Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, Н. Н. Чеканова, Классификация состояний равновесия ${}^3\text{He}$, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 1, 159–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:00:29

© 2003 г. М. Ю. Ковалевский*, С. В. Пелетминский*,
Н. Н. Чеканова*

КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ^3He

На основе концепции квазисредних классифицированы равновесные состояния сверхтекучего ^3He с учетом возможности появления неоднородных структур. Установлена связь условий ненарушенной и пространственной симметрий с геликоидальным упорядочением вектора пространственной анизотропии и спиральной структурой вектора магнитной анизотропии. Показано, что множество анизотропных однородных состояний равновесия может быть классифицировано в терминах двух квантовых чисел, соответствующих проекциям спинового и орбитального моментов куперовской пары на направления анизотропии.

Ключевые слова: сверхтекучесть, ^3He , равновесие, параметр порядка, квазисредние, классификация, триплетное спаривание.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существенный прогресс квантовой физики последних десятилетий связан с открытием и исследованием явления сверхтекучести ^3He [1]. Так как ядерный спин ^3He равен $1/2$, а спин электронных оболочек равен нулю, то это конденсированное состояние представляет собой ферми-жидкость. Вследствие сильного отталкивания атомов ^3He на малых расстояниях спаривание, обусловленное дальнедействующим ван-дер-ваальсовым притяжением, приводит к образованию куперовских пар с отличным от нуля орбитальным моментом [2].

В ^3He имеется несколько устойчивых сверхтекучих фаз, ранее предсказанных теоретически. К ним относится изотропное состояние, описанное Бальяном и Вертхаммером [3] и получившее название *B*-фазы. Устойчивость анизотропного состояния, соответствующего *A*-фазе и предсказанного Андерсоном и Морелом [4], объясняется влиянием спиновых флуктуаций, стабилизирующих такое состояние сверхтекучей жидкости. При включении магнитного поля наблюдается *A*₁-фаза [5]. Другие предсказанные состояния, такие как полярная [6], а также α -, β -, δ -, ε -фазы [7] и *2D*-фаза [8], экспериментально не обнаружены. Теоретические исследования конденсации Бозе–Эйнштейна в газах [9] указывают на возможность реализации явления сверхтекучести в аэрогеле ^3He . В этом случае вероятно существование устойчивой полярной фазы [10].

*Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина

Анализ возможных фазовых состояний и классификация трансляционно-инвариантных состояний в ^3He проводились в работах [7], [11]–[14]. Эта задача решалась на основе теории Гинзбурга–Ландау или теоретико-групповыми методами. Известно, что в некоторой области изменения термодинамических параметров однородное состояние равновесия теряет устойчивость и сверхтекучая фаза переходит в неоднородное состояние. В работах [15], [16] рассмотрены неоднородные равновесные состояния в сверхтекучем ^3He . В рамках модельных выражений для свободной энергии выяснены условия устойчивости геликоидальных структур. Работы [17] уточняют границы устойчивости таких состояний на более широкой области температур. Интерес к этому вопросу повысился в связи с его тесной связью с проблемой критических скоростей в сверхтекучем ^3He . Однако классификация равновесных неоднородных состояний не проводилась.

В настоящей работе рассмотрена классификация сверхтекучих фаз ^3He с учетом возможных неоднородных равновесных состояний на основе концепции квазисредних [18]–[21]. Найдены допустимые условия пространственной симметрии и общая структура соответствующего генератора. Дано обобщение условия ненарушенной симметрии на неоднородные равновесные состояния. Установлена связь этих условий симметрии с пространственной симметрией типа холестерической жидкокристаллической спирали и магнитной спирали. Предложена физическая интерпретация дополнительных термодинамических параметров, возникших в результате обобщения условий симметрии. Показано, что при некоторых ограничениях структура параметра порядка может быть представлена в виде произведения однородной и зависящей от пространственных координат неоднородной частей. При этом задача классификации ненарушенной симметрии неоднородного равновесного состояния эффективно сводится к задаче трансляционно-инвариантного случая.

2. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ НОРМАЛЬНОЙ ФАЗЫ РАВНОВЕСНОГО ^3He

Теория многочастичных систем, описывающая равновесные свойства нормальной ферми-жидкости, основывается на статистическом операторе Гиббса

$$\hat{w} = \exp(\Omega - Y_a \hat{\gamma}_a). \quad (1)$$

Здесь $\hat{\gamma}_a$ – аддитивные интегралы движения: $\hat{\mathcal{H}}$ – гамильтониан ($a = 0$), $\hat{\mathcal{P}}$ – оператор импульса ($a = k$), $\hat{N}$ – оператор числа частиц ($a = 4$), $\hat{S}_\alpha$ – оператор спина ($a = \alpha$). Термодинамический потенциал $\Omega = V\omega(Y)$ определяется из условия нормировки $\text{Tr } \hat{w} = 1$. Набор термодинамических сил Y_a включает в себя $Y_0^{-1} = T$ – температуру, $-Y_k/Y_0 = v_k$ – скорость, $-Y_4/Y_0 = \mu_k$ – химический потенциал, $-Y_\alpha/Y_0 = h_\alpha$ – эффективное магнитное поле.

Аддитивные интегралы движения, входящие в распределение Гиббса, приводят к определенной симметрии состояния равновесия. Свойства симметрии равновесного статистического оператора (1) имеют вид

$$[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{\mathcal{H}}] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{N}] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{S}_\alpha] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{L}_k] = 0 \quad (2)$$

и отражают пространственно-временную трансляционную инвариантность и фазовую инвариантность. Условия симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространстве означают пренебрежение слабыми дипольными и спин-орбитальными взаимодействиями. Здесь $\hat{\Sigma}_\alpha$ и $\hat{L}_i$ – обобщенные операторы спинового и орбитального момента:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_\alpha &= \hat{S}_\alpha + \hat{S}_\alpha^Y, & \hat{S}_\alpha^Y &= -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Y_\beta \frac{\partial}{\partial Y_\gamma}, \\ \hat{L}_i &= \hat{\mathcal{L}}_i + \hat{\mathcal{L}}_i^Y, & \hat{\mathcal{L}}_i^Y &= -i\varepsilon_{ikl}Y_k \frac{\partial}{\partial Y_l},\end{aligned}\quad (3)$$

действующие в гильбертовом пространстве и в пространстве термодинамических параметров. На векторы Y_i (Y_α) дифференциальные операторы действуют следующим образом: $i[\hat{\mathcal{L}}_i^Y, Y_j] = \varepsilon_{ikj}Y_k$, $i[\hat{\mathcal{L}}_\alpha^Y, Y_\rho] = \varepsilon_{\alpha\beta\rho}Y_\beta$. Соответствующие средние коммутаторов с операторами момента имеют вид $\text{Tr}[\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i + \hat{\mathcal{L}}_i^Y]\hat{b}(x) = \text{Tr} \hat{w}[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{b}(x)] + \hat{\mathcal{L}}_i^Y \text{Tr} \hat{w}\hat{b}(x)$ для произвольных квазилокальных операторов $\hat{b}(x)$. В соответствии с определением (3) операторы $\hat{\Sigma}_\alpha$ и $\hat{L}_i$ удовлетворяют соотношениям

$$i[\hat{L}_i, \hat{L}_k] = -\varepsilon_{ikl}\hat{L}_l, \quad i[\hat{\Sigma}_\alpha, \hat{\Sigma}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma. \quad (4)$$

Полная группа симметрии нормального состояния равновесия ферми-жидкости имеет вид

$$G = [SO(3)]_\Sigma \times [SO(3)]_L \times [U(1)]_\varphi \times [T(3)] \times [T(1)]. \quad (5)$$

