Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Курашев, Б. А. Маградзе, Явные выражения для времени- и пространственноподобных наблюдаемых квантовой хромодинамики в аналитической теории возмущений, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 1, 95–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:36:53

© 2003 г.

Д. С. Курашев*, Б. А. Маградзе†

ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВРЕМЕНИ- И ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исследуются возможности выражения инвариантной функции (т.е. эффективной константы) связи КХД в явном аналитическом виде в двух- и трехпетлевых приближениях, а также для случая Паде-преобразованной бета-функции. Исследованы как времени-, так и пространственноподобная области. Рассмотрены технические аспекты аналитической теории возмущений Ширкова–Соловцова. Получены явные выражения для двух- и трехпетлевой эффективных функций связи во времениподобной области. В последнем случае был применен новый метод разложения функций, представленных в произвольном петлевом порядке теории возмущений, по степеням двухпетлевой функции. Путем численного сравнения в инфракрасной области показано полное согласие полученных явных выражений для трехпетлевых функций с точными численными.

Ключевые слова: квантовая хромодинамика, теория возмущений, уравнение ренормгруппы, бегущая константа связи, ренормсхемы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В недавних работах [1] была предложена новая “ренорминвариантная аналитическая формулировка” результатов вычислений в квантовой хромодинамике. В этой схеме нефизические особенности типа призрачного полюса в эффективной функции связи¹⁾ и матричных элементах не появляются, и возникает возможность “дальнейшего продвижения” в инфракрасную область. В работе [4] была предложена специальная версия аналитического подхода – аналитическая теория возмущений (АТВ), успешно примененная для описания ряда физических процессов [3]. В работе [2] были изучены мате-

¹⁾ Вслед за работами [2], [3] мы используем термин “эффективная функция связи” вместо “эффективная константа связи”.

* Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: kourashev@mtu-net.ru

† Математический институт, Тбилиси, Грузия. E-mail: magr@rmi.acnet.ge

матические свойства нестепенных асимптотических рядов АТВ; на этой основе была объяснена схемная устойчивость результатов АТВ [5].

Пусть $D(Q^2)$ – функция Адлера, определенная для некоторого физического процесса во пространственноподобной области. Обычно она записывается в виде степенного ряда²⁾

$$D_{\text{pt}}(Q^2) = D_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_s^n(Q^2, f) \right), \quad (1)$$

где D_0 – зависящая от процесса константа, f – число активных кварков для переданного импульса $Q \equiv \sqrt{Q^2}$. В АТВ $D(Q^2)$ представляется через нестепенное асимптотическое разложение

$$D_{\text{an}}(Q^2) = D_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathcal{A}_n(Q^2, f) \right), \quad (2)$$

где $\mathcal{A}_n$ – “анализированная степень” функции связи в евклидовой области: $\mathcal{A}_n(Q^2, f) = \{\alpha_s^n(Q^2, f)\}_{\text{an}}$. Пусть $R(s)$ – физическая величина во времениподобной области, соответствующая $D(Q^2)$. В АТВ она имеет представление [3], [6]

$$R(s) = R_0(1 + r(s)), \quad r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathfrak{A}_n(s, f), \quad (3)$$

причем функции $\mathfrak{A}_n$ связаны с $\mathcal{A}_n$ интегральным преобразованием [3]

$$\mathfrak{A}_n(s, f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} \mathcal{A}_n(-z, f), \quad (4)$$

введенным в работах [7], [8] (см. также [9]). Обратное преобразование имеет вид

$$\mathcal{A}_n(Q^2, f) = Q^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + Q^2)^2} \mathfrak{A}_n(s, f). \quad (5)$$

В работах [2], [6] были изучены универсальные функции $\mathcal{A}_n$ и $\mathfrak{A}_n$ на однопетлевом уровне. В инфракрасной области для них обнаружено осциллирующее поведение. Для вычисления этих функций в высших порядках использовались итерационные решения уравнения ренормализационной группы (РГ) [6], [10], или это уравнение решалось в комплексной области [11].

В работах [12], [13] было аналитически решено уравнение РГ во втором порядке. Решение было представлено в терминах W -функции Ламберта. В третьем порядке в случае Паде-преобразованной бета-функции решение также было представлено через функцию Ламберта [13]. Полученные решения имеют удобный вид для аналитического продолжения в комплексную область, что особенно важно при применении АТВ [14].

В работе [15] решения уравнения РГ в высших порядках теории возмущений (в классе безмассовых схем перенормировок) были разложены по степеням двухпетлевого (схемно-независимого) решения. На этой основе был предложен новый метод для уменьшения

²⁾Здесь $Q^2 = -q^2$, $Q^2 > 0$ в евклидовой области.

