Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, О тензоре Киллинга–Яно, *ТМФ*, 2003, том 134, номер 3, 382–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:35:53

О ТЕНЗОРЕ КИЛЛИНГА–ЯНО

Получено общее решение уравнений, задающих тензор Киллинга–Яно ранга p на n -мерном ($1 \leq p \leq n-1$) псевдоримановом многообразии постоянной кривизны, и указаны возможные приложения этого результата.

Ключевые слова: многообразие постоянной кривизны, тензор Киллинга–Яно, уравнения Максвелла и Дирака.

1. ВВЕДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Вектором Киллинга на n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) называется (см. [1], с. 203; [2], с. 282) векторное поле ξ , компоненты которого ξ^i , найденные в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ многообразия, удовлетворяют уравнениям Киллинга $\nabla_j \xi_k + \nabla_k \xi_j = 0$, где ∇_j – символ ковариантного дифференцирования в направлении векторного поля $\partial_j = \partial/\partial x^j$, $\xi_k = g_{ki} \xi^i$ и $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ для всех $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$.

Векторы Киллинга на пространственно-временных многообразиях являются объектом непрекращающихся исследований, результаты которых можно найти в обзоре [3]. В частности, в монографии [4] приведены векторы Киллинга для пространства де Ситтера произвольной сигнатуры.

Киллинговой p -формой или, по другой терминологии, тензором Киллинга–Яно ранга p ($1 \leq p \leq n$) на псевдоримановом многообразии (M, g) называется (см. [5], с. 340) кососимметрическое тензорное поле ω , локальные компоненты которого $\omega_{i_1 \dots i_p}$ удовлетворяют условию $\nabla_j \omega_{ki_2 \dots i_p} + \nabla_k \omega_{ji_2 \dots i_p} = 0$. Это условие в свою очередь является обобщением уравнений Киллинга на случай $p \geq 1$.

В исследовании тензоров Киллинга–Яно были обозначены следующие две задачи (см. [5]; с. 340): нахождение всех тензоров заданного пространства-времени и классификация метрик в зависимости от того, какие нетривиальные тензоры они допускают. Решением этих задач занимались многие авторы (см. [5], с. 340–342; [6]), при этом их усилия были сосредоточены на исследовании обобщенных уравнений Киллинга порядка $p = 2$, поскольку для пространственно-временных многообразий по известной причине случаи $p = 1$ и $p = 3$ равносильны.

*Владимирский государственный педагогический университет, Владимир, Россия

В данной статье решена задача нахождения интегралов уравнений, задающих тензор Киллинга–Яно ранга p на n -мерном ($1 \leq p \leq n-1$) псевдоримановом многообразии постоянной кривизны, и указаны возможные приложения полученного результата.

1.2. Пусть f – отображение псевдориманова многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ в другое псевдориманово многообразие (M, g) и f_* – его дифференциал. Тогда для любого ковариантного тензорного поля ω на (M, g) определяется на $(\bar{M}, \bar{g})$ ковариантное тензорное поле $f^*\omega$, где f^* – транспонированное к f_* отображение. Если $\dim \bar{M} = \dim M = n$ и f – проективный диффеоморфизм, т.е. отображение, переводящее геодезические многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ в геодезические многообразия (M, g) , то будет справедлива следующая

ЛЕММА. Пусть $f: (\bar{M}, \bar{g}) \rightarrow (M, g)$ – проективный диффеоморфизм n -мерных псевдоримановых многообразий и ω – тензор Киллинга–Яно ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) на многообразии (M, g) . Тогда $\bar{\omega} = e^{-(p+1)\psi}(f^*\omega)$ для

$$\psi = \ln |\det g / \det \bar{g}| / (2(n+1))$$

будет тензором Киллинга–Яно ранга p на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$.

Известно, что пространства постоянной кривизны и только они проективно диффеоморфны локально-плоским многообразиям (см. [2], с. 165–166; [7], с. 82). Принимая во внимание строение тензора Киллинга–Яно на локально-плоском многообразии, найденное в работе [8], и опираясь на сформулированную лемму, можно утверждать, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА. На n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) постоянной кривизны существует локальная система координат $x^1, \dots, x^n$, в которой произвольный тензор Киллинга–Яно ω ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) имеет компоненты

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = e^{(p+1)\psi} (A_{ki_1 \dots i_p} x^k + B_{i_1 \dots i_p}) \quad (1.1)$$

где $\psi = \ln |\det g| / (2(n+1))$ и $A_{ki_1 \dots i_p}$ и $B_{i_1 \dots i_p}$ – постоянные кососимметричные по всем индексам поля.