Здесь $[SO(3)]_\Sigma$, $[SO(3)]_L$ – группы симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах, $[T(3)]$, $[T(1)]$ – трансляционные группы в пространстве и времени, $[U(1)]_\varphi$ – группа фазовой симметрии. Каждый элемент группы представляет собой унитарный оператор $U \equiv \exp i\hat{G}g$ (g – действительные параметры преобразования), оставляющий инвариантным распределение Гиббса

$$U\hat{w}U^+ = \hat{w}. \quad (6)$$

Операторы $\hat{\Sigma}$, $\hat{L}$, $\hat{N}$, $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{H}}$ являются генераторами этих преобразований. Обратим внимание, что свойство инвариантности (6) имеет место для произвольных параметров преобразования, сопряженных с интегралами движения в силу соотношений симметрии (2). Кроме того, средние вида $\text{Tr}[\hat{w}, \hat{G}]\hat{b}(x)$ обращаются в нуль при произвольном квазилокальном операторе $\hat{b}(x)$ и $\hat{G} \in (\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{N}, \hat{\Sigma}_\alpha, \hat{L}_k)$. Это, в частности, справедливо для операторов $\hat{b}(x) \equiv \hat{\Delta}_a(x)$, имеющих физический смысл операторов параметра порядка и не коммутирующих с интегралами движения $\hat{G}$. Индекс a отражает тензорную размерность параметра порядка. Средние $\text{Tr} \hat{w}[\hat{G}, \hat{\Delta}_a(x)]$ линейны и однородны по операторам параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$, что, как будет видно ниже, приводит к обращению в нуль равновесных средних параметров порядка в нормальном состоянии: $\text{Tr} \hat{w}\hat{\Delta}_a(x) = 0$.

3. ВЫРОЖДЕНИЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ. КВАЗИСРЕДНИЕ

Теоретическим фундаментом статистической физики, описывающей равновесные состояния конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией, является концепция квазисредних Боголюбова [18]. Конструктивным моментом этой концепции является введение в равновесный статистический оператор бесконечно малого источника $\nu \hat{F}$, который уменьшает симметрию состояния статистического равновесия по сравнению с симметрией гамильтониана и позволяет обобщить распределение Гиббса на конденсированные среды в условиях спонтанного нарушения симметрии. Квазисреднее значение величины $a(x)$ в состоянии статистического равновесия с нарушенной симметрией определяется формулой

$$\langle \hat{a}(x) \rangle \equiv \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Tr } \hat{w}_\nu \hat{a}(x), \quad (7)$$

где

$$\hat{w}_\nu \equiv \exp(\Omega_\nu - Y_a \hat{\gamma}_a - \nu \hat{F}). \quad (8)$$

Оператор $\hat{F}$ обладает симметрией исследуемой фазы конденсированной среды и снимает вырождение состояния равновесия. В соответствии с концепцией квазисредних выбираем источник $\hat{F}$ в виде линейного функционала оператора параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$:

$$\hat{F} = \int d^3x (f_a(x, t) \hat{\Delta}_a(x) + \text{э.с.}) = \hat{F}(t). \quad (9)$$

Здесь $f_a(x, t)$ – некоторая функция координат и времени, сопряженная с оператором параметра порядка, которая задает его равновесные значения в смысле квазисредних, $\Delta_a(x, t) = \langle \hat{\Delta}_a(x) \rangle$. Структура функции $f_a(x, t)$ определяется свойствами симметрии исследуемой фазы. Последнее обстоятельство дает возможность ввести в рамках микроскопической теории дополнительные термодинамические параметры в распределение Гиббса [22].

Выбор параметра порядка в (9), так же как и выбор функции $f_a(x, t)$, связан с конкретной природой равновесных состояний вырожденных конденсированных сред. Зависимость $\Delta_a = \Delta_a(x, t)$ от координат и времени обусловлена тем, что введение источника $\hat{F}$ в общем случае нарушает инвариантность равновесного статистического оператора по отношению к трансляциям в пространстве и времени, т.е. $[\hat{w}, \hat{\vec{P}}] \neq 0$, $[\hat{w}, \hat{\mathcal{H}}] \neq 0$. Равновесный статистический оператор $\hat{w}(Y, \hat{F}(t)) \equiv \hat{w}(t)$ зависит от времени и удовлетворяет уравнению фон Неймана, вследствие чего

$$e^{-i\hat{\mathcal{H}}\tau} \hat{w}(t) e^{i\hat{\mathcal{H}}\tau} = \hat{w}(t + \tau) \quad (10)$$

(для нормальных систем оператор $\hat{w}$ не зависит от времени t). Концепция квазисредних основывается на следующих предположениях:

1) квазисреднее произвольного квазилокального оператора $\hat{a}(x)$ определяется формулой

$$\langle \hat{a}(x) \rangle = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Tr } \hat{w}_\nu \hat{a}(x) < \infty \quad (11)$$

и в общем случае зависит от структуры источника, нарушающего симметрию, что приводит к возможности введения дополнительных параметров, которые наряду с термодинамическими силами характеризуют состояние равновесия;

2) для пары квазилокальных операторов $\hat{a}(x)$ и $\hat{b}(x')$ справедлив принцип пространственного ослабления корреляций:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Tr } \hat{w}_\nu \hat{a}(x) \hat{b}(x') \xrightarrow{|x-x'| \rightarrow \infty} \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Tr } \hat{w}_\nu \hat{a}(x) \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Tr } \hat{w}_\nu \hat{b}(x'); \quad (12)$$

3) плотность термодинамического потенциала ω определяется соотношением

$$\omega = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\Omega_\nu}{V} < \infty \quad (13)$$

и может зависеть не только от термодинамических сил, но также и от некоторых дополнительных параметров.

Описание конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией в значительной степени опирается на представление о параметре порядка. Операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ на языке вторичного квантования строятся из полевых операторов рождения и уничтожения. Сформулируем коммутационные свойства операторов параметра порядка. Условие трансляционной инвариантности имеет вид

$$i[\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\Delta}_a(x)] = -\nabla_k \hat{\Delta}_a(x). \quad (14)$$

Генератором группы фазовых преобразований является оператор числа частиц $\hat{N}$. Для оператора параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ справедливо соотношение

$$[\hat{N}, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_a \hat{\Delta}_a(x). \quad (15)$$

Постоянные g_a зависят от тензорной размерности оператора параметра порядка.

При преобразованиях, связанных с группой внутренних симметрий с генераторами $\hat{S}_\alpha$ ($\alpha = x, y, z$), операторы $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуются по представлениям этой группы, что ведет к равенству

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_{\alpha ab} \hat{\Delta}_b(x) \quad (16)$$

или, в компактной записи,

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}(x)] = -\hat{g}_\alpha \hat{\Delta}(x),$$

где $(\hat{g}_\alpha)_{ab} = g_{\alpha ab}$ — некоторые постоянные. Генераторы группы внутренней симметрии $\hat{S}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma;$$

здесь антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ имеет смысл структурных постоянных. Из формул (16), используя тождество Якоби для операторов $\hat{S}_\alpha$ и $\hat{\Delta}(x)$, можно получить соотношение

$$[\hat{g}_\alpha, \hat{g}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{g}_\gamma. \quad (17)$$

При преобразованиях, связанных с группой пространственных поворотов с генераторами $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2, 3$), операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ в точке $x = 0$ преобразуются по представлениям этой группы. Поэтому справедливо равенство

$$i[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\Delta}_a(0)] = -g_{iab} \hat{\Delta}_b(0),$$

