + 2(G-1)}{2\beta \frac{\partial U}{\partial \beta} - U - n} & \mathbf{u} \end{array} \right\|, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{0}$ – строка длины n , а $\hat{\mathbf{I}}$ – единичная $(n \times n)$ -матрица. После этого функцию F_2^1 будем искать в виде

$$F_2^1 = F_2^0 X_\nu^\alpha \nabla_\alpha \pi^\nu. \quad (3.10)$$

Подставляя соотношения (3.8)–(3.10) в уравнение (3.7), получаем уравнение относительно X_ν^α

$$(\Lambda_\alpha^{\nu\mu} + v_{\text{eff}}^\alpha \delta^{\nu\mu}) \sigma_\nu + \frac{\partial v_{\text{eff}}^\alpha}{\partial \pi_\mu} \equiv Y_\mu^\alpha = \frac{1}{\omega F_1^0} \int d\mathbf{x}_2 [\Phi_{12}, F_2^0 X_\mu^\alpha], \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1^\alpha &= w^\alpha \frac{\partial \rho G}{\partial \rho}, \quad Y_{n+2}^\alpha = \frac{w^\alpha}{2\beta} \left(n + 2 - \beta w^2 + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{G}{\beta} \right), \\ Y^{\alpha\gamma} &= \beta w^\alpha w^\gamma + \delta^{\alpha\gamma} \left(-1 + \frac{1}{2} (n - \beta w^2) \frac{\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + 2(G-1)}{2\beta \frac{\partial U}{\partial \beta} - U - n} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.11) ищется путем разложения неизвестных функций X_μ^α в ряды по полиномам Сонина–Лагерра относительно $\mathbf{w}$ [6], [9]. Некоторые частные решения этой задачи содержатся в работе [11]. Подстановка (3.10) в (3.4) дает второе приближение для потоков, после чего уравнения гидродинамики (3.3) дополняются членами второго порядка по градиентам ГДП. Ниже эта схема реализуется на примере слабoreлятивистских систем с запаздыванием взаимодействия.

4. ПОСТНЬЮТОНОВСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Рассмотрим динамическую систему с запаздыванием взаимодействия [3], [12] в постньютоновском приближении, когда в уравнениях движения учитываются поправки порядка p^2/c^2 . Примерами таких систем являются приближения Дарвина [13] в электродинамике и Фока [5] в теории тяготения. Гамильтониан, включающий в себя обе эти модели, имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \sum_i c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}} + \sum_{i < j} \left(\Phi_{ij} + \frac{1}{2c^2} \Phi_{ij}^{\text{R}} \right) + \\ &+ \frac{\kappa}{6c^2} \sum_{i < j < k} (\Phi_{ij} \Phi_{ik} + \Phi_{ij} \Phi_{jk} + \Phi_{ik} \Phi_{jk}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\Phi_{ij} = \Phi(|\mathbf{q}_{ij}|) \equiv \Phi_{ij}^{\text{cl}}$ – классический потенциал парного взаимодействия, а функция Φ_{ij}^{R} имеет вид

$$\Phi_{ij}^{\text{R}} = a\Phi_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^2 + A_{ij}^{\alpha\beta} p_i^\alpha p_j^\beta + b\Phi_{ij}^2, \quad (4.2)$$

где

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = -\Phi_{ij}\delta^{\alpha\beta} + q_{ij}\Phi'_{ij}n_{ij}^\alpha n_{ij}^\beta, \quad n_{ij}^\alpha = \frac{q_{ij}^\alpha}{q_{ij}}.$$

При $\kappa = 0$, $a = 0$, $b = 0$ из соотношений (4.1), (4.2) получается модель Дарвина, а при $\kappa = 1$, $a = 3$, $b = 1$ – модель Фока. По-прежнему полагаем массы всех частиц единичными. Для удобства сравнения с идеальным релятивистским газом и для сохранения правильной асимптотики равновесного распределения кинематические эффекты будем учитывать полностью. Локально-равновесные ФР для этой модели были получены в работах [8], [14]. В частности, функция F_1^0 имеет вид

$$F_1^0 = F_{\text{Yu}} \left[1 - \frac{an}{2\omega\rho c^2} \left((\mathbf{p} - \mathbf{s})^2 - \frac{n}{\beta} \right) U + o(c^{-2}) \right]. \quad (4.3)$$