Обозначим через η элемент объема псевдориманова многообразия (M, g) , задаваемый в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ равенством $\eta = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. На его основе можно определить оператор Ходжа $*$, полагая $\omega \wedge (*\omega') = g(\omega \wedge \omega')\eta$ для любых кососимметрических тензорных полей ω и ω' ранга p (см. [9], с. 52). Тогда, как это доказано в работе [8], для произвольного тензора Киллинга–Яно ω ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) дуальное ему тензорное поле $\theta = *\omega$ будет замкнутой конформно-киллинговой $(n-p)$ -формой или, по другой терминологии, кососимметрическим замкнутым конформно-киллинговым тензором ранга $n-p$. Верно и обратное утверждение. Напомним, что замкнутое конформно-киллингово тензорное поле θ ранга p определяется уравнениями

$$\nabla_k \theta_{i_1 i_2 \dots i_p} = \frac{p}{n-p+1} g_{k[i_1} \nabla^{j} \theta_{j|i_2 \dots i_p]},$$

которые в случае $p = 1$ будут характеризовать θ как специальное конциркулярное векторное поле или, по другой терминологии, векторное поле Яно ([8], [10], [11]).

В работе [8] было установлено, что на псевдоримановом многообразии (M, g) постоянной ненулевой кривизны C произвольный замкнутый конформно-киллингов тензор θ ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) имеет вид $\theta = -\nabla\omega/(pC)$ для некоторого тензора Киллинга–Яно ω ранга $p-1$. С учетом сформулированной выше теоремы можно утверждать, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ. На n -мерном псевдоримановом многообразии (M, g) постоянной ненулевой кривизны C существует локальная система координат $x^1, \dots, x^n$, в которой произвольный замкнутый конформно-киллингов тензор θ ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) имеет компоненты

$$\theta_{i_1 \dots i_p} = -\frac{1}{C} e^{p\psi} \left(\psi_{[i_1} A_{|k| i_2 \dots i_p]} x^k + \psi_{[i_1} B_{i_2 \dots i_p]} + \frac{1}{p} A_{i_1 i_2 \dots i_p} \right) \quad (1.2)$$

где $\psi = \ln |\det g|/(2(n+1))$, $\psi_i = \partial_i \psi$, $A_{i_1 \dots i_p}$ и $B_{i_2 \dots i_p}$ – произвольные кососимметричные по всем индексам постоянные поля.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЙ

2.1. Известно, что проективный диффеоморфизм $f: (\overline{M}, \overline{g}) \rightarrow (M, g)$ псевдоримановых многообразий можно осуществить (см. [7], с. 46–47) по принципу равенства локальных координат $\bar{x}^1 = x^1, \dots, \bar{x}^n = x^n$ в соответствующих точках $\bar{x}$ и $x = f(\bar{x})$ этих многообразий. В этом случае справедливы равенства (см. [2], с. 162; [7], с. 73–75)

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \overline{\Gamma}_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k \quad (2.1)$$

для компонент T_{ij}^k тензора деформации $T = \nabla - \overline{\nabla}$ и объектов Γ_{ij}^k и $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ связностей Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ в общей по отображению $f: (\overline{M}, \overline{g}) \rightarrow (M, g)$ системе координат $x^1, \dots, x^n$, а также для $\psi_j = \partial_j \psi$ и $\psi = \ln |\det g / \det \overline{g}|/(2(n+1))$.

Из равенств (2.1) видно (см. [7], с. 73), что отображение f^{-1} , обратное проективному диффеоморфизму $f: (\overline{M}, \overline{g}) \rightarrow (M, g)$, является проективным отображением.

Полагаем $\omega_{i_1 \dots i_p}$ компонентами произвольного заданного на многообразии (M, g) тензора Киллинга–Яно ω ранга p ($1 \leq p \leq n-1$), которые согласно определению удовлетворяют уравнениям вида

$$\nabla_k \omega_{j i_2 \dots i_p} + \nabla_j \omega_{k i_2 \dots i_p} = 0. \quad (2.2)$$

На основании равенств (2.2) непосредственно убеждаемся, что компоненты

$$\overline{\omega}_{i_1 \dots i_p} = e^{-(p+1)\psi} \omega_{i_1 \dots i_p} \quad (2.3)$$

тензорного поля $\overline{\omega} = e^{-(p+1)\psi} f^* \omega$ удовлетворяют уравнениям

$$\overline{\nabla}_k \overline{\omega}_{j i_2 \dots i_p} + \overline{\nabla}_j \overline{\omega}_{k i_2 \dots i_p} = 0. \quad (2.4)$$

Следовательно, $\overline{\omega}$ является тензором Киллинга–Яно ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$.