из которого (замечая, что $[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\mathcal{L}}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{\mathcal{L}}_k$) получим соотношения, аналогичные (17):

$$[\hat{g}_i, \hat{g}_j] = -\varepsilon_{ijk}\hat{g}_k. \quad (18)$$

Так как $\hat{\Delta}_a(x) = e^{-i\hat{\mathcal{P}}x}\hat{\Delta}_a(0)e^{i\hat{\mathcal{P}}x}$, $e^{-i\hat{\mathcal{P}}x}\hat{\mathcal{L}}_i e^{i\hat{\mathcal{P}}x} = \hat{\mathcal{L}}_i - \varepsilon_{ijk}x_j\hat{\mathcal{P}}_k$, то в силу (14)

$$i[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_{iab}\hat{\Delta}_b(x) - \varepsilon_{ijk}x_j\nabla_k\hat{\Delta}_a(x). \quad (19)$$

Из феноменологической теории известно, что для адекватного описания термодинамики и неравновесных процессов в конденсированных средах с нарушенной симметрией, вообще говоря, необходимо ввести в теорию новые термодинамические параметры, не связанные с законами сохранения, а обусловленные физической природой термодинамической фазы. В случае нормальных конденсированных сред термодинамические параметры определяются только плотностями аддитивных интегралов движения. Покажем, как формулируются свойства симметрии состояния равновесия вырожденных конденсированных сред и на этой основе вводятся дополнительные термодинамические параметры. Рассмотрим вначале трансляционно-инвариантные подгруппы ненарушенной симметрии H полной группы симметрии G . Трансляционная инвариантность означает, что равновесный статистический оператор удовлетворяет соотношению симметрии

$$[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k] = 0. \quad (20)$$

Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний в соответствии с [23] осуществим, исходя из соотношения

$$[\hat{w}, \hat{T}] = 0, \quad (21)$$

где генератор ненарушенной симметрии $\hat{T}$ (генератор подгруппы H) представляет собой линейную комбинацию интегралов движения (см. (3))

$$\hat{T} \equiv a_i\hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha + c\hat{N} \equiv \hat{T}(\xi) \quad (22)$$

с некоторыми действительными параметрами ($a_i, b_\alpha, c \equiv \xi$). Унитарные преобразования $U(\xi) = \exp i\hat{T}(\xi)$ образуют непрерывную подгруппу ненарушенной симметрии, $U(\xi)U(\xi') = U(\xi''(\xi, \xi'))$, равновесного состояния. Из равенств

$$i\text{Tr}[\hat{w}, \hat{T}]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \quad i\text{Tr}[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k]\hat{\Delta}_a(x) = 0,$$

учитывая алгебраические соотношения (14)–(16), (19) и определение (22), получим уравнения

$$a_i \left(g_{iab}\Delta_b + \varepsilon_{ikl}Y_k \frac{\partial \Delta_a}{\partial Y_l} \right) + b_\alpha \left(g_{\alpha ab}\Delta_b + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Y_\beta \frac{\partial \Delta_a}{\partial Y_\gamma} \right) + cig_a\Delta_a = 0, \quad \nabla_k\Delta_a = 0, \quad (23)$$

которые устанавливают определенные связи для параметров ξ . Для простоты рассмотрим случай, когда $Y_\alpha = Y_k = 0$. При этом

$$T_{ab}\Delta_b = 0, \quad T_{ab} \equiv a_i g_{iab} + b_\alpha g_{\alpha ab} + cig_a\delta_{ab}. \quad (24)$$

Условие нетривиального решения $\Delta_a \neq 0$ системы линейных уравнений (24) приводит к равенству

$$\det |T_{ab}| = 0, \quad (25)$$

которое накладывает ограничения на допустимые значения параметров генератора ненарушенной симметрии ξ . В разделах 4 и 5 будут детально проанализированы возможные состояния равновесия сверхтекучего ${}^3\text{He}$.

Рассмотрим теперь состояния равновесия, которые не обладают свойством трансляционной инвариантности (20). В сверхтекучей конденсированной среде в принципе могут существовать различные физические возможности нарушения такой инвариантности состояния равновесия. Это может произойти вследствие нарушения фазовой инвариантности (сверхтекучий импульс не равен нулю) [22]. Возможны и другие механизмы нарушения трансляционной инвариантности. К ним относятся нарушения симметрии относительно поворотов спинов (вектор магнитной спирали отличен от нуля) [20], [24], нарушения симметрии относительно поворотов в конфигурационном пространстве (вектор холестерической спирали не равен нулю). Мы изучим все указанные механизмы возникновения пространственно-неоднородных структур и увидим, к каким последствиям они приводят в равновесной структуре параметра порядка. Пространственная симметрия такого рода состояний равновесия может быть задана соотношением

$$[\hat{w}, \hat{P}_k] = 0, \quad \hat{P}_k = \hat{\mathcal{P}}_k - p_k \hat{N} - q_{k\alpha} \hat{S}_\alpha - t_{kj} \hat{\mathcal{L}}_j, \quad (26)$$

где $p_k, q_{k\alpha}, t_{kj}$ — некоторые действительные параметры. Генератор ненарушенной симметрии таких состояний теперь включает в себя оператор импульса:

$$\hat{T} = a_i \hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha \hat{S}_\alpha + c \hat{N} + d_i \hat{\mathcal{P}}_i, \quad a_i, b_\alpha, c, d_i \equiv \xi. \quad (27)$$

Соотношения

$$i \text{Tr}[\hat{w}, \hat{T}] \hat{\Delta}_a(x) = 0, \quad i \text{Tr}[\hat{w}, \hat{P}_k] \hat{\Delta}_a(x) = 0 \quad (28)$$

в соответствии с (26), (27) ведут к связям параметров, входящих в определение генераторов ненарушенной и пространственной симметрий. Эти соотношения следует дополнить еще двумя условиями для параметров ненарушенной и пространственной симметрий, которые являются следствием тождеств Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{T}, \hat{P}_k$ и $\hat{w}, \hat{P}_i, \hat{P}_k$:

$$\text{Tr}[\hat{w}, [\hat{T}, \hat{P}_k]] \hat{\Delta}_a = 0, \quad \text{Tr}[\hat{w}, [\hat{P}_i, \hat{P}_k]] \hat{\Delta}_a = 0. \quad (29)$$

Ниже на примере сверхтекучей конденсированной среды с тензорным параметром порядка будут детально проанализированы уравнения (28), (29), необходимые также для решения задачи сосуществования ненулевых значений параметров порядка, например, при исследовании многощелевой сверхпроводимости [25].

Для установления временной зависимости параметра порядка в равновесии сформулируем условие стационарности. Выпишем очевидное соотношение

$$[\hat{w}_\nu, Y_0 \hat{\mathcal{H}} + Y_i \hat{\mathcal{P}}_i + Y_4 \hat{N} + Y_\alpha \hat{S}_\alpha + \nu \hat{F}] = 0.$$

В силу канонических перестановочных соотношений оператор $[\hat{F}, \hat{a}(x)]$ является квази-локальным, а среднее квазилокального оператора предполагается конечным (см. (11)), тогда

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \nu \operatorname{Tr} \hat{w}_\nu [\hat{F}, \hat{a}(x)] = 0;$$

поэтому

$$[\hat{w}, Y_0 \hat{\mathcal{H}} + Y_i \hat{\mathcal{P}}_i + Y_4 \hat{N} + Y_\alpha \hat{S}_\alpha] = 0.$$

Учитывая свойство пространственной симметрии (26), имеем

$$[\hat{w}, \hat{H}] = 0, \quad \hat{H} = \hat{\mathcal{H}} + p_0 \hat{N} + p_{0\alpha} \hat{S}_\alpha + p_{0i} \hat{\mathcal{L}}_i. \quad (30)$$

Здесь введены обозначения

$$p_0 = (Y_4 + Y_i p_i) Y_0^{-1}, \quad p_{0\alpha} = (Y_\alpha + Y_i q_{i\alpha}) Y_0^{-1}, \quad p_{0i} = (Y_k t_{ki}) Y_0^{-1}. \quad (31)$$

Соотношение (30) называется условием стационарности. Использование формул (10) и (30) позволяет установить зависимость от времени произвольных равновесных средних.

4. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СВЕРХТЕКУЧЕГО ^3He

Параметр порядка сверхтекучей жидкости с триплетным спариванием содержит спиновый индекс $\alpha = 1, 2, 3$, соответствующий спину $s = 1$, и векторный индекс $k = 1, 2, 3$, соответствующий в силу принципа Паули орбитальному моменту количества движения $l = 1$. Кроме того, триплетный оператор параметра порядка должен быть неэрмитовым. Этот факт отражает то обстоятельство, что в рассматриваемом случае теряется симметрия относительно фазовых преобразований благодаря образованию куперовских пар. В качестве оператора $\hat{\Delta}_{\alpha k}(x)$ удобно выбрать оператор [19]

$$\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) \equiv \hat{\psi}(x) \sigma_2 \sigma_\alpha \nabla_k \hat{\psi}(x) - \nabla_k \hat{\psi}(x) \sigma_2 \sigma_\alpha \hat{\psi}(x), \quad (32)$$

где σ_α — матрицы Паули. Матрицы $(\sigma_2 \sigma_\alpha)_{\mu\nu} = (\sigma_2 \sigma_\alpha)_{\nu\mu}$ симметричны по индексам μ и ν . В соответствии с этим определением и каноническими перестановочными соотношениями для ферми-операторов видим, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_{\beta i}(x)] &= -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Delta}_{\gamma i}(x), & [\hat{N}, \hat{\Delta}_{\beta i}(x)] &= -2\hat{\Delta}_{\beta i}(x), \\ i[\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\Delta}_{\alpha i}(x)] &= -\nabla_k \hat{\Delta}_{\alpha i}(x), & i[\hat{\mathcal{L}}_k, \hat{\Delta}_{\alpha i}(x)] &= -\varepsilon_{kjl} x_j \nabla_l \hat{\Delta}_{\alpha i}(x) - \varepsilon_{kil} \hat{\Delta}_{\alpha l}(x). \end{aligned} \quad (33)$$

Следуя концепции квазисредних, равновесный статистический оператор рассматриваемой ферми-жидкости определяется равенством (8). Оператор, нарушающий симметрию состояния равновесия, представляет собой линейный функционал оператора параметра порядка

$$\hat{F} = \int d^3x (\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) f_{k\alpha}(x, t) + \text{э.с.}). \quad (34)$$

Квазисреднее значение параметра порядка является функцией термодинамических параметров и функционалом величины $f_{k\alpha}(x, t)$:

$$\Delta_{\alpha k}(x, t) = \text{Tr } \hat{w}(t) \hat{\Delta}_{\alpha k}(x) = \Delta_{\alpha k}(Y, f(x, t)). \quad (35)$$

Здесь и в дальнейшем полагаем равными нулю термодинамические силы, сопряженные с аддитивными интегралами движения $\hat{\mathcal{P}}_i, \hat{S}_\alpha$, т.е. $Y_i = 0, Y_\alpha = 0$. При этом свойства ненарушенной симметрии трансляционно-инвариантного ($[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_i] = 0$) статистического оператора Гиббса и источника $\hat{F}$ совпадают:

$$[\hat{w}, \hat{T}] = 0, \quad [\hat{F}, \hat{T}] = 0. \quad (36)$$

В силу алгебры (33) и соотношений (24) получим равенство, определяющее равновесную структуру параметра порядка:

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i} + 2ic \Delta_{\beta i} = 0. \quad (37)$$

Выясним, при каких условиях возможны ненулевые значения параметра порядка в состоянии равновесия. Рассмотрим вначале подгруппу ненарушенной симметрии, генератором которой является оператор вида $\hat{T} = a_i \hat{\mathcal{L}}_i + c \hat{N}$. Не ограничивая общности рассмотрения, полагаем $a_i^2 = 1, a_i = l_i$. Из условия симметрии (37) найдем, что $(a_i \varepsilon_{ikj} + 2ic \delta_{kj}) \Delta_{\beta j} = 0$. Ненулевое решение для параметра порядка обеспечивается обращением в нуль детерминанта:

$$\det |a_i \varepsilon_{ikj} + 2ic \delta_{kj}| = 2ic(a^2 - 4c^2) \equiv F_3(\vec{a}, c) = 2ic(1 - 4c^2) = 0. \quad (38)$$

Решения этого уравнения $c = 0, \pm 1/2$ приводят к оператору $\hat{T}$ вида [19]

$$\hat{T} \equiv l_i \hat{\mathcal{L}}_i - \frac{m_l}{2} \hat{N}, \quad m_l = 0, \pm 1. \quad (39)$$

Рассмотрим другой частный случай оператора $\hat{T}$: $\hat{T} = b_\alpha \hat{S}_\alpha + c \hat{N}$. Так же, как и в предыдущем случае, полагаем $b_\alpha^2 = 1, b_\alpha = d_\alpha$, и, фактически повторяя предыдущее рассуждение, получаем, что в этом случае $c = 0, \pm 1/2$ и, следовательно, в этом случае оператор $\hat{T}$ имеет вид [19]

$$\hat{T} \equiv d_\alpha \hat{S}_\alpha - \frac{m_s}{2} \hat{N}, \quad m_s = 0, \pm 1. \quad (40)$$

Разъясним физический смысл условий ненарушенной симметрии, генерируемых операторами (39), (40). Для этого введем “волновую функцию” куперовской пары частиц системы

$$\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \text{Tr } \hat{w} \hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2). \quad (41)$$

В силу условий ненарушенной симметрии (36)

$$\text{Tr} \left[\hat{w}, \vec{l} \hat{\mathcal{L}} - \frac{m_l}{2} \hat{N} \right] \hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) = 0, \quad \text{Tr} \left[\hat{w}, \vec{d} \hat{S} - \frac{m_s}{2} \hat{N} \right] \hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) = 0. \quad (42)$$

Так как

$$[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\psi}_\alpha(x)] = -\hat{l}_i \hat{\psi}_\alpha(x), \quad [\hat{S}_i, \hat{\psi}_\alpha(x)] = -\frac{1}{2}(\sigma_i)_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta(x),$$

то

$$\begin{aligned} \vec{l}(\vec{l}^{(1)} + \vec{l}^{(2)}) \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) &= m_l \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2), \\ \vec{d}(\hat{s}^{(1)} + \hat{s}^{(2)}) \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) &= m_s \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где $\hat{l}_i^{(a)} = -i\varepsilon_{ikl}x_k^{(a)}\nabla_l^{(a)}$, $\hat{s}_i^{(a)}$ ($a = 1, 2$) – операторы момента количества движения и спина, действующие соответственно на первый и второй аргументы “волновой функции”. Состояние статистического равновесия, для которого выполняются соотношения (42), соответствует состоянию, в котором проекция орбитального момента количества движения куперовской пары на направление $\vec{l}$ равна m_l , проекция спина куперовской пары на направление $\vec{d}$ равна m_s . Выбор оператора параметра порядка в виде вектора по спиновому и орбитальному индексам (32) соответствует тому, что спин и момент количества движения куперовской пары предполагаются равными единице. Из соотношений (42) следует, что функция $f_{\alpha k}$, входящая в источник $\hat{F}$, определяется формулой

$$f_{\alpha k} = d_\alpha(m_s)\xi_k(m_l), \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} d_\alpha^+, m_s &= -1, & \xi_k^+, m_l &= -1, \\ d_\alpha(m_s) &= d_\alpha^-, m_s = 1, & \xi_k(m_l) &= \xi_k^-, m_l = 1, \\ d_\alpha, m_s &= 0, & l_k, m_l &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь $\vec{d}^\pm = (\vec{e} \pm i\vec{f})/\sqrt{2}$, $\xi^\pm = (\vec{m} \pm i\vec{n})/\sqrt{2}$, где $\vec{m}, \vec{n}$ ($\vec{e}, \vec{f}$) – единичные вещественные взаимно ортогональные векторы, ортогональные вектору $\vec{l}$ ($\vec{d}$).