схемной зависимости наблюдаемых в КХД. Аналогичные разложения для наблюдаемых (полученные из других соображений) рассматривались в работе [16].

В настоящей работе предлагаются практические формулы для вычисления наборов функций $\{\mathcal{A}_n(Q^2, f)\}$ и $\{\mathfrak{A}_n(s, f)\}$. В разделе 3 выведены общие уравнения для обоих наборов функций. В разделе 4 функции АТВ вычислены во втором порядке, в разделе 5 – в третьем. В разделе 6 изложен общий метод вычисления этих функций в высших порядках теории возмущений. В разделе 7 рассмотрены глобальные функции, учитывающие кварковые пороги (эти функции были введены в работе [6]). В разделе 8 приведены численные результаты.

2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Функция связи КХД удовлетворяет уравнению РГ

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s(Q^2, f)}{\partial Q^2} = \beta^f(\alpha_s(Q^2, f)) = - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^f \alpha_s^{n+2}(Q^2, f) \quad (6)$$

с условием $\alpha_s(\mu^2, f) = g^2/(4\pi)$, где μ – точка нормировки. В безмассовых схемах β_0^f и β_1^f имеют универсальные значения

$$\beta_0^f = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}f \right), \quad \beta_1^f = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(102 - \frac{38}{3}f \right), \quad (7)$$

а β_2^f в схеме MS ($\overline{MS}$) равна [17]

$$\beta_2^f = \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{2857}{2} - \frac{5033f}{18} + \frac{325f^2}{54} \right). \quad (8)$$

“Евклидовы функции”, т.е. функции евклидова аргумента, определены через спектральное представление

$$\mathcal{A}_n(Q^2, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_n(\sigma, f)}{\sigma + Q^2} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^t}{(e^t + Q^2 \Lambda^{-2})} \tilde{\rho}_n(t, f) dt, \quad (9)$$

спектральная функция определяется формулой $\rho_n(\sigma, f) = \rho_n(t, f) = \text{Im}\{\alpha_s(-\sigma - i0)\}^n$, где $t = \ln(\sigma/\Lambda^2)$ и Λ – параметр КХД. “Времениподобные функции” (времениподобного аргумента) $\{\mathfrak{A}_n(s, f)\}$ определены через представление

$$\mathfrak{A}_n(s, f) = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \rho_n(\sigma, f), \quad (10)$$

полученное в работе [18]. Для численного анализа удобно представить (9) в регуляризованном виде. Используя (9) и (10), получим

$$\mathcal{A}_n(Q^2, f) = \mathcal{A}_n(Q^2, f, T) + \mathfrak{A}_n(\Lambda^2 e^T, f) + \begin{cases} O(\overline{Q}^2 e^{-T} T^{-(1+n)}), & \overline{Q}^2 > 1, \\ O(\overline{Q}^{-2} e^{-T} T^{-(1+n)}), & \overline{Q}^2 < 1, \end{cases} \quad (11)$$

где $\overline{Q}^2 = Q^2/\Lambda^2$, $\mathcal{A}_n(Q^2, f, T)$ обозначает интеграл (9), взятый по конечному интервалу $-T \leq t \leq T$. При достаточно большом T (когда $(Q^2/\Lambda^2)e^{-T} \ll 1$) вклады порядка e^{-T} можно отбросить, поэтому второе слагаемое в правой части (11) компенсирует главную ошибку, совершаемую при регуляризации интеграла. Формула (11) позволяет получить хорошую точность даже при умеренных значениях T .

Ниже мы получим уравнения для функций $\mathcal{A}_n(Q^2, f)$, $\mathfrak{A}_n(s, f)$ и $\rho_n(\sigma, f)$. В k -м порядке результаты имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{A}_n^{(k)}(Q^2, f)}{\partial \ln Q^2} = -n \sum_{N=0}^{k-1} \beta_N^f \mathcal{A}_{n+N+1}^{(k)}(Q^2, f), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_n^{(k)}(s, f)}{\partial \ln s} = -n \sum_{N=0}^{k-1} \beta_N^f \mathfrak{A}_{n+N+1}^{(k)}(s, f), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho_n^{(k)}(\sigma, f)}{\partial \ln \sigma} = -n \sum_{N=0}^{k-1} \beta_N^f \rho_{n+N+1}^{(k)}(\sigma, f), \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

В первом порядке эти уравнения были получены в работе [6]. Представим уравнение РГ k -го порядка в виде

$$\frac{\partial \alpha_s^n(Q^2, f)}{\partial \ln Q^2} = -n \sum_{N=0}^{k-1} \beta_N^f \alpha_s^{n+N+1}(Q^2, f), \quad (15)$$