2.2. В статье [8] нами было доказано, что в декартовой системе координат $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ окрестности U произвольной точки x локально-плоского многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ компоненты $\bar{\omega}_{i_1 \dots i_p}$ тензора Киллинга–Яно ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) имеют строение

$$\bar{\omega}_{i_1 \dots i_p} = A_{ki_1 \dots i_p} \bar{x}^k + B_{i_1 \dots i_p} \quad (2.5)$$

для произвольных кососимметричных по всем индексам постоянных $A_{ki_1 \dots i_p}$ и $B_{i_1 \dots i_p}$. На основании равенств (2.3) заключаем, что компоненты $\omega_{i_1 \dots i_p}$ произвольного тензора Киллинга–Яно ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) на n -мерном многообразии (M, g) постоянной кривизны имеют строение (1.1). В отличие от леммы здесь $\psi = \ln |\det g| / (2(n+1))$, поскольку в декартовой системе координат $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ компоненты метрического тензора $\bar{g}$ имеют вид $\bar{g}_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ для $\varepsilon_i = \pm 1$ и символа Кронекера δ_{ij} . При этом многообразие (M, g) считается отнесенным к специальной системе локальных координат $x^1, \dots, x^n$, в которой согласно (2.1) символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k. \quad (2.6)$$

2.3. Согласно установленному в статье [8] факту на псевдоримановом многообразии (M, g) постоянной ненулевой кривизны C компоненты $\theta_{i_1 \dots i_p}$ замкнутого конформно-киллингова тензора θ ранга p ($1 \leq p \leq n-1$) находятся из уравнений

$$\theta_{i_1 i_2 \dots i_p} = -\frac{1}{pC} \nabla_{i_1} \omega_{i_2 \dots i_p}, \quad (2.7)$$

где $\nabla_{i_1} \omega_{i_2 \dots i_p} = \partial_{i_1} \omega_{i_2 \dots i_p} - \omega_{k \dots i_p} \Gamma_{i_2 i_1}^k - \dots - \omega_{i_2 \dots k} \Gamma_{i_p i_1}^k$ – выражение ковариантной производной $\nabla \omega$ тензора Киллинга–Яно ω ранга $p-1$. Поскольку в используемой выше локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$

$$\omega_{i_2 \dots i_p} = e^{p\psi} (A_{ki_2 \dots i_p} x^k + B_{i_2 \dots i_p}),$$

а символы Кристоффеля Γ_{ij}^k находятся из равенств (2.6), то уравнениям (2.7) можно придать вид равенств (1.2).

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА

3.1. Специальными уравнениями Максвелла релятивистской электродинамики называются уравнения вида ([8], [11], [12])

$$\nabla_i F_{jk} = \frac{4\pi}{3} (J_j g_{ik} - J_k g_{ij}), \quad (3.1)$$

где F_{jk} – компоненты тензора электромагнитного поля, J_j – компоненты 4-вектора тока J для $i, j, k, l, \dots = 0, 1, 2, 3$.

Из уравнений (3.1), в частности, автоматически следуют уравнения Максвелла при наличии заряда $\nabla^k F_{kj} = 4\pi J_j$.

В плоском пространстве-времени с лоренцевой системой координат x^0, x^1, x^2, x^3 интегралы уравнений Максвелла (3.1) имеют вид [12]

$$F_{jk} = \frac{4\pi}{3}(C_j x_k - C_k x_j + C_{jk})$$

для $J = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$ и произвольных постоянных C_k и $C_{jk} = -C_{kj}$. При этом векторы напряженности электрического и магнитного полей E и H подчиняются следующим условиям:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \{-C_1, -C_2, -C_3\}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \{0, 0, 0\},$$

где $x^0 = t$.

В статье [12], в частности, было доказано, что в пространстве-времени де Ситтера, которое является пространством постоянной кривизны $C = \varepsilon/r^2$, где $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от рода пространства, уравнения (3.1) вполне интегрируемы и тензор F электромагнитного поля имеет вид

$$F_{jk} = \frac{4\pi\varepsilon}{3r^2} \nabla_j J_k. \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.2) получаем, во-первых, что тензор F является замкнутым конформно-киллинговым тензором ранга 2 и, во-вторых, что 4-вектор тока J – вектор Киллинга. В результате с помощью найденных выше в явном виде векторов Киллинга и тензоров Киллинга–Яно можно выписать интегралы специальных уравнений Максвелла (3.1) в пространствах-временах де Ситтера в виде

$$F_{jk} = \frac{4\pi\varepsilon}{3r^2} e^{2\psi} [\psi_j (A_{kl} x^l + B_k) - \psi_k (A_{jl} x^l + B_j) + A_{kj}],$$

где $J_j = e^{2\psi} (A_{jk} x^k + B_j)$, $\psi = \ln |\det g|/10$ и $\psi_j = \partial_j \psi$. При этом следует отметить, что дуальный электромагнитный тензор $*F$ является в этом случае тензором Киллинга–Яно.