Равновесная структура параметров порядка ^3He для различных фазовых состояний может быть представлена в едином виде: $\Delta_{\alpha k} = \sum_{m_s, m_l} a_{m_s m_l} d_\alpha(m_s) \xi_k(m_l)$. Свойства симметрии состояния равновесия приводят к определенным связям амплитуд параметра порядка $a_{m_s m_l}$. Сверхтекучие состояния, генераторы ненарушенной симметрии которых имеют вид (39), (40), получили название инертных фаз [7]. В частности, для А-фазы квантовые числа куперовских пар принимают значения $m_l = \pm 1$, $m_s = 0$ [4]. Параметр порядка в равновесии имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = a_{0\mp} d_\alpha \xi_k^\mp. \quad (45)$$

Здесь и в дальнейшем принята декартова система координат, для которой векторы $\vec{d}$ и $\vec{l}$ обладают проекциями $d_\alpha = (0, 0, 1)$ и $l_k = (0, 0, 1)$. Полярной фазе ^3He отвечает состояние с квантовыми числами $m_l = 0$, $m_s = 0$ [6]. Параметр порядка в этом случае принимает форму

$$\Delta_{\alpha k} = a_{00} d_\alpha l_k. \quad (46)$$

Значения квантовых чисел $m_l = 0$, $m_s = \pm 1$ соответствуют β -фазе [7]. Для этого состояния параметр порядка

$$\Delta_{\alpha k} = a_{\mp 0} d_\alpha^\mp l_k. \quad (47)$$

Случай $m_l = \pm 1$, $m_s = \pm 1$ соответствует A_1 -фазе [5]. Параметр порядка в равновесии имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = a_{\mp\mp} d_{\alpha}^{\mp} \xi_k^{\mp}. \quad (48)$$

Равновесная структура параметров порядка ${}^3\text{He}$ (45)–(48) дает четыре анизотропных фазовых состояния, каждое из которых характеризуется одной независимой амплитудой.

Для множества возможных анизотропных состояний сверхтекучего ${}^3\text{He}$ не обязательно одновременное выполнение соотношений (42) с генераторами (39), (40). Еще четыре анизотропных состояния равновесия возникают в случаях, когда имеет место условие ненарушенной симметрии только с одним из этих генераторов. Если справедливо соотношение (21) с генератором (39), то при значении квантового числа $m_l = 0$ приходим к состоянию с параметром порядка [13]

$$\Delta_{\alpha k} = V_{\alpha 0} l_k, \quad (49)$$

где его спиновая составляющая $V_{\alpha 0} = A e_{\alpha} + B f_{\alpha} + C d_{\alpha} \equiv \sum_{m_s} a_{m_s 0} d_{\alpha}(m_s)$ представляет собой произвольный комплексный вектор. Для значения $m_l = \pm 1$ параметр порядка в соответствии с (39) имеет вид [13]

$$\Delta_{\alpha k} = V_{\alpha\mp} \xi_k^{\mp}. \quad (50)$$

Здесь $V_{\alpha\mp} = A_{\mp} e_{\alpha} + B_{\mp} f_{\alpha} + C_{\mp} d_{\alpha} \equiv \sum_{m_s} a_{m_s\mp} d_{\alpha}(m_s)$ – спиновая структура параметра порядка. Соотношение ненарушенной симметрии (21) с генератором (40) при значении $m_s = 0$ приводит к состоянию равновесия с параметром порядка [13]

$$\Delta_{\alpha k} = d_{\alpha} \Psi_{0k}, \quad (51)$$

где его пространственная часть $\Psi_{0k} = A m_k + B n_k + C l_k \equiv \sum_{m_l} a_{0m_l} \xi_k(m_l)$ – произвольный комплексный вектор. Аналогично для значения $m_s = \pm 1$ параметр порядка в равновесии имеет вид [13]

$$\Delta_{\alpha k} = d_{\alpha}^{\mp} \Psi_{\mp k}, \quad (52)$$

где $\Psi_{\mp k} = A_{\mp} m_k + B_{\mp} n_k + C_{\mp} l_k \equiv \sum_{m_l} a_{\mp m_l} \xi_k(m_l)$ – соответствующая пространственная структура параметра порядка. Представленные четыре анизотропных состояния (49)–(52) обладают меньшей ненарушенной симметрией по сравнению с состояниями (45)–(48) и поэтому содержат больший произвол в структуре параметра порядка. Каждое из этих состояний характеризуется тремя независимыми амплитудами.

Рассмотрим теперь генератор ненарушенной симметрии (22) и найдем оставшиеся анизотропные состояния. Для этого выпишем соответствующий детерминант матрицы размера 9×9

$$\det |a_i \varepsilon_{ikj} \delta_{\gamma\beta} + b_{\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{kj} + 2ic \delta_{kj} \delta_{\beta\gamma}| = F_9(\vec{a}, \vec{b}, c).$$

Не нарушая общности рассмотрения и в силу инвариантности детерминанта относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах, системы координат

выбираем так, чтобы в спинном пространстве выполнялось $\vec{b} = (0, 0, b)$ и в координатном $-\vec{a} = (0, 0, a)$. При этом вычисление детерминанта $F_9(a, b, c)$ сводится к вычислению определителей третьего и шестого порядка:

$$F_9(a, b, c) = F_3(a, c)F_6(a, b, c). \quad (53)$$

Здесь матрица $\hat{F}_6(a, b, c)$ имеет блочный вид

$$\hat{F}_6(a, b, c) = \begin{vmatrix} \hat{F}_3(a, c) & b\hat{I}_3 \\ -b\hat{I}_3 & \hat{F}_3(a, c) \end{vmatrix},$$

где $\hat{I}_3$ — единичная матрица размера 3×3 , а матрица $\hat{F}_3(a, c)$ определяется равенством (38). Учитывая явный вид матрицы (38), видим, что справедливо соотношение

$$F_6(a, b, c) = F_3\left(a, c + \frac{b}{2}\right) F_3\left(a, c - \frac{b}{2}\right). \quad (54)$$

Согласно (53), (54), получим следующее выражение для детерминанта $F_9(a, b, c)$:

$$\begin{aligned} F_9(a, b, c) &= F_3(a, c)F_3\left(a, c + \frac{b}{2}\right) F_3\left(a, c - \frac{b}{2}\right) = \\ &= 2ic(a^2 - 4c^2)(b^2 - 4c^2)[(a - b)^2 - 4c^2][(a + b)^2 - 4c^2]. \end{aligned} \quad (55)$$

Система линейных и однородных уравнений (37) имеет ненулевое решение, если определитель (55) обращается в нуль. Обращение в нуль каждого из пяти сомножителей в отдельности приводит к уже рассмотренным случаям (см. (45)–(52)). Их сочетание позволяет получить еще четыре состояния.

