Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Фейгин, Сплетающие соотношения для сферических частей обобщенных операторов Калоджеро, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 1, 55–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:36:01

© 2003 г.

М. В. Фейгин*

СПЛЕТАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТЕЙ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ КАЛОДЖЕРО

Построены операторы сдвига и сплетающие операторы для сферических частей операторов Калоджеро, связанных с классическими системами Кокстера.

Ключевые слова: система Калоджеро, сплетающее соотношение на сфере, операторы Данк-ла.

1. ВВЕДЕНИЕ

Система Калоджеро [1] описывает попарное взаимодействие n частиц на прямой с потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния между частицами; гамильтониан системы имеет вид

$$L_m = -\Delta + \sum_{i < j}^n \frac{2m(m+1)}{(x_i - x_j)^2}.$$

Здесь $m \in \mathbb{R}$ является параметром, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$. Интегрируемое обобщение, связанное с произвольной системой Кокстера $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, было введено Ольшанецким и Переломовым [2]. Оператор, соответствующий системе $\mathcal{R}$, имеет вид

$$L_m = -\Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2}, \quad (1)$$

где $\mathcal{R}_+$ — положительная подсистема в системе векторов $\mathcal{R}$, а m_α — функция зеркал $\{(\alpha, x) = 0\}$, инвариантная относительно действия соответствующей группы. Частично результаты по интегрируемости систем (1) были получены Ольшанецким и Переломовым [3]; доказательство интегрируемости для кристаллографических групп было найдено Хекманом и Опдамом в серии работ [4]. В 1991 г. Хекман [5] доказал интегрируемость произвольной системы (1) и предложил элементарное построение коммутирующих операторов, а также операторов сдвига, существование которых в тригонометрическом случае было доказано Опдамом [6].

* Финансовая академия при Правительстве РФ, Москва, Россия. E-mail: mfeigin@dnmtm.ru

Операторы сдвига – это такие дифференциальные операторы $D_{m,S}$, что выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \left(-\Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} \right) \circ D_{m,S} = \\ = D_{m,S} \circ \left(-\Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{(m_\alpha - \delta_\alpha^S)(m_\alpha + 1 - \delta_\alpha^S)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} \right), \end{aligned}$$

где S является орбитой действия группы Кокстера на множестве корней $\mathcal{R}$; $\delta_\alpha^S = 1$ при $\alpha \in S$ и $\delta_\alpha^S = 0$ в противном случае. Для нас важность операторов сдвига заключается в том, что при целых m_α их композиция задает оператор D , удовлетворяющий сплетающему соотношению

$$L_m \circ D = D \circ L_0, \quad (2)$$

где $L_0 = -\Delta$. В свою очередь, знание сплетающего оператора D позволяет, в частности, находить решения $\tilde{\varphi}$ уравнения $L_m \tilde{\varphi} = \lambda \tilde{\varphi}$, зная решения уравнения $L_0 \varphi = \lambda \varphi$, а именно

$$\tilde{\varphi} = D\varphi.$$

Конструкция Хекмана [5] изящно использует операторы Данкла [7], дифференциально-разностные операторы, связанные с системой Кокстера $\mathcal{R}$. Операторы сдвига являются дифференциальными операторами, получающимися как ограничения специальных комбинаций операторов Данкла на пространство многочленов, инвариантных относительно действия группы Кокстера.

В данной работе рассматриваются сферические части $\mathcal{L}_m$ операторов Ольшанецко–Переломова (1). Строятся операторы сдвига и сплетающие операторы D , удовлетворяющие соотношению

$$\mathcal{L}_m \circ D = D \circ \mathcal{L}_0, \quad (3)$$

где $\mathcal{L}_0$ – оператор Лапласа–Бельтрамина на сфере, а $\mathcal{L}_m$ – сферические части обобщенных операторов Калоджеро L_m , связанных с классическими группами Кокстера при целых значениях параметров.

Основная идея заключается в построении специального сферического оператора D , удовлетворяющего сплетающему соотношению (2) в $\mathbb{R}^n$, который может быть получен в стиле работы Хекмана [5]. Этот же оператор удовлетворяет искомому соотношению (3).

В разделе 2 сферическая задача о сплетающем операторе сводится к задаче в $\mathbb{R}^n$, а также упоминается подход Хекмана и техника операторов Данкла. В разделе 3 непосредственно строятся операторы сдвига и сплетающие операторы (2), (3).

2. СПЛЕТАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ОПЕРАТОРЫ ДАНКЛА

Рассмотрим потенциал

$$u(x) = \sum_{\alpha \in A} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2}, \quad (4)$$

соответствующий произвольной системе векторов $A \subset \mathbb{R}^n$ и кратностей m_α , а также его ограничение $u(\varphi)$ на единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$:

$$u(\varphi) = u(x)|_{S^{n-1}}. \quad (5)$$

Здесь и далее обозначим через $\mathcal{L}_0$ оператор Лапласа–Бельтрами на сфере S^{n-1} . Сплетающие соотношения для операторов с потенциалами $u(\varphi)$, $u(x)$ подчиняются следующему простому, но важному для дальнейшего предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть для потенциала $u(\varphi)$ существует сплетающий оператор $D = D(\varphi)$ на сфере такой, что

$$(\mathcal{L}_0 - u(\varphi))D = D\mathcal{L}_0. \quad (6)$$

Тогда $u(x) = u(\varphi)/r^2$ также удовлетворяет сплетающему соотношению

$$(\Delta - u(x))D = D\Delta. \quad (7)$$

Обратно, если оператор $\Delta - u(x)$ удовлетворяет сплетающему соотношению (7), где $u(x) = u(\varphi)/r^2$, а оператор D зависит только от угловых координат, то оператор $\mathcal{L}_0 - u(\varphi)$ удовлетворяет сплетающему соотношению (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти очевидно. Достаточно вспомнить связь между оператором Лапласа в $\mathbb{R}^n$ и оператором Лапласа–Бельтрами на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\mathcal{L}_0 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \partial_r^2.$$

Так как члены $((n-1)/r)\partial_r + \partial_r^2$ коммутируют с $D = D(\varphi)$, соотношения (6) и (7) эквивалентны.