Здесь U определена в (3.2), F_{Yu} – ФР Юттнера [9], определенная в (2.13). При нахождении ГДП в нулевом приближении для F_3^0 используется классическое выражение, поскольку тройные члены в (4.1) уже имеют нужный порядок малости. Тогда для $\mathbf{p}^*$ получаем то же выражение, что и в (2.14), а для других ГДП имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{eff}} &= \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}} + \frac{aU}{\beta c^2} \mathbf{w} + \frac{2G - U}{2\beta c^2} \mathbf{s}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}} + \frac{2G - U}{2\beta c^2} \mathbf{s}, \\ \varepsilon &= c^2(\gamma - 1) - \frac{1}{\beta} + \frac{U}{\beta} \left(1 + \frac{an}{\beta c^2} \right) + \frac{b - an}{2\beta^2 c^2} D_1 + \frac{\kappa}{2\beta^2 c^2} D_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь γ определена в (2.14), U – в (3.2), G – в (3.5), а функции D_1 и D_2 , учитывающие характерные для слабoreлятивистского приближения поправки к ГДП второго порядка по взаимодействию, имеют вид

$$D_1 = \beta^2 \rho \int \Phi^2(q) g(q) dq, \quad D_2 = \beta^2 \rho^2 \int \Phi(q) \Phi(|\mathbf{q}' - \mathbf{q}|) g_3(q, q') dq dq'. \quad (4.5)$$

Поскольку сами ИП теперь содержатся в определении средней энергии и $\mathbf{u} \neq \mathbf{p}^* \neq \mathbf{s}$, то производные ГДП и ИП присутствуют в уравнениях гидродинамики одновременно, т.е.

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= -\nabla_\alpha \rho u^\alpha, \\ \partial_t p^{*\alpha} &= -u^\gamma \nabla_\gamma p^{*\alpha} - \frac{1}{\rho} \nabla_\gamma \rho P^{\alpha\gamma}, \\ \partial_t \varepsilon + \frac{1}{\beta(c^2 + s^2)} s^\alpha \partial_t s^\alpha &= -u^\alpha \nabla_\alpha \varepsilon - \frac{1}{\rho} \nabla_\alpha \rho J^\alpha + T^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha s^\gamma. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В отличие от системы (3.3) в уравнение для энергии входит тензор $T^{\alpha\gamma}$, в общем случае отличный от тензора давления $P^{\alpha\gamma}$. В локально-равновесном приближении величины в правой части (4.6) имеют вид

$$\begin{aligned} P_0^{\alpha\gamma} &= \frac{\delta^{\alpha\gamma}}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2/c^2}} - G \right) + \frac{\delta^{\alpha\gamma}}{2\beta^2 c^2} [Ua(1-nG) + (an-\kappa)V_1 + nbV_2] - \\ &\quad - \frac{G}{\beta} \left[\delta^{\alpha\gamma} \left(\frac{na}{\beta c^2} - \frac{s^2}{2c^2} \frac{n+3}{n+2} \right) + \frac{s^\alpha s^\gamma}{c^2} \frac{n+1}{n+2} \right] - \frac{B}{2\beta c^2} (\delta^{\alpha\gamma} s^2 + 2s^\alpha s^\gamma), \quad (4.7) \\ T_0^{\alpha\gamma} &= -P_0^{\alpha\gamma} + \frac{U-G}{2\beta^2 c^2} \delta^{\alpha\gamma} - B \frac{s^\alpha s^\gamma}{s^2 + c^2}, \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения интегралов:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\beta\rho}{2n(n+2)} \int q^2 \Phi''(q) g(q) dq, \quad V_1 = \frac{\beta^2 \rho}{2n} \int q (\Phi^2(q))' g(q) dq, \\ V_2 &= \frac{\beta^2 \rho^2}{2n} \int q \Phi'(q) [\Phi(q') + \Phi(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|)] g_3(q, q') dq dq'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для идеального релятивистского газа и классического газа частиц со взаимодействием, не зависящим от импульсов, поток тепла $\mathbf{J}_0$ в (4.6) в линейном приближении по градиентам отсутствует. Учет членов с запаздыванием взаимодействия приводит к качественно новым эффектам,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0 &= \frac{\mathbf{s}}{4\beta^2 c^2} [(n+2)B + nU - 2G + 2naD_1 + V_3 + (2G-U)(U-2+2\beta c^2(\gamma-1))], \\ V_3 &= \beta^2 \rho \left[\int \Phi(q) (q\Phi'(q) - \Phi(q)) g(q) dq + \rho \int \Phi(q) (q'\Phi'(q') - \Phi(q')) g_3(q, q') dq dq' \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Отметим, что поправки $O(c^{-2})$, квадратичные по взаимодействию, появились в потоковых членах (4.7)–(4.9) не только из-за их наличия в гамильтониане (4.1), но и в силу того что скорость теперь зависит от потенциала взаимодействия.