где $n \geq 1$ является целым числом. Анализированная версия уравнения (15) имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial \alpha_s^n(Q^2, f)}{\partial \ln Q^2} \right\}_{\text{an}} = -n \sum_{N=0}^{k-1} \beta_N^f \mathcal{A}_{n+N+1}(Q^2, f), \quad (16)$$

с другой стороны,

$$\left\{ \frac{\partial \alpha_s^n(Q^2, f)}{\partial \ln Q^2} \right\}_{\text{an}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma + Q^2} \text{Im} \frac{\partial \alpha_s^n(-\sigma - i0, f)}{\partial \ln(-\sigma - i0)}. \quad (17)$$

Из тождества $\ln(-\sigma - i0) = \ln \sigma - i\pi$ следует соотношение

$$\text{Im} \frac{\partial \alpha_s^n(-\sigma - i0, f)}{\partial \ln(-\sigma - i0)} = \frac{\partial \text{Im} \alpha_s^n(-\sigma - i0, f)}{\partial \ln \sigma} = \frac{\partial \rho_n(\sigma, f)}{\partial \ln \sigma}, \quad (18)$$

так что

$$\left\{ \frac{\partial \alpha_s^n(Q^2, f)}{\partial \ln Q^2} \right\}_{\text{an}} = + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma + Q^2} \frac{\partial \rho_n(\sigma, f)}{\partial \ln \sigma}. \quad (19)$$

Интегрируя по частям (19) и используя следствие условия асимптотической свободы для спектральной плотности

$$\rho_n(\sigma \rightarrow \infty, f) \simeq \frac{1}{(\ln \sigma)^2} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma + Q^2} \rho_n(\sigma, f) \Big|_0^\infty = 0, \quad (20)$$

находим

$$\left\{ \frac{\partial \alpha_s^n(Q^2, f)}{\partial \ln Q^2} \right\}_{\text{an}} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma + Q^2} \rho_n(\sigma, f) = \frac{\partial \mathcal{A}_n(Q^2, f)}{\partial \ln Q^2}. \quad (21)$$

Из этого соотношения и формулы (16) вытекает система уравнений (12). При $n = 1$ уравнения (12) и (13) являются аналогами уравнения РГ: их можно получить из уравнения РГ, если заменить α_s^n на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathcal{A}_n$, соответственно.

3. ДВУХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Точное решение уравнения (6) во втором порядке имеет вид [12], [13]

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2, f) = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \frac{1}{1 + W_{-1}(\zeta)}, \quad \zeta = -\frac{1}{eb_1} \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-1/b_1}, \quad (22)$$

где $b_1 = \beta_1/\beta_0^2$, $\Lambda \equiv \Lambda_{\overline{MS}}$ и $W_{-1}(\zeta)$ обозначает одну из ветвей W -функции Ламберта [19]. Функция Ламберта – многозначное решение уравнения $\zeta = W(\zeta)e^{W(\zeta)}$; $W_k(\zeta)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, – ветви этой функции. Продолжая решение (22) в комплексной Q^2 -плоскости (см. [12]–[14]), находим спектральные функции $\rho_n^{(2)}(\sigma, f) \equiv \tilde{\rho}_n^{(2)}(t, f)$, $n = 1, 2, \dots$. В случае $0 \leq f \leq 6$ имеем³⁾

$$\tilde{\rho}_n^{(2)}(t, f) = \left(\frac{\beta_0}{\beta_1} \right)^n \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{1 + W_1(z(t))} \right)^n, \quad (23)$$

где $z(t) = \exp(-t/b_1 + i(1/b_1 - 1)\pi)/eb_1$. Подставляя (23) в формулы (10) и (11), находим функции $\mathfrak{A}_n^{(2)}(s, f)$ и $\mathcal{A}_n^{(2)}(Q^2, f)$. Интегралы (10) можно взять аналитически⁴⁾:

$$\mathfrak{A}_1^{(2)}(s, f) = -\frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{1}{\pi\beta_1} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\alpha^{(2)}(-s)} \right), \quad (24)$$

$$\mathfrak{A}_2^{(2)}(s, f) = \frac{1}{\pi\beta_1} \operatorname{Im} \ln \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \alpha^{(2)}(-s) \right), \quad (25)$$

$$\mathfrak{A}_3(s, f) = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \frac{1}{\pi\beta_1} \operatorname{Im} \left\{ \ln \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \alpha^{(2)}(-s) \right) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \alpha^{(2)}(-s) \right\}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_4(s, f) = & \left(-\frac{\beta_0}{\beta_1} \right)^2 \frac{1}{\pi\beta_1} \operatorname{Im} \left\{ \ln \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \alpha^{(2)}(-s) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\beta_1}{\beta_0} \alpha^{(2)}(-s) + \frac{\beta_1^2}{2\beta_0^2} \alpha^{(2)2}(-s) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