В дальнейшем мы будем работать в $\mathbb{R}^n$ и строить сферические операторы D , удовлетворяющие соотношению (7) для потенциалов $u(x)$, отвечающих группам Кокстера. В силу только что доказанного предложения соответствующие потенциалы $u(\varphi)$ будут допускать сплетающие соотношения на сфере с тем же сплетающим оператором D .

Сплетающие операторы в $\mathbb{R}^n$, зависящие от радиальной координаты, были построены Хекманом с помощью операторов Данкла. Мы воспользуемся идеей Хекмана для построения сферических сплетающих операторов в $\mathbb{R}^n$. Перейдем к описанию операторов Данкла [7] и конструкции Хекмана [5].

Рассмотрим систему Кокстера $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, состоящую из векторов α , и набор кратностей $m_\alpha = m(\alpha) \in \mathbb{R}$, инвариантный относительно действия соответствующей группы Кокстера W . Оператор Данкла, соответствующий направлению $\xi \in \mathbb{R}^n$, имеет вид

$$\nabla_\xi^{\mathcal{R},m} = \nabla_\xi = \partial_\xi - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(\alpha, \xi)}{(\alpha, x)} s_\alpha, \quad (8)$$

где s_α – отражение, соответствующее корню α . Замечательным свойством операторов Данкла является их коммутативность:

$$\nabla_\xi \nabla_\eta = \nabla_\eta \nabla_\xi \quad (9)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Хекман рассматривал специальные алгебраические комбинации D операторов Данкла, удовлетворяющие следующему условию. Оператор D переводит пространство инвариантов $\mathcal{F}^W$ в пространство антиинвариантов $\mathcal{G}^W$:

$$D: \mathcal{F}^W \rightarrow \mathcal{G}^W, \quad (10)$$

т.е. для всех $f(x) \in \mathcal{F}^W$, $g(x) \in \mathcal{G}^W$ и $\alpha \in \mathcal{R}$ выполняются соотношения $s_\alpha(f(x)) = f(x)$, $s_\alpha(g(x)) = -g(x)$. Оператором сдвига является дифференциальный оператор D^{Res} , получаемый ограничением дифференциально-разностного оператора D на пространство инвариантов $\mathcal{F}^W$. Формально для получения оператора D^{Res} достаточно представить оператор D в форме

$$D = \sum_{w \in W} D_w \circ w, \quad (11)$$

где D_w – дифференциальные операторы. Тогда

$$D^{\text{Res}} = \sum_{w \in W} D_w.$$

Чтобы перейти к форме (11), в D нужно переставить операторы отражения вправо, воспользовавшись правилами

$$\begin{aligned} s_\alpha \circ \partial_\xi &= \partial_{s_\alpha(\xi)} \circ s_\alpha, \\ s_\alpha \circ f &= s_\alpha(f) \circ s_\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что для оператора D , являющегося алгебраической комбинацией операторов Данкла, из (9) немедленно следует

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \circ D = D \circ \sum_{i=1}^n \nabla_i^2, \quad (12)$$

где ∇_i – оператор Данкла (8), соответствующий направлению $\xi = e_i$.

ТЕОРЕМА 1 (ср. [5]). Пусть оператор D , порожденный функциями от x , дифференцированиями по x и отражениями $s_\alpha, \alpha \in \mathcal{R}$, удовлетворяет условиям (10), (12). Тогда дифференциальный оператор D^{Res} является оператором сдвига, т.е.

$$\begin{aligned} \left(-\Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} \right) \circ D^{\text{Res}} &= \\ &= D^{\text{Res}} \circ \left(-\Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{(m_\alpha - 1)m_\alpha(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что

$$\left(\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \right) : \mathcal{F}^W \rightarrow \mathcal{F}^W.$$

Чтобы проверить это, воспользуемся тождеством, установленным Данклом [7]:

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 = \Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} s_\alpha - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha^2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2}. \quad (14)$$

Взяв теперь произвольную функцию $f \in \mathcal{F}^W$, получаем

$$\begin{aligned} s_\alpha \left(\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 f \right) &= s_\alpha \left(\Delta f + \sum_{\beta \in \mathcal{R}_+} \frac{(m_\beta - m_\beta^2)(\beta, \beta)}{(\beta, x)^2} f \right) = \\ &= \Delta f + \sum_{\beta \in \mathcal{R}_+} \frac{(m_\beta - m_\beta^2)(\beta, \beta)}{(\beta, s_\alpha x)^2} f = \left(\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \right) f \end{aligned}$$

ввиду W -инвариантности функции $m_\beta = m(\beta)$. Чтобы доказать теорему, рассмотрим ограничение тождества (12) на пространство $\mathcal{F}^W$. Получаем

$$\left(\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \right) \Big|_{\mathcal{G}} \circ D^{\text{Res}} = D^{\text{Res}} \circ \left(\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \right) \Big|_{\mathcal{F}}. \quad (15)$$

Из (14) очевидно следует

$$\left(\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \right) \Big|_{\mathcal{G}} = \Delta - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2}, \quad (16)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \right) \Big|_{\mathcal{F}} = \Delta - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{(m_\alpha - 1)m_\alpha(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2}. \quad (17)$$

Тем самым теорема доказана.