Найденные выражения (4.7)–(4.9) для термодинамических потоков позволяют определить слабoreлятивистские поправки к классическим коэффициентам переноса, т.е. построить уравнения ГДП во втором приближении. Для этого в систему (4.6) необходимо подставить $\mathbf{p}^*$ из (2.14) и ϵ из (4.4), после чего разрешить ее относительно временных производных ИП. Для нахождения правой части в уравнении (3.11) требуется еще определить величины σ^ν из (3.6):

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= 1 - \frac{\beta na}{\rho \omega c^2} \left(w^2 - \frac{n}{\beta} \right) \frac{\partial U}{\partial \ln \rho}, \quad \sigma_2^\alpha = -\frac{s^\alpha}{c^2 + s^2} + \beta w^\alpha \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}} + 2U \frac{na}{\rho \omega c^2} \right), \\ \sigma^3 &= \frac{1}{\beta} - (\gamma-1)c^2 - c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}} + \mathbf{p}\mathbf{s} - \frac{aU}{\rho \omega c^2} \left[w^2 \left(1 + \frac{\partial \ln U}{\partial \ln \beta} \right) - n \frac{\partial \ln U}{\partial \beta} \right], \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{eff}}}{\partial \pi^\nu} &= \frac{2}{c^2} \left(a\mathbf{w} \frac{\partial U}{\partial \ln \rho} + \frac{\mathbf{s}}{2} \frac{\partial (G-U)}{\partial \ln \rho}, \frac{\mathbf{I}}{2c^2} (G - (1+2a)U), a\mathbf{w} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{s}}{2} \frac{\partial (G-U)}{\partial \beta} \right). \end{aligned}$$

Представляя далее локально-равновесные ИП в виде

$$F^0 = F^{\text{cl}} + \frac{1}{2c^2} F^{\text{R}} + o(c^{-2})$$

(и аналогично потоки первого приближения в уравнениях ГДП (4.6)), получаем, что неизвестные функции X из (3.11), определяющие необратимые потоки, с заданной точностью $o(c^{-2})$ определяются из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{F_1^{\text{R}}}{F_1^{\text{cl}}} Y^{\text{cl}} + Y^{\text{R}} - \frac{1}{\omega F_1^{\text{cl}}} \int d\mathbf{x}_2 ([\Phi_{12}^{\text{cl}}, F_2^{\text{R}} X^{\text{cl}}] + [\Phi_{12}^{\text{R}}, F_2^{\text{cl}} X^{\text{cl}}]) = \\ = \frac{1}{\omega F_1^{\text{cl}}} \int d\mathbf{x}_2 ([\Phi_{12}^{\text{cl}}, F_2^{\text{cl}} X^{\text{R}}]). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь X^{cl} – решение уравнения (3.11) в классическом случае (без учета запаздывания взаимодействия), Y^{cl} – выражения из (3.12), а Y^{R} – аналогичные им выражения, отвечающие потокам (4.7)–(4.9). Последние выражения имеют достаточно громоздкий вид и здесь не приводятся.