и т. д. Здесь было введено обозначение

$$\alpha^{(2)}(-s) = \alpha_s^{(2)}(-s - i0, f) = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \frac{1}{1 + W_1(z_s)}, \quad (28)$$

где $z_s = (s/\Lambda^2)^{-1/b_1} e^{-i\pi(1/b_1 - 1) - 1/b_1}$. Такая форма выражения удобна, так как возможно использование различных приближенных двухпетлевых функций, выраженных, например, через “двойные логарифмы”, а не функцию Ламберта. Таким образом, данные соотношения позволяют получить аналог функции связи из пространственноподобной области во времениподобной без вычисления сложных спектральных интегралов.

Отметим, что функция $\mathfrak{A}_n(s, f)$ пропорциональна остатку после $(n - 2)$ -го члена разложения Тейлора функции $\ln(1 + (\beta_1/\beta_0)\alpha^{(2)}(-s))$ по степеням $(\beta_1/\beta_0)\alpha^{(2)}(-s)$.

³⁾ Для $f > 6$ формула (23) меняет вид [13], [14].

⁴⁾ Однопетлевые формулы для времениподобных функций приведены в работе [6].

Из асимптотических свойств W -функции [19] непосредственно следует результат работы [18]: в пределе $s \rightarrow 0$ для $n > 1$

$$\mathfrak{A}_1^{(2)}(s, f) \rightarrow \frac{1}{\beta_0}, \quad \mathfrak{A}_n^{(2)}(s, f) \rightarrow 0. \quad (29)$$

Функция (24) имеет формальное разложение

$$\mathfrak{A}_1^{(2)}(s, f) = \alpha_s^{(2)}(s, f) - \frac{1}{3}\pi^2\beta_0^2\alpha_s^{(2)3}(s, f) - \frac{5}{6}\pi^2\beta_1\beta_0\alpha_s^{(2)4}(s, f) - \dots, \quad (30)$$

где $\alpha_s^{(2)}(s, f)$ – точное решение двухпетлевого уравнения РГ (22). Функции высшего порядка $\mathfrak{A}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) имеют аналогичные разложения. Подставляя их в представление (3), получим разложение для $R(s)$ по степеням традиционной функции связи α_s . Однако коэффициенты этого ряда содержат дополнительные π^2 -факторы. Ранее подобные разложения (по степеням итерационной функции связи) для времениподобных наблюдаемых были введены в работах [7], [8] (см. также работы [20], [21]). В работе [21] был вычислен вклад π^2 -факторов вплоть до членов α_s^5 в $R_{e^+e^-}$, R_τ и было установлено, что они дают основной вклад в коэффициенты разложения $R_{e^+e^-}(s) = \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$. В недавних работах [22] рассматривались разные величины во времениподобной области при $f = 3, 4, 5$. Были учтены π^2 -эффекты высокого порядка и установлено, что извлекаемое из эксперимента значение для $\alpha_s(M_z^2)$ заметно зависит от этих эффектов.

4. ТРЕХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Бета-функция в третьем порядке после Паде-преобразования принимает вид

$$\beta_{\text{Padé}} = -\beta_0\alpha_s^2\left(1 + \frac{\beta_1\alpha_s}{\beta_0 - \beta_0\beta_2\beta_1^{-1}\alpha_s}\right).$$

Решение уравнения РГ (6) в этом случае было найдено в работе [13]:

$$\alpha_{\text{Padé}}^{(3)}(Q^2, f) = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \frac{1}{1 - \beta_0\beta_2\beta_1^{-2} + W_{-1}(\xi)}, \quad (31)$$

где $\xi = -\exp[(\beta_0\beta_2/\beta_1^2)(Q^2/\Lambda^2)^{-1/b_1}]/eb_1$. Для спектральной функций $\rho_{\text{Padé},n}(\sigma, f) \equiv \tilde{\rho}_{\text{Padé},n}(t, f)$ (при $0 \leq f \leq 6$) получим

$$\tilde{\rho}_{\text{Padé},n}^{(3)}(t, f) = -\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^n \text{Im}\left(-\frac{1}{1 - \beta_2\beta_0\beta_1^{-2} + W_{-1}(Z(t))}\right)^n, \quad (32)$$