После того как построен оператор сдвига, построение сплетающего оператора между потенциалом с целыми кратностями и нулевым потенциалом не представляет труда. Предположим вначале, что кратности $m_\alpha = m$ постоянны, и пусть D_m является оператором сдвига для оператора Ольшанецкого–Переломова

$$L_m = -\Delta + \sum_{\alpha} \frac{m(m+1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2},$$

т.е.

$$L_m \circ D_m = D_m \circ L_{m-1}.$$

Тогда очевидно, что оператор $D = D_m \circ D_{m-1} \circ \cdots \circ D_1$ удовлетворяет сплетающему соотношению

$$L_m \circ D = D \circ (-\Delta).$$

В случае наличия различных кратностей m_α композиция операторов сдвига является сплетающим оператором с потенциалом, соответствующим подсистеме исходной системы Кокстера. Сплетающий оператор с нулевым потенциалом получается композицией оператора, сплетающего с подсистемой, и сплетающего оператора для подсистемы.

Мы готовы к построению сферических сплетающих операторов. Свяжем с произвольной двумерной плоскостью $\pi \subset \mathbb{R}^n$, порожденной векторами $u, v \in \mathbb{R}^n$, оператор

$$\nabla_\pi = (x, u) \nabla_v - (x, v) \nabla_u. \quad (18)$$

ЛЕММА 1 (ср. [8]). Оператор (18) удовлетворяет условию коммутативности

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i^2 \circ \nabla_\pi = \nabla_\pi \circ \sum_{i=1}^n \nabla_i^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношением (14) и посчитаем коммутатор

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \nabla_i^2, (x, u) \right] &= \left[\Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} s_\alpha, (x, u) \right] = \\ &= 2\partial_u + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{m_\alpha(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} [s_\alpha, (x, u)]. \end{aligned}$$

Так как

$$s_\alpha(x, u) - (x, u)s_\alpha = \left(\left(x - \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)} \alpha, u \right) - (x, u) \right) s_\alpha = -\frac{2(\alpha, x)(\alpha, u)}{(\alpha, \alpha)} s_\alpha,$$

получаем

$$\left[\sum_{i=1}^n \nabla_i^2, (x, u) \right] = 2 \nabla_u.$$

Тем самым вследствие коммутативности (9) операторов Дункла

$$\left[\sum_{i=1}^n \nabla_i^2, (x, u) \nabla_v - (x, v) \nabla_u \right] = 0,$$

и лемма доказана.

Лемма 1 позволяет искать сферический оператор сдвига как ограничение D^{Res} на пространство инвариантов $\mathcal{F}^W$ подходящей алгебраической комбинации $D \nabla_\pi$ -операторов. Действительно, оператор ∇_π имеет вид

$$\nabla_\pi = c\partial_\varphi + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} f_\alpha s_\alpha,$$

где ∂_φ – оператор дифференцирования по угловой координате в плоскости π , а функции f_α не зависят от радиальной координаты r . Следовательно, ограничение любой алгебраической комбинации $D \nabla_\pi$ -операторов будет дифференциальным оператором, не зависящим от r . Кроме того, как следует из леммы 1, D удовлетворяет условию (12) теоремы 1. Тем самым нужно подобрать такую комбинацию $D \nabla_\pi$ -операторов, чтобы выполнялось свойство (10).

3. ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ СДВИГА И СПЛЕТАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе строятся сферические операторы сдвига и сплетающие операторы для обобщенных операторов Калоджеро, связанных с системами Кокстера. Начнем с простейшей двумерной ситуации.

3.1. Группа диэдра I_N . Система $\mathcal{R}_+$ состоит из векторов $\alpha_i = (-\sin(\pi i/N), \cos(\pi i/N)) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. При нечетном N кратности $m_i = m$ для любого i , при четном N выполняется $m_{2i} = m_2$, $0 \leq i \leq N/2 - 1$ и $m_{2i+1} = m_1$ для $0 \leq i \leq N/2 - 1$. Соответствующий потенциал $u(\varphi)$ имеет вид

$$u(\varphi) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m_i(m_i+1)}{(-x_1 \sin(\pi i/N) + x_2 \cos(\pi i/N))^2} \Big|_{r=1} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m_i(m_i+1)}{\sin^2(\varphi - (\pi i/N))}.$$

В зависимости от четности N потенциал $u(\varphi)$ упрощается далее до вида

$$u(\varphi) = \begin{cases} \frac{m(m+1)N^2}{\sin^2 N\varphi}, & N - \text{нечетное}, \\ \frac{m_1(m_1+1)N^2}{4 \cos^2(N\varphi/2)} + \frac{m_2(m_2+1)N^2}{4 \sin^2(N\varphi/2)}, & N - \text{четное}. \end{cases} \quad (19)$$