3.2. Уравнением Дирака в четырехмерном псевдоримановом многообразии (M, g) называется уравнение вида [13]

$$D\Psi := \gamma^k P_k \Psi = m\Psi, \quad (3.3)$$

где D – оператор Дирака, m – постоянная, $P_k = i(\nabla_k + \Gamma_k)$ и Γ_k – спинорная связность, на которую наложены условия $[P_k, \gamma_i] = 0$ и $\text{Sp}(\Gamma_i) = 0$. Участвующие здесь матрицы Дирака определяются как произвольное, но фиксированное решение системы $\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2g^{ij} id_{TM}$.

Для изучения алгебры уравнения Дирака необходимы операторы симметрии L , которые по определению коммутируют с оператором Дирака, т.е. $[D, L] = 0$. Общий вид таких операторов для уравнения Дирака (3.3) был указан в работах [13], [14]. Было установлено, что произвольный оператор симметрии L уравнения Дирака (3.3) есть линейная комбинация следующих независимых операторов:

$$L_1 = id_{TM} \xi^k P_k - \frac{i}{4} \gamma^{kl} \nabla_l \xi_k, \quad (3.4)$$

$$L_2 = (*\gamma_j) \omega^{kj} P_k + \frac{i}{3} \gamma_j \nabla_k (*\omega^{kj}), \quad (3.5)$$

$$L_3 = 2(*\gamma) \gamma^{lk} \theta_k P_l + \frac{3i}{4} \gamma \nabla_k \theta^k, \quad (3.6)$$

где $\gamma^{kl} = [\gamma^k, \gamma^l]/2$, $*\gamma = -\eta_{ijkl}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l/4!$, $*\gamma_i = -\eta_{ijkl}\gamma^j\gamma^k\gamma^l/3!$ и, наконец, $*\omega_{ij} = \eta_{ijkl}\omega^{kl}/2$.

Векторное поле ξ в операторе L_1 является вектором Киллинга; тензорное поле ω в операторе L_2 является тензором Киллинга–Яно и, наконец, векторное поле θ в операторе L_3 является специальным конциркулярным вектором или, по другой терминологии, вектором Яно ([13], [14]).

С помощью найденных выше в явном виде векторов Киллинга и тензоров Киллинга–Яно можно построить операторы симметрии L и изучить структуру алгебры симметрии уравнения Дирака в псевдоримановом многообразии постоянной кривизны. В плоском пространстве эта задача решена и доказано, что алгебра всех симметрий уравнений Дирака исчерпывается обертывающей алгеброй симметрии первого порядка [15].

Благодарности. Автор выражает благодарность В. В. Клишевичу, общение с которым побудило написать эту статью. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00-01-00553).

Список литературы

- [1] Дж. Синг. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
- [2] Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [3] А. В. Аминова. Группы преобразований римановых многообразий. В сб.: Итоги науки и тех. Проблемы геометрии. Т. 22. Ред. Н. М. Остиану. М.: ВИНТИ, 1990. С. 97–165.
- [4] Н. Г. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [5] Д. Крамер и др. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
- [6] W. Dietz, R. Rudiger. Proc. Roy. Soc. London. Math. Phys. Sci. A. 1982. V. 381. № 1781. P. 315–322; D. Baleanu, S. Codoban. Rom. J. Phys. 1999. V. 44. № 9–10. P. 933–938; В. В. Клишевич, В. А. Тюменцев. Вестн. Омского ун-та. 2000. № 3. С. 20–21.
- [7] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.
- [8] S. E. Stepanov. J. Geom. Phys. 2000. V. 33. P. 191–209.
- [9] А. Бессе. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
- [10] S.-I. Tachibana. Tohoku Math. J. 1969. V. 21. P. 56–64; M. Kora. Math. J. Okayama Univ. 1980. V. 22. P. 195–204.
- [11] S. E. Stepanov. Tensor N. S. 1997. V. 58. P. 233–242.
- [12] С. Е. Степанов. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 32–43.
- [13] В. Н. Шаповалов. Изв. вузов. Физика. 1975. № 6. С. 57–63.
- [14] B. Carter, R. G. McLenaghan. Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 1093–1115; R. C. McLenaghan, Ph. Spidel. Phys. Rev. D. 1979. V. 20. P. 409–422.
- [15] В. В. Клишевич, В. А. Тюменцев. Изв. вузов. Физика. 2001. № 8. С. 52–58.

Поступила в редакцию 27.II.2002 г.,
после доработки 3.IV.2002 г.