где $Z(t) = \exp(\beta_0\beta_2/\beta_1^2 - t/b_1 - i(1/b_1 - 1)\pi)/eb_1$. Спектральный интеграл (10) в случае весовой функции (32) приводит к выражениям

$$\mathfrak{A}_{\text{Padé},1}^{(3)}(s, f) = -\frac{1}{\pi\beta_0} \left(\frac{1}{\eta} \text{Im} \ln(W_1(Z_s)) + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \text{Im} \ln(\eta + W_1(Z_s)) - \pi \right), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\text{Padé},2}^{(3)}(s, f) = & \frac{1}{\pi\beta_1} \left(\frac{1}{\eta^2} \text{Im} \ln \left(\frac{W_1(Z_s)}{\eta + W_1(Z_s)} \right) - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \text{Im} \left(\frac{1}{\eta + W_1(Z_s)} \right) \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где $\eta = 1 - \beta_0\beta_2/\beta_1^2$ и $Z_s = (s/\Lambda^2)^{-1/b_1} \exp(-\eta + i(1/b_1 - 1)\pi)/b_1$. В случае $n > 2$ находим

$$\mathfrak{A}_{\text{Padé},n}^{(3)}(s, f) = \frac{p_n}{\eta^{n-2}} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\eta^2} \left[\ln \left(1 - \frac{\eta}{\eta + W_1(Z_s)} \right) + \sum_{N=1}^{n-2} \left(\frac{\eta}{\eta + W_1(Z_s)} \right)^N \frac{1}{N} \right] + \frac{\eta^{n-3}(1-\eta)}{(n-1)(\eta + W_1(Z_s))^{n-1}} \right\}, \quad (35)$$

где $p_n = 1/[(\pi\beta_1)(-\beta_0/\beta_1)^{n-2}]$.

5. МНОГОПЕТЛЕВОЙ СЛУЧАЙ

Из работы [15] следует, что функцию связи в высоких порядках можно разложить в ряд по степеням двухпетлевой функции:

$$\alpha_s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \alpha_s^{(2)n}, \quad (36)$$

где $c_1^{(k)} = 1$. Анализированные (пространственно- и времениподобная) версии (36) запишутся в виде

$$\mathcal{A}_1^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \mathcal{A}_n^{(2)}, \quad \mathfrak{A}_1^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \mathfrak{A}_n^{(2)}. \quad (37)$$

Следовательно, можно считать, что двухпетлевая функция связи является минимальным базисом при разложении решений высших порядков. Любая наблюдаемая (за исключением величин с аномальной размерностью) представляется в виде ряда $O^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} O_n^{(k)} \mathcal{A}_n^{(2)}$. Отметим, что однопетлевую функцию связи нельзя использовать для этой цели, так как многопетлевые функции имеют более сложные особенности⁵⁾. Однако точную двухпетлевую функцию связи (заданную через функцию Ламберта) можно применить для описания вкладов высокого порядка (аналогичные результаты см. в [16]).

Из (29) и второго из разложений (37) следует универсальное предельное поведение для времениподобной функции связи в любом порядке теории возмущений: $\mathfrak{A}_1^{(k)}(s, f) \rightarrow 1/\beta_0$, $s \rightarrow 0$. Этот результат был получен в работе [18] другим путем. Итак, мы можем выразить наблюдаемые в любом порядке через функцию Ламберта. Полученные выражения имеют корректные аналитические свойства и обладают конечным инфракрасным пределом.

⁵⁾ Так, двухпетлевая функция связи содержит двойной логарифм $\ln \ln x$, который не может быть представлен в виде ряда по степеням $1/\ln x$.

6. УЧЕТ МАССОВЫХ ПОРОГОВ КВАРКОВ

В “безмассовых” схемах важное значение приобретает задача учета массовых порогов тяжелых кварков [23]. Этот вопрос в контексте АТВ был изучен в работах [6], [22], где была предложена специальная модельная спектральная функция

$$\rho_n(\sigma) = \rho_n^{f=3}(\sigma, \Lambda_3) + \sum_{f \geq 4} \Theta(\sigma - M_f^2) (\rho_n^f(\sigma, \Lambda_f) - \rho_n^{f-1}(\sigma, \Lambda_{f-1})), \quad (38)$$

где масса M_f соответствует кварку с ароматом f и величины Λ_f определяются из требования непрерывности функции связи:

$$\alpha_s(M_f^2, f) = \alpha_s(M_f^2, f-1), \quad f = 4, 5, 6. \quad (39)$$

В строгом смысле условие (39) в MS -подобных схемах (кроме ведущего порядка) следует модифицировать [23], однако в АТВ оно не приводит к ощутимой ошибке, поэтому мы примем его без оговорок. В случае точных решений (22) и (31) соотношение (39) разрешается явно для Λ_f . Подставляя в (38) найденные выше выражения для спектральных функций (23) и (32) и используя формулы (9) и (10), строим глобальные функции $\mathcal{A}_n(Q^2)$ и $\mathfrak{A}_n(s)$.

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вычисления выполнены с использованием системы Maple V (вып. 5), где реализованы все ветви функции Ламберта с произвольной точностью. Для параметра шкалы здесь и в дальнейшем мы фиксируем значение $\Lambda_{f=3} = 0.4 \text{ ГэВ}$.