Легко проверить, что оператором сдвига является оператор

$$D_m = D_{m_1, m_2} = \begin{cases} \partial_\varphi - mN \operatorname{ctg} N\varphi, & N - \text{нечетное}, \\ \partial_\varphi - \frac{m_2 N}{2} \operatorname{ctg} \frac{N\varphi}{2} + \frac{m_1 N}{2} \operatorname{tg} \frac{N\varphi}{2}, & N - \text{четное}. \end{cases} \quad (20)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Выполняются сплетающие соотношения*

$$\begin{aligned} & \left(-\partial_\varphi^2 + \frac{m(m+1)N^2}{\sin^2 N\varphi} \right) \left(\partial_\varphi - mN \operatorname{ctg} N\varphi \right) = \\ & = \left(\partial_\varphi - mN \operatorname{ctg} N\varphi \right) \left(-\partial_\varphi^2 + \frac{m(m-1)N^2}{\sin^2 N\varphi} \right), \\ & \left(-\partial_\varphi^2 + \frac{m_1(m_1+1)N^2}{4 \cos^2(N\varphi/2)} + \frac{m_2(m_2+1)N^2}{4 \sin^2(N\varphi/2)} \right) \left(\partial_\varphi - \frac{m_2 N}{2} \operatorname{ctg} \frac{N\varphi}{2} + \frac{m_1 N}{2} \operatorname{tg} \frac{N\varphi}{2} \right) = \\ & = \left(\partial_\varphi - \frac{m_2 N}{2} \operatorname{ctg} \frac{N\varphi}{2} + \frac{m_1 N}{2} \operatorname{tg} \frac{N\varphi}{2} \right) \times \\ & \times \left(-\partial_\varphi^2 + \frac{m_1(m_1-1)N^2}{4 \cos^2(N\varphi/2)} + \frac{m_2(m_2-1)N^2}{4 \sin^2(N\varphi/2)} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, теорема 1 показывает, что в качестве оператора сдвига можно взять оператор $\nabla_{\pi, m}^{\text{Res}}$, где

$$\nabla_{\pi, m} = x_1 \nabla_2^{I_N, m} - x_2 \nabla_1^{I_N, m}. \quad (21)$$

Действительно, проверим свойство (10) для оператора $\nabla_{\pi,m}$. Пусть $w \in I_N$, $w(e_1) = ae_1 + be_2$, $w(e_2) = ce_1 + de_2$. Тогда

$$\begin{aligned} w\nabla_{\pi,m} &= w(x_1\nabla_2 - x_2\nabla_1) = (ax_1 + bx_2)(c\nabla_1 + d\nabla_2)w - \\ &\quad - (cx_1 + dx_2)(a\nabla_1 + b\nabla_2)w = (ad - bc)\nabla_{\pi,m}w = \text{sgn}(w)\nabla_{\pi,m}w. \end{aligned}$$

Следовательно, если $f \in \mathcal{F}^{I_N}$, то

$$w(\nabla_{\pi,m}f) = \text{sgn}(w)\nabla_{\pi,m}wf = \text{sgn}(w)\nabla_{\pi,m}f,$$

т.е. $\nabla_{\pi,m}f \in \mathcal{G}^{I_N}$. Покажем, что в действительности операторы сдвига $\nabla_{\pi,m}^{\text{Res}}$ и (20) совпадают. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= \partial_1 - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m_i(-\sin(\pi i/N))}{-x_1 \sin(\pi i/N) + x_2 \cos(\pi i/N)} s_{\alpha_i}, \\ \nabla_2 &= \partial_2 - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m_i \cos(\pi i/N)}{-x_1 \sin(\pi i/N) + x_2 \cos(\pi i/N)} s_{\alpha_i}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} (x_1\nabla_2 - x_2\nabla_1)^{\text{Res}} &= \partial_\varphi - \sum_{i=0}^{N-1} m_i \frac{\cos \varphi \cos(\pi i/N) + \sin \varphi \sin(\pi i/N)}{-\cos \varphi \sin(\pi i/N) + \sin \varphi \cos(\pi i/N)} = \\ &= \partial_\varphi - \sum_{i=0}^{N-1} m_i \text{ctg} \left(\varphi - \frac{\pi i}{N} \right), \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (20).

При целых кратностях m композицией операторов $D_m = D_{m_1,m_2}$ (20) получаем оператор, сплетающий исходный потенциал с нулевым. Если N нечетно или $m_1 = m_2$, положим

$$D = D_{m_1,m_2} \circ D_{m_1-1,m_2-1} \circ \cdots \circ D_{1,1}. \quad (22)$$

Если N четно и $m_1 > m_2$, положим

$$D = D_{m_1,m_2} \circ D_{m_1-1,m_2-1} \circ \cdots \circ D_{m_1-m_2,0} \circ D_{m_1-m_2-1,0} \circ \cdots \circ D_{1,0}. \quad (23)$$

Если N четно и $m_1 < m_2$, положим

$$D = D_{m_1,m_2} \circ D_{m_1-1,m_2-1} \circ \cdots \circ D_{0,m_2-m_1} \circ D_{0,m_2-m_1-1} \circ \cdots \circ D_{0,1}. \quad (24)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для оператора D , определенного формулами (22)–(24), выполняется

$$(-\partial_\varphi^2 + u(\varphi)) \circ D = D \circ (-\partial_\varphi^2),$$

где $u(\varphi)$ определено формулой (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m_1 = m_2$ в силу предложения 2 оператор

$$D_{m_1, m_2} \circ D_{m_1-1, m_2-1} \circ \cdots \circ D_{1, m_1-m_2+1}$$

сплетает исходный потенциал с нулевым. Если $m_1 < m_2$, то этот оператор сплетает исходный потенциал с потенциалом, соответствующим диэдральной подсистеме $I_{N/2}$ в I_N , состоящей из векторов $(-\sin(2\pi i/N), \cos(2\pi i/N))$, $0 \leq i \leq N/2 - 1$, $m_i = m_2 - m_1$. Остается заметить, что операторы D_{0, m_2-m_1-j} являются операторами сдвига для подсистемы $I_{N/2}$ ввиду формул (19), (20) и предложения 2. Случай $m_1 > m_2$ разбирается аналогично.