1. При обращении в нуль первого и четвертого или первого и пятого сомножителей условие ненарушенной симметрии (21) приобретает вид $[\hat{w}, l_i \hat{\mathcal{L}}_i \pm d_\alpha \hat{S}_\alpha] = 0$. В этом случае возникает состояние ζ -фазы [7] с параметром порядка

$$\Delta_{\alpha k} = e_\alpha(Am_k - Bn_k) + f_\alpha(Bm_k + An_k) + C d_\alpha l_k. \quad (56)$$

2. Сочетание случаев $c = \pm b/2$ и $c = \pm a/2$ описывает ε -состояние [6]. Генератор ненарушенной симметрии $\hat{T} = l_i \hat{\mathcal{L}}_i + d_\alpha \hat{S}_\alpha \mp \hat{N}/2$ приводит к параметру порядка

$$\Delta_{\alpha k} = A l_k (e_\alpha \pm i f_\alpha) + B d_\alpha (m_k \pm i n_k). \quad (57)$$

3. Решение $c = \pm a/2$ в сочетании с $c = \pm(a - b)/2$ или $c = \pm(a + b)/2$ (чередование знаков произвольно) приводит к состоянию равновесия с генератором ненарушенной симметрии $\hat{T} = l_i \hat{\mathcal{L}}_i \pm 2d_\alpha \hat{S}_\alpha \pm \hat{N}/2$ и структуре параметра порядка [12]

$$\Delta_{\alpha k} = A(m_k - i n_k)(e_\alpha - i f_\alpha) + B l_k (e_\alpha + i f_\alpha). \quad (58)$$

4. Сочетание значений $c = \pm b/2$ с $c = \pm(a + b)/2$ или $c = \pm(a - b)/2$ позволяет получить генератор ненарушенной симметрии вида $\hat{T} = \pm 2l_i \hat{\mathcal{L}}_i + d_\alpha \hat{S}_\alpha \pm \hat{N}/2$ и параметр порядка [12]

$$\Delta_{\alpha k} = A(m_k - i n_k)(e_\alpha - i f_\alpha) + B d_\alpha (m_k + i n_k). \quad (59)$$

Представленные формулы (45)–(52), (56)–(59) описывают 12 анизотропных фаз сверхтекучего ${}^3\text{He}$, соответствующих трансляционно-инвариантным состояниям.

Генератор ненарушенной симметрии	m_l	m_s	Параметр порядка	Фаза
$\hat{\mathcal{L}}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha$	—	—	$\Delta R_{\alpha i}$	B
$\hat{l}\hat{\mathcal{L}} - \frac{m_l}{2}\hat{N}$ $\hat{d}\hat{S} - \frac{m_s}{2}\hat{N}$	± 1	0	$\Delta d_\alpha(m_k \mp in_k)$	A
	0	± 1	$\Delta(e_\alpha \mp if_\alpha)l_k$	β
	± 1	± 1	$\Delta(e_\alpha \mp if_\alpha)(m_k \mp in_k)$	A_1
	0	0	$\Delta d_\alpha l_k$	Polar
$\hat{d}\hat{S} - 2m_l m_s \hat{l}\hat{\mathcal{L}} - \frac{m_s}{2}\hat{N}$	0, ± 1	0	$d_\alpha(Am_k + Bn_k + Cl_k)$	$A_1 + A$ A_2
	± 1	± 1	$A(m_k \mp in_k)(e_\alpha \mp if_\alpha) +$ $+ Bd_\alpha(m_k \mp in_k)$	
	0	± 1	$(e_\alpha \mp if_\alpha)(Am_k + Bn_k + Cl_k)$	
$\hat{l}\hat{\mathcal{L}} - 2m_s m_l \hat{d}\hat{S} - \frac{m_l}{2}\hat{N}$	0	0, ± 1	$(Ae_\alpha + Bf_\alpha + Cd_\alpha)l_k$	$A_1 + \beta$ B_2
	± 1	± 1	$A(m_k \mp in_k)(e_\alpha \mp if_\alpha) + Bl_k(e_\alpha \mp if_\alpha)$	
	$\pm$	0	$(Ae_\alpha + Bf_\alpha + Cd_\alpha)(m_k \mp in_k)$	
$\hat{l}\hat{\mathcal{L}} + \hat{d}\hat{S} - \frac{m_l+m_s}{2}\hat{N}$	0, $\pm$	0, $\mp$	$e_\alpha(Am_k + Bn_k) + f_\alpha(-Bm_k + An_k) +$ $+ Cd_\alpha l_k$	ζ
	0	$\mp$	$Al_k(e_\alpha \mp if_\alpha) + Bd_\alpha(m_k \mp in_k)$	ϵ
	$\pm$	0		
	$\pm$	$\pm$	$\Delta(e_\alpha \mp if_\alpha)(m_k \mp in_k)$	A_1

Рассмотрим теперь состояние, соответствующее изотропной сверхтекучей фазе, которое возникает в результате обращения детерминанта (55) в нуль при значениях параметров $c = 0$, $a = b$. Введем в рассмотрение ортогональную матрицу поворота, описывающую разворот пространственной системы координат относительно спиновой равенством $b_\alpha = a_i R_{i\alpha}$. Учитывая (22), получим $a_i[\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha] = 0$. Условие изотропии означает справедливость последнего соотношения для произвольных направлений вектора $\hat{d}$. Поэтому свойство симметрии состояния имеет вид [19]

$$[\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha] = 0. \quad (60)$$

Это состояние описывает B -фазу сверхтекучего ${}^3\text{He}$. Для состояний с симметрией (60) среднее значение параметра порядка выглядит как

$$\Delta_{\alpha k} = \Delta R_{k\alpha}, \quad (61)$$

где Δ — амплитуда параметра порядка.

Итоговая классификация свойств ненарушенной симметрии и соответствующих значений параметров порядка в состояниях равновесия для трансляционно-инвариантного случая ${}^3\text{He}$ представлена в таблице.

5. НЕОДНОРОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СВЕРХТЕКУЧИХ ФАЗ ${}^3\text{He}$

Так же, как и при решении вопроса о классификации однородных состояний, целесообразно вначале рассмотреть подгруппы пространственной симметрии, генераторы которых состоят из двух операторов. Пусть

$$\hat{P}_k = \hat{\mathcal{P}}_k - p_k \hat{N}. \quad (62)$$

Согласно (62) и алгебре (33) для параметра порядка получим уравнение

$$\nabla_i \Delta_{\beta k}(x) = 2ip_i \Delta_{\beta k}(x), \quad (63)$$

решение которого имеет вид

$$\Delta_{\beta k}(x) = e^{2i\varphi(\vec{x})} \underline{\Delta}_{\beta k}(0), \quad \varphi(x) = \varphi + \vec{p}\vec{x}, \quad (64)$$

где $\underline{\Delta}_{\beta k}(0)$ — однородная часть параметра порядка, которая не зависит от координат. В силу явного вида генератора ненарушенной симметрии (27) и уравнения (63) справедливы равенства

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i} + a_k \varepsilon_{kmn} x_m p_n \Delta_{\beta i}(x) + 2i\underline{c} \Delta_{\beta i} = 0,$$

где $\underline{c} = c + \vec{p}\vec{d}$. Из условия зануления линейного по координате слагаемого этого уравнения следуют соотношения, определяющие равновесную структуру параметра порядка:

$$a_k \varepsilon_{kil} \underline{\Delta}_{\beta l} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\Delta}_{\gamma i} + 2i\underline{c} \underline{\Delta}_{\beta i} = 0, \quad \vec{d} \times \vec{p} = 0.$$

Видно, что для однородной части $\underline{\Delta}_{\beta k}(0)$ параметра порядка (64) справедлива процедура классификации, изложенная выше. Исходя из модельного гамильтониана, в работах [15] изучен вопрос о стабильности неоднородных конфигураций в ${}^3\text{He-A}$ и показана устойчивость конфигурации при $\vec{d} \parallel \vec{p}$.