ТАБЛИЦА 1

**Сравнение разных аппроксимирующих функций
с точным трехпетлевым решением уравнения РГ $\alpha_{\text{num}}^{(3)}$.
Приведены процентные отклонения этих функций от $\alpha_{\text{num}}^{(3)}$**

Q (ГэВ)	$\alpha_{\text{num}}^{(3)}$	$\delta\alpha_{\text{ts}}^{(3)}$	$\delta\alpha_{\text{Padé}}^{(3)}$	$\delta\alpha_{\text{it}}^{(3)}$
0.8	0.76491	1.9	-18.9	-15.5
0.9	0.63323	0.8	-7.4	-9.3
1.0	0.55414	0.46	-4.4	-6.1
1.1	0.50028	0.33	-3.0	-4.3
1.2	0.46075	0.21	-2.3	-3.3
1.4	0.40587	0.15	-1.5	-2.2
1.6	0.36901	0.11	-1.1	-1.6
1.8	0.34220	0.08	-0.9	-1.3
2.0	0.32165	0.06	-0.7	-1.1
2.2	0.30527	0.05	-0.6	-1.0
2.6	0.28059	0.04	-0.5	-0.9

В табл. 1 разные аппроксимации трехпетлевой функции связи сравниваются с точным численным решением уравнения РГ $\alpha_{\text{num}}^{(3)}$. Здесь $\alpha_{\text{it}}^{(3)}$ обозначает итерационное решение [7] в третьем порядке

$$\alpha_{\text{it}}^{(3)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 L} - \frac{\beta_1}{\beta_0^3} \frac{\ln L}{L^2} + \frac{1}{\beta_0^3 L^3} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0^2} (\ln^2 L - \ln L - 1) + \frac{\beta_2}{\beta_0} \right), \quad (40)$$

где $L = \ln Q^2 / \Lambda_{\overline{MS}}^2$. Обычно формула (40) используется также во времениподобной области. Здесь α_{ts} обозначает частичную сумму ряда (*truncated series*) (36) $\alpha_{\text{ts}}^{(3)} = \sum_{i=1}^5 c_i^{(3)} \alpha_s^{(2)i}$, где $c_1^{(3)} = 1$, $c_2^{(3)} = 0$ (этот выбор соответствует обычному выбору параметра Λ [24]), $c_3^{(3)} = \beta_2 / \beta_0$, $c_4^{(3)} = 0$ и $c_5^{(3)} = (5/3) \beta_2^2 / \beta_0^2$. Наилучшую точность дает $\alpha_{\text{ts}}^{(3)}$: в области $Q \geq 0.9 \text{ ГэВ}$ она практически совпадает с точным решением. Точность Паде-аппроксимации ухудшается при $Q \leq 1.6 \text{ ГэВ}$, а итерационное решение позволяет получить процентную точность только при $Q \geq 2.3 \text{ ГэВ}$. Из сравнения с численным решением мы видим, что выражение $\alpha_{\text{ts}}^{(3)}$, полученное методом разложения по степеням двухпетлевых функций (с первыми четырьмя членами разложения), позволяет добиться существенного повышения (примерно на порядок) точности по сравнению с другими аппроксимациями.

В табл. 2 и 3 приведены результаты для времени- и пространственноподобных функций в области с тремя ароматами ($0.4 \text{ ГэВ} < \sqrt{s} < 2.6 \text{ ГэВ}$) во втором и третьем порядках. Функции с индексом ts являются наиболее точными (см. табл. 1), поэтому они могут служить эталоном для сравнения. В третьем порядке сравниваются разные аппроксимирующие функции. Относительное отклонение $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ от $\mathfrak{A}_{\text{ts},1}^{(3)}$ меньше 2.2 %, отклонение $\mathfrak{A}_{\text{Padé},1}^{(3)}$ от $\mathfrak{A}_{\text{ts},1}^{(3)}$ меньше 0.12 %. В евклидовом случае согласие между рассматриваемыми функциями еще лучше (см. табл. 3). Для вторых функций ($n = 2$) соответствующие отклонения такого же порядка: $|\delta \mathfrak{A}_2^{(2)}| < 2.6 \%$ и $|\delta \mathfrak{A}_{\text{Padé},2}^{(3)}| < 0.3 \%$.