3.2. Система A_n . Система A_n состоит из гиперплоскостей $x_i = x_j$, $1 \leq i < j \leq n+1$, кратности $m_\alpha = m$ для любого α . Соответствующий потенциал имеет вид

$$u_m(x) = 2m(m+1) \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}. \quad (25)$$

Определим оператор $D_{A_n, m}$ формулой

$$D_{A_n, m} = D_m = \sum_{w \in S_{n+1}} \text{sgn}(w) \times \\ \times w \left(\prod_{1 < i < j \leq n+1} ((x_1 - x_i)(\nabla_1^{A_n, m} - \nabla_j^{A_n, m}) - (x_1 - x_j)(\nabla_1^{A_n, m} - \nabla_i^{A_n, m})) \right), \quad (26)$$

где S_{n+1} — группа перестановок, а произведение предполагает выбор какого-либо порядка сомножителей. Антисимметрия и, следовательно, свойство (10) для оператора (26) очевидны. Убедимся, что оператор D_m не равен нулю. Для этого проведем преобразование

$$\begin{aligned} \prod_{1 < i < j \leq n+1} ((x_1 - x_i)(\nabla_1 - \nabla_j) - (x_1 - x_j)(\nabla_1 - \nabla_i)) &= \\ &= \prod_{1 < i < j \leq n+1} (-x_1 \nabla_j + x_1 \nabla_i - x_i \nabla_1 + x_j \nabla_1 + x_i \nabla_j - x_j \nabla_i) = \\ &= \left(\prod_{1 < i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \right) \partial_1^{n(n-1)/2} + (\text{младшие члены по } \partial_1), \end{aligned}$$

причем младшие члены не содержат дифференцирований вида $\partial_i^{n(n-1)/2}$ (при $n \geq 3$). Ввиду антисимметрии $\prod_{1 < i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$ под действием перестановок, сохраняющих ∂_1 , очевидно, что старший символ (26) отличен от нуля. Из теоремы 1 и предложения 1 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 2. Дифференциальная часть D_m^{Res} оператора (26) является оператором сдвига на сфере для системы A_n :

$$(-\mathcal{L}_0 + u_m(x)|_{S^{n-1}})D_m^{\text{Res}} = D_m^{\text{Res}}(-\mathcal{L}_0 + u_{m-1}(x)|_{S^{n-1}}),$$

где $\mathcal{L}_0$ – оператор Лапласа–Бельтрами на $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} , лежащей в пространстве $\{x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}$, а потенциал $u_m(x)$ задается формулой (25). При $m \in \mathbb{Z}_+$ оператор $D = D_m^{\text{Res}} \circ D_{m-1}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_1^{\text{Res}}$ удовлетворяет соотношению

$$(-\mathcal{L}_0 + u_m(x)|_{S^{n-1}})D = D(-\mathcal{L}_0).$$

3.3. Система D_n . Гиперплоскости отражений для этой системы имеют вид $x_i \pm x_j = 0$, $1 \leq i < j \leq n$, кратности $m_\alpha = m$ для любого α ; потенциал определяется формулой

$$u_m(x) = 2m(m+1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{1}{(x_i + x_j)^2} \right). \quad (27)$$

Определим оператор $D_{D_n, m}$ следующим образом:

$$D_{D_n, m} = D_m = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) w \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \nabla_j^{D_n, m} - x_j \nabla_i^{D_n, m}) \right). \quad (28)$$

Здесь альтернирование ведется по группе W , порожденной отражениями относительно гиперплоскостей $x_i \pm x_j = 0$; порядок сомножителей в произведении произволен, а $\text{sgn}(w) = 1$, если w представляется как произведение четного числа отражений, и $\text{sgn}(w) = -1$ в противном случае. Символ оператора D_m порядка $n(n-1)/2$ получается альтернированием старшего символа в $\prod_{i < j} (x_i \partial_j - x_j \partial_i)$. Так как старший символ последнего произведения антисимметричен относительно W , старший символ D_m также пропорционален этому произведению, тем самым $D_m \neq 0$. Из теоремы 1 и предложения 1 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 3. Дифференциальная часть D_m^{Res} оператора (28) является оператором сдвига на сфере для системы D_n :

$$(-\mathcal{L}_0 + u_m(x)|_{S^{n-1}})D_m^{\text{Res}} = D_m^{\text{Res}}(-\mathcal{L}_0 + u_{m-1}(x)|_{S^{n-1}}),$$

где $\mathcal{L}_0$ – оператор Лапласа–Бельтрами на $(n-1)$ -мерной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, а $u_m(x)$ задается формулой (27). При $m \in \mathbb{Z}_+$ оператор $D = D_m^{\text{Res}} \circ D_{m-1}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_1^{\text{Res}}$ удовлетворяет соотношению

$$(-\mathcal{L}_0 + u_m(x)|_{S^{n-1}})D = D(-\mathcal{L}_0).$$

3.4. Система B_n . Гиперплоскости отражений для этой системы имеют вид $x_i = 0$, $x_i \pm x_j = 0$, $1 \leq i < j \leq n$. Кратности $m_{e_i \pm e_j} = m_1$, $m_{e_i} = m_2$; потенциал задается формулой

$$u_{m_1, m_2}(x) = 2m_1(m_1 + 1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{(x_i + x_j)^2} + \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{m_2(m_2 + 1)}{x_i^2}. \quad (29)$$

Определим оператор $D_{B_n, m}$:

$$D_{B_n, m_1, m_2} = D_{m_1, m_2} = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) w \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \nabla_j^{B_n, m} - x_j \nabla_i^{B_n, m}) \right), \quad (30)$$

где W – группа Вейля, соответствующая системе B_n , а $\text{sgn}(w)$ определяется следующим образом. Если n четно, то $\text{sgn}(w) = (-1)^{\sigma(w)}$, где $\sigma(w)$ – число отражений в разложении w в произведение отражений. Если же n нечетно, то $\text{sgn}(w) = (-1)^{\tau(w)}$, где $\tau(w)$ – число отражений относительно гиперплоскостей вида $x_i \pm x_j = 0$ в разложении w в произведение отражений. Легко видеть, что при таком выборе $\text{sgn}(w)$ старший член D_{m_1, m_2} отличен от нуля. Причем при четном n

$$D_{m_1, m_2}: \mathcal{F}^W \rightarrow \mathcal{G}^W,$$

где $\mathcal{F}^W$ – инварианты, а $\mathcal{G}^W$ – антиинварианты. Если же n нечетно, то

$$D_{m_1, m_2}: \mathcal{F}^W \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}^W,$$

где $\tilde{\mathcal{G}}^W$ таково, что для всех $g(x) \in \tilde{\mathcal{G}}^W$ выполняется

$$s_\alpha g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } \alpha = e_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ -g(x) & \text{при } \alpha = e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{cases} \quad (31)$$

Мы вновь собираемся применить теорему 1. Заметим, что ее легко обобщить на случай, когда D переводит пространство инвариантов $\mathcal{F}^W$ в пространство функций $\tilde{\mathcal{G}}^W$, удовлетворяющих условиям (31). Как следует из формул (14), (15), (17) и необходимого изменения (16), в этом случае сплетающее соотношение (13) модифицируется следующим образом:

$$(-\Delta + u_{m_1, m_2}(x)) D^{\text{Res}} = D^{\text{Res}} (-\Delta + u_{m_1-1, m_2}(x)),$$

где $u_{m_1, m_2}(x)$ – потенциал (29) системы B_n , n нечетно. Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Дифференциальная часть $D_{m_1, m_2}^{\text{Res}}$ оператора (30) является оператором сдвига на сфере для системы B_n : при $n \in 2\mathbb{Z}_+$*

$$(-\mathcal{L}_0 + u_{m_1, m_2}(x)|_{S^{n-1}})D_{m_1, m_2}^{\text{Res}} = D_{m_1, m_2}^{\text{Res}}(-\mathcal{L}_0 + u_{m_1-1, m_2-1}(x)|_{S^{n-1}}),$$

при $n \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$

$$(-\mathcal{L}_0 + u_{m_1, m_2}(x)|_{S^{n-1}})D_{m_1, m_2}^{\text{Res}} = D_{m_1, m_2}^{\text{Res}}(-\mathcal{L}_0 + u_{m_1-1, m_2}(x)|_{S^{n-1}}).$$

Теперь не составляет труда получить операторы, сплетающие потенциалы системы B_n при $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с нулевыми потенциалами. Для этого нужно рассмотреть композицию операторов сдвига $D_{m_1, m_2}^{\text{Res}}$ с подходящими m_1, m_2 . В случае нечетного n получаем сплетающее соотношение с потенциалом $\sum_{i=1}^n m_2(m_2+1)/x_i^2$, соответствующим системе A_1^n с одинаковыми кратностями $m = m_2$. Введем оператор, сплетающий потенциал $\sum_{i=1}^n m(m+1)/x_i^2$ с нулевым потенциалом (n нечетно). Положим

$$D_{A_1^n, m} = \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (x_{2i-1} \nabla_{2i}^{A_1^n, m} - x_{2i} \nabla_{2i-1}^{A_1^n, m})$$

и

$$D_{A_1^n, m}^{\text{diff}} = (D_{A_1^n, m}^{\text{Res}})^{\text{Res}} \circ (D_{A_1^n, m-1}^{\text{Res}})^{\text{Res}} \circ \dots \circ (D_{A_1^n, 1}^{\text{Res}})^{\text{Res}} \circ D_{A_1, m} \circ D_{A_1, m-1} \circ \dots \circ D_{A_1, 1}, \quad (32)$$

где $D_{A_1, j} = x_1(\partial_n - j/x_n) - x_n \partial_1$. Очевидно, что

$$\left(-\Delta + \sum_{i=1}^n \frac{m(m+1)}{x_i^2}\right) D_{A_1^n, m}^{\text{diff}} = D_{A_1^n, m}^{\text{diff}}(-\Delta),$$

и можно определить сплетающий оператор для системы B_n . При нечетном n положим

$$D = D_{m_1, m_2}^{\text{Res}} \circ D_{m_1-1, m_2}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_{1, m_2}^{\text{Res}} \circ D_{A_1^n, m_2}^{\text{diff}},$$

где D_{m_1-i, m_2} – оператор (30), а $D_{A_1^n, m_2}^{\text{diff}}$ – оператор (32). При четном n определим

$$D = \begin{cases} D_{m_1, m_2}^{\text{Res}} \circ D_{m_1-1, m_2-1}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_{0, m_2-m_1}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_{0, 1}^{\text{Res}}, & m_1 \leq m_2, \\ D_{m_1, m_2}^{\text{Res}} \circ D_{m_1-1, m_2-1}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_{m_1-m_2, 0}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_{1, 0}^{\text{Res}}, & m_1 \geq m_2. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5. *При $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ выполняется соотношение*

$$(-\mathcal{L}_0 + u_{m_1, m_2}(x)|_{S^{n-1}})D = D(-\mathcal{L}_0),$$

где $\mathcal{L}_0$ – оператор Лапласа–Бельтрами на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, а $u_{m_1, m_2}(x)$ – потенциал (29) системы B_n .

3.5. Случай произвольной группы Кокстера. Для исключительных групп Кокстера серий E , H мы затрудняемся привести формулу для оператора сдвига, как это было сделано для классических систем корней. В случае группы F_4 , соответствующей набору векторов e_i с кратностью m_1 ; $e_i \pm e_j$ с кратностью m_2 ($1 \leq i < j \leq 4$); $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4$ с кратностью m_1 , определим оператор

$$D_{F_4, m_1, m_2} = \sum_{w \in F_4} \text{sgn}(w) w \left(\prod ((x, u) \nabla_v - (x, v) \nabla_u) \right),$$

где произведение берется по различным парам векторов $u, v \in \{e_i \pm e_j \mid i, j = 1, \dots, 4\}$, $u \neq v$, а $\text{sgn}(w)$ есть четность числа отражений относительно $x_i \pm x_j = 0$, входящих в разложение w . Оператор $D_{F_4, m_1, m_2}^{\text{Res}}$ является оператором сдвига, уменьшающим кратность m_2 , и, таким образом, оператор $D_{F_4, m_1, m_2}^{\text{Res}} \circ \dots \circ D_{F_4, m_1, 1}^{\text{Res}}$ сплетает потенциал системы F_4 с потенциалом системы D_4 , реализованной плоскостями $x_i = 0$, $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0$.

Мы затрудняемся предъявить аналогичные операторы для серий E и H . Тем не менее мы приведем в этом разделе формулу оператора сдвига для произвольной системы Кокстера ранга n , вложенной в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть множество $\{\alpha \mid \alpha \in A\}$ является системой корней группы Кокстера W , $A \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, m_α — кратность вектора α . Положим

$$D_{A, m_\alpha} = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) w \prod_{\alpha \in A_+} ((\alpha, x) \nabla_{n+1}^{A, m_\alpha} - x_{n+1} \nabla_\alpha^{A, m_\alpha}), \quad (33)$$

где $\text{sgn}(w) = 1$, если w раскладывается в четное число отражений, и $\text{sgn}(w) = -1$ в противном случае. При действии на A отражением s_α вектор α переходит в $-\alpha$, остальные неподвижные векторы разбиваются на пары (β, γ) так, что $s_\alpha \beta = \pm \gamma$, $s_\alpha \gamma = \pm \beta$. Из этого следует, что оператор $D_{A, m_\alpha} \neq 0$. Теорема 1 и предложение 1 приводят к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 6. *Выполняется сплетающее соотношение*

$$\begin{aligned} & \left(-\mathcal{L}_0 + \sum_{\alpha \in A} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} \Big|_{S^n} \right) D_{A, m_\alpha}^{\text{Res}} = \\ & = D_{A, m_\alpha}^{\text{Res}} \left(-\mathcal{L}_0 + \sum_{\alpha \in A} \frac{m_\alpha(m_\alpha - 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} \Big|_{S^n} \right). \end{aligned}$$

При целых m_α , итерируя операторы сдвига $D_{A, m_\alpha}^{\text{Res}}$, получаем сплетающее соотношение с нулевым потенциалом, если число орбит W на A равно 1. В случае нескольких орбит получаем сплетающее соотношение с потенциалом, соответствующим подсистеме B в системе A . Композиции соответствующих операторов $D_{B, m_\alpha}^{\text{Res}}$ для подсистем приводят к сплетающему соотношению с оператором Бельтрами–Лапласа.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ОБСУЖДЕНИЯ

4.1. Операторы сдвига и представления группы Кокстера. Построенные в данной работе операторы сдвига получались в рамках следующей конструкции. Рассмотрим k двумерных плоскостей $\pi_1 = \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \pi_k = \langle u_k, v_k \rangle$ и оператор

$$M = \nabla_{\pi_1} \dots \nabla_{\pi_k} = \prod_{i=1}^k ((x, u_i) \nabla_{v_i} - (x, v_i) \nabla_{u_i}). \quad (34)$$

Возьмем антисимметризацию

$$\widetilde{M} = \sum_{w \in W} (-1)^{\text{sgn}(w)} w(M) \quad (35)$$

по соответствующей группе Кокстера W . Если оператор $\widetilde{M}$ отличен от нулевого, то его ограничение M^{Res} является оператором сдвига. Для проверки того, что $\widetilde{M} \neq 0$, мы отмечали, что при действии w на M получается оператор

$$(-1)^{\text{sgn}(w)} \prod_{i=1}^k \nabla_{\pi_{\sigma(i)}},$$

где σ — какая-либо перестановка индексов $1, \dots, k$. Таким образом, старший символ

$$m(x, y) = \prod_{i=1}^k ((x, u_i)(y, v_i) - (x, v_i)(y, u_i))$$

оператора M оказывался антиинвариантным и, следовательно, старший символ $\widetilde{M}$ был пропорционален старшему символу M и отличен от нуля. Иначе говоря, нам удалось найти элемент $m(x, y) \in S^k \Lambda^2 V$ в пространстве полиномов над внешним квадратом геометрического представления V группы Кокстера W , который антиинвариантен под действием группы. Коль скоро такой элемент m найден, оператор сдвига получается подстановкой в $m(x, y)$ операторов Данкла ∇_i вместо компонент y_i , последующей антисимметризацией $m(x, \nabla)$ и применением операции ограничения Res.

Было бы интересно для группы Кокстера W найти минимальную симметрическую степень k представления $\Lambda^2 V$, в которой имеются элементы, антиинвариантные под действием всех отражений $s_\alpha \in W$ либо под действием отражений, соответствующих орбите группы W на множестве корней. Как мы объяснили, наличие такого антиинварианта $m(x, y)$ влечет существование оператора сдвига, имеющего старший символ $m(x, y)$.

Отметим, что симметрическая степень $S^k \Lambda^2 V$, содержащая антиинвариантное представление, существует не всегда. Рассмотрим, например, группу икосаэдра H_3 . Она содержит инволютивный элемент $\tau = -1$, который должен действовать на антиинвариант умножением на -1 . Однако τ действует тождественно на $\Lambda^2 V$ и, следовательно, на $S^k \Lambda^2 V$. Таким образом, для группы H_3 старший символ произвольного оператора вида (34) с необходимостью обнуляется при антисимметризации и, чтобы установить нетривиальность оператора (35), необходимо рассматривать члены меньшего порядка по дифференцированиям ∂_i , что требует более кропотливой работы.

4.2. Сферические потенциалы, допускающие сплетающее соотношение.

Обсудим класс произвольных потенциалов $u(\varphi)$ на сфере S^{n-1} , для которых существует такой сплетающий оператор D , что выполняется соотношение

$$(\mathcal{L}_0 - u(\varphi))D = D\mathcal{L}_0. \quad (36)$$

В работе [9] было показано, что при достаточно естественных аналитических предположениях для коэффициентов операторов в (36) сингулярности $u(\varphi)$ коразмерности 1 образуют вполне геодезические гиперповерхности. В случае сферы при этих предположениях можно показать, что потенциал $u(\varphi)$ должен иметь вид

$$u(\varphi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} \Big|_{S^{n-1}} + g(\varphi),$$

где $\mathcal{A}$ – набор векторов в $\mathbb{R}^n$, $m_\alpha \in \mathbb{N}$, а функция $g(\varphi)$ аналитична на сфере S^{n-1} . Согласно предложению 1 потенциал

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} + \frac{g(\varphi)}{r^2}$$

удовлетворяет сплетающему соотношению в $\mathbb{R}^n$:

$$(\Delta - u(x))D = D\Delta.$$

Примеры таких потенциалов $u(x)$ известны при $g(\varphi) = 0$, соответствующие системы $\{\mathcal{A}, m_\alpha\}$ являются так называемыми локусными системами (см. [10]). Естественным продолжением настоящей работы является исследование существования и возможное построение сплетающих операторов для сферических частей произвольных локусных потенциалов, однако это требует принципиально другой техники ввиду несуществования операторов сдвига и операторов Данкла для общей локусной конфигурации.

Благодарности. Я благодарен А. П. Веселову и О. А. Чалых за полезные обсуждения, в частности за предложение формулы, выражающей сферический сплетающий оператор для группы диэдра через операторы Данкла.

Список литературы

- [1] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419–436.
- [2] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Lett. Math. Phys. 1977. V. 2. P. 7–13.
- [3] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313–404.
- [4] *G. J. Heckman, E. M. Opdam.* Compos. Math. 1987. V. 64. P. 329–352; *G. J. Heckman.* Compos. Math. 1987. V. 64. P. 353–373; *E. M. Opdam.* Compos. Math. 1988. V. 67. P. 21–49.
- [5] *G. J. Heckman.* Prog. Math. 1991. V. 101. P. 181–191.
- [6] *E. M. Opdam.* Compos. Math. 1988. V. 67. P. 191–209.
- [7] *C. F. Dunkl.* Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 311. P. 167–183.
- [8] *Yu. Berest, Yu. Molchanov.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 4324–4339; *K. Taniguchi.* Differential operators that commute with the r^{-2} -type Hamiltonian. In: Calogero–Moser–Sutherland Models. CRM Ser. Math. Phys. Eds. J. F. van Diejen, L. Vinet. Berlin: Springer, 2000. P. 451–459.
- [9] *M. B. Феџун.* ТМФ. 1999. Т. 121. № 2. С. 264–270.
- [10] *O. A. Chalykh, M. V. Feigin, A. P. Veselov.* Commun. Math. Phys. 1999. V. 206. P. 533–566.

Поступила в редакцию 3.IV.2002 г.