Рассмотрим случай, когда операторы пространственной симметрии имеют вид

$$\hat{P}_k = \hat{\mathcal{P}}_k - q_{k\alpha} \hat{S}_\alpha. \quad (65)$$

Это приводит к уравнению для параметра порядка

$$\nabla_i \Delta_{\beta k}(x) = q_{i\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma k}(x). \quad (66)$$

Тождество Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$ позволяет получить соотношение

$$\text{Tr} [\hat{w}, [\hat{P}_i, \hat{P}_k]] \hat{\Delta}_{\beta l}(x) = (q_{i\beta} q_{k\alpha} - q_{i\alpha} q_{k\beta}) \Delta_{\alpha l}(x) = 0,$$

откуда следует структура параметра $q_{i\alpha}$:

$$q_{i\alpha} = q_i n_\alpha. \quad (67)$$

Здесь q_k – вектор магнитной спирали, n_α – направляющий вектор оси анизотропии в спиновом пространстве. Решение уравнения (66) с учетом (67) дает явную структуру параметра порядка для этого состояния:

$$\Delta_{\beta k}(x) = a_{\beta\gamma}(\vec{n}\theta(x))\underline{\Delta}_{\gamma k}(0), \quad \theta(x) = \theta + \vec{q}\vec{x}, \quad (68)$$

где $a_{\beta\gamma}$ – ортогональная матрица поворота в спиновом пространстве. Условие ненарушенной симметрии (27) с учетом вида генератора пространственной симметрии (65) и уравнения (66) приводит к равенству

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l}(x) + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i}(x) + a_j \varepsilon_{jmn} x_m q_n n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i}(x) + 2ic \Delta_{\beta i}(x) = 0, \quad (69)$$

где $\underline{b}_\alpha = b_\alpha + \vec{d}\vec{q}n_\alpha$. Отсюда, принимая во внимание условие отсутствия линейного по координате слагаемого, получим уравнения

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l}(x) + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i}(x) + 2ic \Delta_{\beta i}(x) = 0, \quad a_j \varepsilon_{jmn} q_n = 0,$$

которые задают равновесную структуру параметра порядка. Учитывая формулу (68), нетрудно получить уравнение только для однородной части параметра порядка, которая не зависит от координат:

$$a_k \varepsilon_{kil} \underline{\Delta}_{\beta l} + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\Delta}_{\gamma i} + 2ic \underline{\Delta}_{\beta i} = 0$$

при условии, что $\vec{b} \times \vec{n} = 0$. В результате анализ возможных значений однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\beta k}$ сводится к уже рассмотренному случаю.

Исследуем теперь пространственную симметрию, определяемую операторами

$$\hat{P}_k = \hat{\mathcal{P}}_k - t_{kj} \hat{\mathcal{L}}_j. \quad (70)$$

Эта симметрия и алгебра (33) приводят к системе уравнений

$$\nabla_i \Delta_{\beta k}(x) = t_{ij} \varepsilon_{jkl} \Delta_{\beta l}(x), \quad t_{ij} \varepsilon_{juv} \nabla_v \Delta_{\beta k}(x) = 0, \quad (71)$$

откуда получим условие для допустимой структуры параметров t_{ij} :

$$t_{ij} \varepsilon_{juv} t_v \varepsilon_{\lambda kl} = 0. \quad (72)$$

Величину t_{kj} будем искать в виде $t_{kj} = t\delta_{kj} + t_i \varepsilon_{ikj} + t_{kj}^s$, где t_{kj}^s – симметричный и бесшпуровый тензор. Подставим это выражение в (72) и учтем, что это соотношение справедливо при любых значениях индексов. Сворачивая его с тензором $(\delta_{ki}\delta_{lu} - \delta_{ku}\delta_{li})$, получим уравнения связи для параметров матрицы t_{kj} :

$$6t^2 - t_n^2 - t_{i\lambda}^s t_{i\lambda}^s = 0. \quad (73)$$

Сворачивая соотношение (72) с тензором ε_{klu} , приходим к другому уравнению:

$$t_j (t\delta_{ij} + t_{ij}^s) = 0. \quad (74)$$

Следствием уравнений (73), (74) будет равенство $t_j = 0$. Обратимся теперь к тождеству Якоби для операторов $\hat{w}$, $\hat{P}_i$, $\hat{P}_k$. Заметим, что $[\hat{P}_i, \hat{P}_k] \neq 0$. В соответствии с явным видом (70) найдем условия для структуры элементов матрицы t_{ij} :

$$t_{ii}t_{kl}^2 - t_{ik}t_{kl}t_{li} = 0, \quad t_{ik}t_{ki} - t_{ii}t_{kk} = 0. \quad (75)$$

Нетрудно получить явный вид матрицы t_{ij} , удовлетворяющей (73)–(75):

$$t_{ik} = tl_i l_k. \quad (76)$$

Пространственно-неоднородная часть параметра порядка может быть найдена из уравнения (71) с учетом (76). Решение имеет вид

$$\Delta_{\gamma i}(x) = a_{ik}(\vec{l}\psi(x))\underline{\Delta}_{\gamma k}(0), \quad (77)$$

где $a_{ik}(\vec{l}\psi(x))$ – ортогональная матрица поворота вокруг оси $\vec{l}$ в конфигурационном пространстве на угол $\psi(x) = \psi + t\vec{l}\vec{x}$. Это решение описывает геликоидальную структуру. Величина $2\pi t^{-1}$ определяет шаг геликоида, направление которого задано единичным вектором $\vec{l}$. Условие ненарушенной симметрии с учетом (70), (77) приводит к уравнению

$$\underline{a}_k(\varepsilon_{kil}\Delta_{\beta l} + \varepsilon_{kuv}x_u\nabla_v\Delta_{\beta i}) + b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma i} + 2ic\Delta_{\beta i} = 0, \quad (78)$$

где $\underline{a}_i \equiv a_i + tl_i\vec{l}\vec{l}$. Отсюда получим ограничивающее структуру параметра порядка соотношение $\underline{a} \times \vec{l} = 0$, которое возникает из условия отсутствия линейного слагаемого по координате в уравнении (78), и уравнение для однородной части параметра порядка

$$\underline{a}_k\varepsilon_{kil}\Delta_{\beta l} + b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma i} + 2ic\Delta_{\beta i} = 0.$$

Общая структура оператора пространственной симметрии согласно (62), (65), (70) имеет вид

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N} - q_k n_\alpha \hat{S}_\alpha - tl_j l_k \hat{\mathcal{L}}_j. \quad (79)$$

Условие пространственной симметрии состояния равновесия рассматриваемой ферми-жидкости следует дополнить условием ненарушенной симметрии состояния равновесия (21), где теперь генератор $\hat{T}$ определяется равенством (27). В соответствии с этими условиями симметрии запишем равенства

$$i \operatorname{Tr}[\hat{w}, \hat{T}]\hat{\Delta}_{\beta k}(x) = 0, \quad i \operatorname{Tr}[\hat{w}, \hat{P}_i]\hat{\Delta}_{\beta k}(x) = 0.$$