Наблюдается заметная асимметрия [25] $\delta_{\text{as}} = (\mathcal{A}_{\text{tr},1}^{(3)}(Q^2, f) - \mathfrak{A}_{\text{tr},1}^{(3)}(Q^2, f)) / \mathcal{A}_{\text{tr},1}^{(3)}(Q^2, f) \times 100$ (ср. табл. 2 и 3), она возрастает от 2% при $Q = \sqrt{s} = 0.4 \text{ ГэВ}$ до 7.5% при $Q = \sqrt{s} = 2.0 \text{ ГэВ}$. В табл. 4 приведены результаты для глобальных функций $\mathfrak{A}_{\text{ts},1}^{(3)}(s)$ и $\mathcal{A}_{\text{ts},1}^{(3)}(Q^2)$ в интервале $0.4 \text{ ГэВ} < Q$, $\sqrt{s} < 90 \text{ ГэВ}$. При этом $\Lambda_{f=3} = 0.4 \text{ ГэВ}$, и значения для Λ_f ($f = 4, 5, 6$) определены с помощью (39)). Численные значения для масс кварков фиксированы следующим образом: $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, $M_4 = 1.3 \text{ ГэВ}$, $M_5 = 4.3 \text{ ГэВ}$ и $M_6 = 170 \text{ ГэВ}$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы следует считать получение точных двухпетлевых выражений для инвариантной функции связи КХД во времениподобной области (см. (24)–(27)). Это в свою очередь позволило использовать метод разложения многопетлевых функций по степеням двухпетлевых (из работы [15]) для получения трехпетлевых выражений. Было проведено сравнение результатов такого метода с точными численными трехпетлевыми функциями, а также с выражениями, полученными методом

ТАБЛИЦА 2

Сравнение времениподобных аппроксимирующих функций

$$\mathfrak{A}_n^{(2)}, \mathfrak{A}_{\text{Padé},n}^{(3)} \text{ и } \mathfrak{A}_{\text{ts},n}^{(3)} \text{ для } f = 3.$$

$$\text{Здесь } \delta\mathfrak{A}_n^{(2)} = (\mathfrak{A}_{\text{ts},n}^{(3)} - \mathfrak{A}_n^{(2)})/\mathfrak{A}_{\text{ts},n}^{(3)} \times 100 \text{ и т.д.}$$

$\sqrt{s}$ (ГэВ)	$\mathfrak{A}_{\text{ts},1}^{(3)}$	$\delta\mathfrak{A}_1^{(2)}$	$\delta\mathfrak{A}_{\text{Padé},1}^{(3)}$	$\mathfrak{A}_{\text{ts},2}^{(3)}$	$\delta\mathfrak{A}_2^{(2)}$	$\delta\mathfrak{A}_{\text{Padé},2}^{(3)}$
0.4	0.50161	1.27	0.11	0.13089	-1.99	0.28
0.6	0.42540	1.90	0.03	0.11420	-0.18	0.29
0.8	0.37711	2.14	-0.04	0.09985	1.04	0.21
1.0	0.34373	2.19	-0.08	0.08859	1.75	0.12
1.4	0.30034	2.11	-0.11	0.07291	2.39	-0.01
2.0	0.26272	1.91	-0.12	0.05897	2.60	-0.09
2.6	0.23975	1.74	-0.11	0.05056	2.57	-0.12

ТАБЛИЦА 3

**Евклидовы аппроксимирующие функции $\mathcal{A}_n^{(k)}(Q^2, f = 3)$
во втором и третьем порядках**

Q (ГэВ)	$\mathcal{A}_1^{(2)}$	$\mathcal{A}_{\text{Padé},1}^{(3)}$	$\mathcal{A}_{\text{ts},1}^{(3)}$	$\mathcal{A}_2^{(2)}$	$\mathcal{A}_{\text{Padé},2}^{(3)}$	$\mathcal{A}_{\text{ts},2}^{(3)}$
0.4	0.50785	0.51159	0.51193	0.11891	0.11714	0.11727
0.6	0.43844	0.44359	0.44376	0.10718	0.10629	0.10644
0.8	0.39341	0.39907	0.39912	0.09703	0.09678	0.09691
1.0	0.36138	0.36716	0.36713	0.08871	0.08888	0.08899
1.4	0.31822	0.32381	0.32369	0.07621	0.07686	0.07692
2.0	0.27916	0.28420	0.28403	0.06389	0.06479	0.06482
2.6	0.25454	0.25906	0.25888	0.05578	0.05675	0.05675

Паде-аппроксимации. В результате этих численных оценок была установлена предпочтительность метода разложения по степеням двухпетлевых функций (см. табл. 1).

С помощью полученных выражений были построены глобальные функции с массовыми порогами кварков. Ранее функции $\{\mathcal{A}_n\}$ и $\{\mathfrak{A}_n\}$ вычислялись на основе итерационного решения уравнения РГ (40) (см. [6], [9], [10]). Нами было установлено, что в двухпетлевом случае итерационное решение в инфракрасной области приводит к ошибкам порядка 4–5% в функциях $\{\mathcal{A}_n\}$ и $\{\mathfrak{A}_n\}$. С другой стороны, точность получаемых экспериментально данных (например, в измерениях величин $R_{e^+e^-}(s)$, R_τ) постоянно возрастает, поэтому возникает необходимость в более точных теоретических формулах. Отметим, что альтернативный подход был предложен в работе [11], где уравнение РГ было решено численно в комплексной плоскости.

Хотелось бы подчеркнуть, что получение явных двухпетлевых выражений имеет больший смысл, чем просто увеличение точности анализа или облегчение численных

ТАБЛИЦА 4

Сравнение глобальных времени- и пространственноподобных функций

$\sqrt{s}, Q$ (ГэВ)	$\mathfrak{A}_{ts,1}^{(3)}(s)$	$\mathcal{A}_{ts,1}^{(3)}(Q^2)$	$\sqrt{s}, Q$ (ГэВ)	$\mathfrak{A}_{ts,1}^{(3)}(s)$	$\mathcal{A}_{ts,1}^{(3)}(Q^2)$
0.4	0.52016	0.53038	5	0.21155	0.22536
0.6	0.44395	0.46209	10	0.17907	0.18759
0.8	0.39566	0.41730	20	0.15510	0.16057
1.0	0.36229	0.38516	50	0.13174	0.13505
1.4	0.31864	0.34139	70	0.12484	0.12767
2	0.28004	0.30132	90	0.12014	0.12270

расчетов. Дело в том, что существует возможность [12] выражения трех- и четырехпетлевых выражений в терминах известных двухпетлевых. Все это приводит к привлекательному результату, когда можно получать выражения для инвариантной функции связи и наблюдаемых с произвольной по числу петель точностью, правильными аналитическими свойствами и регулярным поведением в инфракрасной области.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность Д. В. Ширкову за многочисленные ценные обсуждения и рекомендации, А. Л. Катаеву, А. А. Пивоварову, А. В. Сидорову, И. Л. Соловцову и О. П. Соловцовой за критические замечания и полезные дискуссии. Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (гранты № 99-01-00091 и 00-15-96691).

Список литературы

- [1] И. Л. Соловцов, Д. В. Ширков. Кратк. сообщ. ОИЯИ. 1996. Т. 76. № 2. С. 5; *D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov. Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1209; hep-th/9704333.
- [2] Д. В. Ширков. ТМФ. 1999. Т. 119. С. 55; *D. V. Shirkov. Lett. Math. Phys.* 1999. V. 48. P. 135; hep-ph/9810346.
- [3] И. Л. Соловцов, Д. В. Ширков. ТМФ. 1999. Т. 120. С. 482; hep-ph/9909305.
- [4] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova. *Phys. Lett. B.* 1997. V. 415. P. 104.
- [5] I. L. Solovtsov, D. V. Shirkov. *Phys. Lett. B.* 1998. V. 442. P. 344; hep-ph/9711351.
- [6] D. V. Shirkov. Toward the correlated analysis of perturbative QCD observables. JINR preprint E2-2000-46; hep-ph/0003242; Д. В. Ширков. ТМФ. 2001. Т. 217. С. 3; hep-ph/0012283.
- [7] A. V. Radyushkin. Optimized lambda-parametrization for the QCD running coupling constant in spacelike and timelike regions. Препринт E2-82-159. Дубна: ОИЯИ, 1982; Кратк. сообщ. ОИЯИ. 1996. Т. 78. № 4. С. 96; hep-ph/9907228.
- [8] N. V. Krasnikov, A. A. Pivovarov. *Phys. Lett. B.* 1982. V. 116. P. 168.
- [9] A. P. Bakulev, A. V. Radyushkin, N. G. Stefanis. *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 113001.
- [10] Б. В. Гешкенбеин, Б. Л. Иоффе. Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 70. С. 167.
- [11] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, V. I. Yasnov. *Eur. Phys. J. C.* 2000. V. 14. P. 495.
- [12] B. Magradze. The gluon propagator in analytic perturbation theory. In: The Proceedings of the 10th International Seminar "QUARKS-98". Suzdal, Russia, May 17–24, 1998. Ed. F. L. Bezrukov et al. M.: INR Publ., 2000. P. 158; hep-ph/9808247.

- [13] *E. Gardi, G. Grunberg, M. Karliner.* JHEP. 1998. V. 07. P. 007.
- [14] *B. A. Magradze.* Int. J. of Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 2715.
- [15] *D. S. Kourashev.* The QCD observables expansion over the scheme-independent two-loop coupling constant powers, the scheme dependence reduction. hep-ph/9912410.
- [16] *C. J. Maxwell, A. Marjalili.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 577. P. 209.
- [17] *O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov, A. