Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Чугреев, Нарушается ли принцип причинности для гравитационных волн?, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 2, 349–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf17>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 09:06:11

© 2004 г.

Ю.В. Чугреев*

НАРУШАЕТСЯ ЛИ ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН?

Показано, что при проверке принципа причинности вклад слабых гравитационных волн в линейном приближении релятивистской теории гравитации значительно меньше вклада статической части решения или вклада космологического фона. Поэтому наличие слабых гравитационных волн не нарушает принцип причинности в релятивистской теории гравитации.

Ключевые слова: принцип причинности, гравитационные волны, статическая составляющая, космологический фон.

В этой работе будут проанализированы утверждения Питтса и Шиве [1] о том, что принцип причинности (ПП) нарушается для монохроматических гравитационных волн в релятивистской теории гравитации (РТГ) в линейном приближении.

Это утверждение уже подвергалось критике Логуновым и Мествиришвили [2]. Мы же дополним их аргументацию и покажем, что вклад статической части решения (а в более общей постановке задачи и космологического фона) обеспечивает причинность волновых решений в РТГ.

Напомним формулировку ПП в РТГ [3]: любой изотропный в пространстве Минковского вектор U^μ должен быть пространственноподобным или изотропным в римановом пространстве¹⁾:

$$\gamma_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0, \quad (1)$$

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \leq 0. \quad (2)$$

Рассмотрим применимость ПП к случаю слабых гравитационных волн в линейном приближении. Соответствующее стандартное решение линеаризованных уравнений РТГ в волновой зоне

$$(\square + m^2)\varphi^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$\partial_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

¹⁾Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские – 1, 2, 3.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: ikt@polikvart.ru

где $\square \equiv \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial \vec{r}^2$, m – масса гравитона, $t^{\mu\nu}$ – полный тензор энергии-импульса, равно (см., например, [4])

$$\varphi^{\mu\nu}(t, \vec{r}) = \frac{4}{r} \int t^{\mu\nu}(t-r, \vec{r}) d\vec{r} (1 + O(m^2)) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (5)$$

Как показано в работе [4], его можно привести к виду

$$\begin{aligned} \varphi^{ik} &\approx \frac{4}{r} \left(\int \rho x^i x^k dV \right)^{\cdot\cdot} = \frac{4M}{r} v^2 (J_2^{ik})^{\cdot\cdot}, \\ (J_2^{ik})^{\cdot\cdot} &= \frac{(\int \rho x^i x^k dV)^{\cdot\cdot}}{M v^2} = O(1). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $r \equiv |\vec{r}|$, $(\cdot)^{\cdot} \equiv \partial/\partial t$, $\rho = t^{00}$, $\int \rho dV = M$ – масса источника гравитационных волн, v – характерная скорость его внутреннего движения. Обозначив через $n^i = r^i/r$ единичный орт в направлении радиус-вектора, с помощью (4) и (5) находим соотношения

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi^{\mu\nu} &= n_i \varphi^{\mu\nu} (1 + O(m^2)) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \varphi^{00} &= n_i n_k \varphi^{ik} (1 + O(m^2)) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi^{0i} = -n_k \varphi^{ik} (1 + O(m^2)) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (8)$$

Таким образом, для изотропного в пространстве Минковского 4-вектора $N^\mu = (1, n^i)$ такого, что $\gamma_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = 0$, с помощью (7) и (8) получаем

$$N_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь ПП (1), (2). Согласно этому принципу для любого 4-вектора $U^\mu = (U^0, U^i)$ такого, что $\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0$, должно быть $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \leq 0$. Для удобства заменим вектор U^μ на вектор u^μ с единичной нулевой компонентой: $u^\mu \equiv U^\mu/U^0 = (1, u^i)$. В линейном приближении РТГ связь между тензором гравитационного поля $\varphi^{\mu\nu}$ и метрическим тензором эффективного риманова пространства-времени $g_{\mu\nu}$ задается соотношением [2], [3]

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \varphi, \quad \varphi \equiv \gamma_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu}. \quad (10)$$

Отсюда находим, что в линейном приближении справедливо равенство

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\varphi_{\mu\nu} u^\mu u^\nu.$$

Подставляя сюда значения φ_{00} и φ_{0i} из (7) и (8), находим окончательно

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\varphi_{ik} (u^i - n^i)(u^k - n^k). \quad (11)$$

В работе [2] авторы фактически сделали следующий выбор вектора u^i :

$$u_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0,$$

что отвечает случаю (9) $u^i = n^i$, т.е. $u^\mu = N^\mu$. Поэтому в силу (11) вектор U^μ (и соответственно u^μ) является изотропным в римановом пространстве, т.е. ПП (1), (2) соблюдается. Однако в общем случае векторы u^i и n^i неколлинеарны, и в силу того, что для монохроматической волны φ^{ik} (6) ее знак периодически меняется, знак квадратичной формы (11) также будет изменяться, а ПП – нарушаться.

И все же вывод о нарушении ПП в линейном приближении неверен. Дело в том, что наряду с чисто нестационарным решением (3), (4), отвечающим спину 2, всегда существует и статическая часть, отвечающая спину 0. Это поле, как и волновое решение, убывает как $1/r$ (влияние экспоненты Юкавы e^{-mr} можно не учитывать, так как она играет роль лишь на космологических масштабах – см. ниже), и его вкладом пренебрегать нельзя. Именно благодаря присутствию этого члена и будет соблюдаться ПП вопреки утверждениям авторов [1] о том, что на достаточно большом расстоянии сферическая волна становится плоской и поэтому при анализе ПП в линейном приближении можно ограничиться лишь случаем плоских волн. Образно говоря, при переходе от сферических волн к плоским вместе с водой был выплеснут и ребенок.

Обозначим это статическое поле как $\varphi_{\mu\nu}^\circ$. Как известно (см., например, [3]), оно равно

$$\begin{aligned}\varphi_{00}^\circ &= \frac{4}{r} \int \rho(\vec{r}) d\vec{r} \left(1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right), \\ \varphi_{0i}^\circ &= O\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \varphi_{ik}^\circ &= O\left(\frac{1}{r^2}\right).\end{aligned}\tag{12}$$

Найдем для полного (спин 2+спин 0) решения величину $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, знак которой и определяет соблюдение ПП:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\varphi_{00}^\circ - \varphi_{ik}(u^i - n^i)(u^k - n^k).$$

Используя (6) и (12), получим окончательно

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\frac{4M}{r} \left[1 + v^2 (J_{2ik})'' (u^i - n^i)(u^k - n^k) \right].\tag{13}$$

Рассмотрим подробнее порядок величин входящих в (13) членов. Единица в квадратных скобках отвечает статическому вкладу, а член с J_2 – нестатическому волновому. Так как u^i и n^i есть единичные трехмерные векторы, а $(J_{2ik})'' = O(1)$, то порядок величины нестатического слагаемого по сравнению со статическим членом равен v^2/c^2 , где v – скорость внутреннего движения вещества источника. Здесь мы для наглядности восстановили скорость света c , которая, как обычно, полагается равной единице. По

теореме вириала порядок величины $O(v^2/c^2)$ совпадает с порядком величины гравитационного потенциала на поверхности источника гравитационных волн M/l . Условие применимости линейного приближения требует, чтобы $M/l \ll 1$. Таким образом, мы приходим к заключению, что вклад волнового члена всегда меньше вклада статического слагаемого, и поэтому

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \leq 0,$$

т.е. ПП в РТГ в линейном приближении при наличии гравитационных волн соблюдается.

Если же теперь рассмотреть область больших $r \approx 1/m$, где соответствующая экспонента Юкавы начинает отличаться от единицы, то нужно подчеркнуть, что она соответствует уже космологической шкале, так как этот масштаб отвечает комптоновской длине Вселенной [3]. В этом случае нельзя игнорировать медленно меняющееся фридмановское космологическое поле, создаваемое равномерно “размазанным” веществом Вселенной. Это поле является по сути аналогом статической части гравитационного поля источника островного типа, рассмотренного выше. Как показано в работе [5], при выборе постоянной интегрирования α : $\alpha > R_{\max}$, входящей в космологическое решение РТГ с ненулевой массой гравитона [6]

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\tau^2 - R^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \\ d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{d\tau^2}{R^6(\tau)} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\alpha}, \\ R_{\min} &\leq R(\tau) \leq R_{\max}, \end{aligned}$$

знакоопределенный вклад космологического фона превалирует над знаконеопределенным вкладом гравитационных волн, и ПП выполняется.

Благодарности. Автор выражает благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] *J. B. Pitts, W. C. Schieve.* Gen. Rel. Grav. 2001. V. 33. P. 1319–1350; Null cones in Lorentz-covariant general relativity. gr-qc/0111004.
- [2] *А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили.* ТМФ. 2001. Т. 129. № 1. С. 153–160.
- [3] *А. А. Логунов.* Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2001.
- [4] *А. А. Власов, Ю. В. Чугреев.* Гравитационное излучение в релятивистской теории гравитации с ненулевой массой гравитона. Препринт 87-165. Серпухов: ИФВЭ, 1987.
- [5] *Ю. В. Чугреев.* Гравитационные волны на космологическом фоне релятивистской теории гравитации с ненулевой массой гравитона. Препринт 89-143. Серпухов: ИФВЭ, 1989.
- [6] *М. А. Мествиришвили, Ю. В. Чугреев.* Фридмановская модель Вселенной в релятивистской теории гравитации. М.: МГУ, 1988; ТМФ. 1989. Т. 80. № 2. С. 313–320.

Поступила в редакцию 10.IV.2003 г.