Отсюда получим уравнения, устанавливающие равновесную структуру параметра порядка, и найдем ограничения на параметры a_i , b_α , c , d_i генератора $\hat{T}$ и параметры p_k , q_k , n_α , t , l_k оператора пространственной симметрии $\hat{P}_k$:

$$\begin{aligned} \underline{a}_i(\varepsilon_{ikl}\Delta_{\beta l}(x) + \varepsilon_{iuv}x_u\nabla_v\Delta_{\beta k}(x)) + \underline{b}_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma k}(x) + 2ic\Delta_{\beta k}(x) = 0, \\ \nabla_i\Delta_{\beta k}(x) = 2ip_i\Delta_{\beta k}(x) + q_in_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma k}(x) + \\ + tl_il_j(\varepsilon_{jkm}\Delta_{\beta m}(x) + \varepsilon_{juv}x_u\nabla_v\Delta_{\beta k}(x)). \end{aligned} \quad (80)$$

Параметры $\underline{a}_i$, $\underline{b}_\alpha$, $\underline{c}$ связаны с величинами a_i , b_α , c соотношениями

$$\underline{a}_i = a_i + tl_i \vec{l} \vec{d}, \quad \underline{b}_\alpha = b_\alpha + \vec{d} \vec{q} n_\alpha, \quad \underline{c} = c + \vec{p} \vec{d}.$$

Условие отсутствия линейных по координате слагаемых в обоих уравнениях (80) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} l_j \varepsilon_{j uv} (2ip_v \Delta_{\beta k}(x) + q_v n_\alpha \varepsilon_{\alpha \beta \gamma} \Delta_{\gamma k}(x)) &= 0, \\ \underline{a}_j \varepsilon_{j uv} (2ip_v \Delta_{\beta k}(x) + q_v n_\alpha \varepsilon_{\alpha \beta \gamma} \Delta_{\gamma k}(x) + tl_v l_m \varepsilon_{m kn} \Delta_{\beta n}(x)) &= 0, \end{aligned} \quad (81)$$

которые позволяют связать направления векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{l}$ между собой и с вектором $\vec{d}$. Уравнения (80), (81) служат основой анализа классификации равновесных состояний сверхтекучих фаз ${}^3\text{He}$ с генератором пространственной симметрии (79). Решение второго из уравнений (80) имеет вид

$$\Delta_{\beta i}(x) = e^{2i\varphi(x)} a_{\beta \gamma}(\vec{n}\theta(x)) a_{ik}(\vec{l}\psi(x)) \underline{\Delta}_{\gamma k}(0). \quad (82)$$

Соотношения (81) выполняются, если векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{l}$, $\vec{d}$ коллинеарны. В этом случае первое из уравнений (80) позволяет свести уравнение для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\gamma k}(0)$ в (82) к виду

$$\underline{a}_i \varepsilon_{ikl} \underline{\Delta}_{\beta l}(0) + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha \beta \gamma} \underline{\Delta}_{\gamma k}(0) + 2i \underline{c} \underline{\Delta}_{\beta k}(0) = 0$$

при выполнении равенства $\vec{b} \times \vec{n} = 0$.

Изучим условие стационарности сверхтекучих состояний ${}^3\text{He}$. Для равновесного оператора Гиббса справедливо соотношение $[\hat{w}, \hat{H}] = 0$ (см. (30)). Уравнение фон Неймана совместно с условием стационарности позволяет определить временную зависимость равновесных средних. В частности, для параметра порядка получим

$$\text{Tr } \hat{w}(t) \hat{\Delta}_{\alpha k}(x) = \text{Tr } \hat{w}(0) e^{i\hat{N} p_0 t} \hat{\Delta}_{\alpha k}(x) e^{-i\hat{N} p_0 t} = e^{2ip_0 t} \text{Tr } \hat{w}(0) \hat{\Delta}_{\alpha k}(x). \quad (83)$$

Соотношения (82) и (83) определяют пространственно-временную зависимость параметра порядка в состоянии равновесия.

Список литературы

- [1] *D. D. Osheroff, R. C. Richardson, D. M. Lee.* Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 885; *A. J. A. Leggett.* Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. № 2. P. 331; *P. W. Anderson, W. F. Brinkman.* Theory of anisotropic superfluidity in ^3He . In: The Physics of Liquid and Solid Helium. Part II. Eds. K. H. Bennemann, J. B. Ketterson. New York: Wiley, 1978. P. 177; *В. П. Минеев.* УФН. 1983. Т. 139. С. 303; *П. Н. Брюсов, В. Н. Попов.* Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей. М.: Наука, 1988; *D. Vollhardt, P. Wolfe.* The Superfluid Phases of Helium 3. London: Taylor&Francis, 1990; *G. E. Volovick.* Exotic Properties of Superfluid ^3He . Singapore: World Scientific, 1992.
- [2] *Л. П. Путаевский.* ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1794.
- [3] *R. Balian, N. R. Werthamer.* Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 1553.
- [4] *P. W. Anderson, P. Morel.* Phys. Rev. 1961. V. 123. P. 1911.
- [5] *V. Ambegaokar, N. D. Mermin.* Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 81.
- [6] *Z. M. Galasiewicz.* Acta Phys. Polon. 1960. V. 19. P. 467.
- [7] *G. Barton, M. Moore.* J. Phys. C. 1974. V. 7. P. 4220.
- [8] *C. M. Varma, N. R. Werthamer.* Phys. Rev. A. 1974. V. 9. P. 1465.
- [9] *G. E. Volovik.* Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. С. 281; *G. Baramidze, G. Kharadze.* ЖЭТФ. 1999. Т. 115. № 2. С. 754.
- [10] *A. Korf, H. R. Brand.* J. Low Temp. Phys. 1997. V. 109. № 1/2. P. 183.
- [11] *F. W. Nijhoff, H. W. Capel, A. den Breems.* Physica A. 1985. V. 130. P. 375.
- [12] *F. W. Nijhoff, H. W. Capel, A. den Breems.* Physica A. 1986. V. 135. P. 295; V. 139. P. 256.
- [13] *C. Bruder, D. Vollhardt.* Phys. Rev. B. 1986. V. 34. P. 131.
- [14] *A. M. J. Schakel, F. A. Bais.* J. Phys.: Cond. Matter. 1989. V. 1. P. 1743.
- [15] *A. Fetter.* Phys. Rev. B. 1979. V. 20. № 1. P. 303; 1981. V. 23. № 5. P. 218; *Y. R. Lin-Liu, D. Vollhardt, K. Maki.* Phys. Rev. B. 1979. V. 20. № 1. P. 159.
- [16] *J. N. Kotzev, D. V. Shopova.* Phys. Lett. A. 1994. V. 187. P. 264.
- [17] *V. M. Ruutu, J. Korp, M. Krusius, U. Parts, B. Placais, E. V. Thuneberg, W. Xu.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 5058; *J. Korp, R. Hanninen, E. V. Thuneberg.* Phys. Rev. B. 2000. V. 62. P. 12374.
- [18] *N. N. Bogoliubov.* Physica. 1960. V. 26. P. 51.
- [19] *Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов.* УФН. 1989. Т. 159. № 4. С. 585.
- [20] *М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 1. С. 59.
- [21] *М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков.* ТМФ. 2001. Т. 127. № 2. С. 317.
- [22] *Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов.* ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 875.
- [23] *V. P. Mineev.* Sov. Sci. Rev. A. 1980. V. 2. P. 173.
- [24] *М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков.* ТМФ. 1997. Т. 113. № 2. С. 313.
- [25] *A. I. Akhiezer, A. A. Isayev, S. V. Peletminsky, A. A. Yatsenko.* Phys. Lett. B. 1999. V. 451. P. 430.

Поступила в редакцию 1.IV.2002 г.