Для определения поправок к коэффициентам переноса будут нужны интегралы от них. При этом необходимо учесть представление (3.10) и условия (2.11). Способ определения этих интегралов следующий. Пусть φ_k^α , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, – решение уравнения вида (3.11)

$$\frac{1}{\omega F_1^0} \int d\mathbf{x}_2 [\Phi_{12}, F_2^0 \varphi_k^\alpha] = W_k^\alpha, \quad W_k^\alpha = w_1^{\alpha_1} \dots w_k^{\alpha_k}.$$

Представляя в левой части уравнения (4.10) $Y^\alpha = \sum_k C_k [\pi^\nu] W_k^\alpha$, находим $X^\alpha = \sum_k C_k [\pi^\nu] \varphi_k^\alpha$. Этим определяется первая поправка по параметру неоднородности к локально-равновесной бинарной функции (3.10), что позволяет вычислить в этом приближении потоки в (4.6) (обозначим их нижним индексом 1). Например, для нахождения первого приближения к величине $u^\alpha = \langle v_{\text{eff}}^\alpha \rangle$ заметим, что при разложении в ряд квадратного корня в (4.4) и последующем усреднении с учетом (2.11) отличен от нуля только член $-(2c^2)^{-1} \langle p^\alpha p^2 \rangle_1^{\text{cl}}$. Потоки тепла и импульса в классическом случае имеют вид

$$\begin{aligned} J_{\text{cl}}^\alpha &= \frac{\lambda_{\text{cl}}}{\beta^2} \nabla_\alpha \beta = \frac{1}{2} \langle p^\alpha w^2 \rangle_1^{\text{cl}}, \\ P_{\text{cl}}^{\alpha\beta} &= -\frac{\eta_{\text{cl}}}{2} \left(\nabla_\alpha u^\beta + \nabla_\beta u^\alpha - \frac{2}{n} \delta^{\alpha\beta} \text{div } \mathbf{u} \right) \equiv -\eta_{\text{cl}} \hat{D}^{\alpha\beta} \mathbf{u} = \langle w^\alpha w^\beta \rangle_1^{\text{cl}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем слабoreлятивистскую поправку к локальной скорости

$$u_1^\alpha = -\frac{\lambda_{\text{cl}}}{\beta^2 c^2} \nabla_\alpha \beta + \frac{\eta_{\text{cl}}}{c^2} (s^\alpha + s^\beta) \hat{D}^{\alpha\beta} \mathbf{u}. \quad (4.11)$$

Аналогично рассматриваются и другие величины в правой части (4.6), например

$$J_1^\alpha = \frac{1}{\beta} \left(\left(1 - \frac{s^2}{2c^2} \right) \lambda_{\text{cl}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \lambda_{\text{cl}}}{\partial \beta} \right) \nabla_\alpha \beta + \frac{1}{c^2} \left(\frac{U}{2\beta} \eta - \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) s^\beta \hat{D}^{\alpha\beta} \mathbf{u}. \quad (4.12)$$

Если система в целом покоится, то из (4.12) следует, что в потоке тепла имеется только поправка к коэффициенту теплопроводности, т.е.

$$\lambda = \lambda_{\text{cl}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \lambda_{\text{cl}}}{\partial \beta}.$$

Для тензора давления имеем

$$\begin{aligned} P_1^{\alpha\gamma} = & - \left(\left(1 - \frac{s^2}{2c^2} \right) \eta_{\text{cl}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \eta_{\text{cl}}}{\partial \beta} \right) \partial_{\text{sym}}^{\alpha\gamma} \mathbf{u} + \frac{s^\alpha s^\beta \eta_{\text{cl}}}{2c^2} \partial_{\text{sym}}^{\beta\gamma} \mathbf{u} + \\ & + \frac{\lambda_{\text{cl}}}{2nc^2} (s^\alpha \nabla_\gamma \beta + s^\gamma \nabla_\alpha \beta) - \zeta_{\text{R}} \delta^{\alpha\gamma} \text{div } \mathbf{u}, \\ T_1^{\alpha\gamma} = & -P_1^{\alpha\gamma}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\zeta_{\text{R}} = \frac{s^2}{nc^2} (nB + U - G) \lambda_{\text{cl}} + \frac{G}{\beta c^2} \frac{\partial \lambda_{\text{cl}}}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} \right)^{-1}.$$

Производная от средней энергии, входящая в выражение для второй вязкости, вычисляется в соответствии с представлением (4.4).

Формулы (4.11)–(4.13) отражают влияние двух слабoreлятивистских эффектов. Во-первых, имеет место перенос средней энергии запаздывания взаимодействия при движении системы как целого. Во-вторых, запаздывание учитывается и в самих коэффициентах вязкости и теплопроводности. Появление объемной вязкости ζ является чисто слабoreлятивистским эффектом. В работах [9], [15] для частных случаев уравнения Больцмана показано, что эта вязкость отсутствует как в классическом, так и в ультрарелятивистском случаях.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение надо сказать об особенностях постньютоновского приближения при выводе уравнений ГДП (4.6), связанных с вырождением преобразования Лежандра [4], [8]. На гидродинамическом уровне система (4.1) имеет три множества особых точек. Первое множество определяет точки вырождения матрицы (2.12) $\det Q_\nu^\mu = 0$, в которых нет взаимно однозначной связи между ИП и ГДП. Это множество описывается условием обращения в нуль удельной теплоемкости покоящейся системы $\partial \varepsilon / \partial (1/\beta) = 0$. Кроме того, сами уравнения гидродинамики (4.6) должны быть разрешимы относительно временных производных ГДП (как функций ИП), т.е. представляться в виде (3.8). Соответствующее условие вырождения имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial (1/\beta)} + \beta \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{s^2}{c^2 + s^2} = 0.$$

Наконец, третье множество особых точек определяется условием

$$\det \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial s^\gamma} \right) = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}} + \frac{2G - U}{2\beta c^2} \right]^{n-1} \left[\frac{1}{(1 + \frac{s^2}{c^2})^{3/2}} + \frac{2G - U}{2\beta c^2} \right] = 0.$$

Оно связано с вырождением гессиана исходной динамической системы (4.1), вследствие чего ИП-импульс $\mathbf{s}$ на этом множестве нельзя выразить через ГДП-скорость $\mathbf{u}$.

Таким образом, строгий подход к выводу уравнений гидродинамики из цепочки уравнений ББГКИ позволяет выявить ряд нетривиальных эффектов, которые могут быть не замечены в рамках использования редуцированных кинетических уравнений, поскольку применение этих уравнений в каждом конкретном случае нуждается в специальном обосновании.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 01-01-00407.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.–Л.: ГИТТЛ, 1946.
- [2] *Н. Н. Боголюбов.* Сб. тр. Ин-та математики АН УССР. 1948. № 10. С. 41.
- [3] *Р. П. Гайда.* ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. № 2. С. 427.
- [4] *Yu. N. Orlov, I. P. Pavlotsky.* Physica A. 1988. V. 151. P. 318.
- [5] *В. А. Фок.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматлит, 1961.
- [6] *С. Чепмен, Т. Коулинг.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.
- [7] *Yu. N. Orlov, I. P. Pavlotsky.* Physica A. 1992. V. 184. P. 558.
- [8] *Ю. Н. Орлов.* Равновесные функции распределения в постгалилеевом приближении. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 23. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1992.
- [9] *С. де Гроот, В. ван Левуен, Х. ван Верт.* Релятивистская кинетическая теория. М.: Мир, 1983.
- [10] *Ю. Н. Орлов.* Уравнения гидродинамики слабoreлятивистской плазмы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 73. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1995.
- [11] *Ю. Н. Орлов.* Вывод уравнений гидродинамики. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 36. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1989.
- [12] *И. П. Павлоцкий.* Введение в слабoreлятивистскую статистическую механику. М.: Наука, 1987.
- [13] *C. G. Darwin.* Phil. Mag. 1920. V. 39. P. 357.
- [14] *Ю. Н. Орлов, И. П. Павлоцкий.* ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 2. С. 329.
- [15] *Ю. Н. Орлов, И. П. Павлоцкий.* Матем. модел. 1989. Т. 1. № 12. С. 31.

Поступила в редакцию 30.VII.2001 г.,
после доработки 13.VIII.2002 г.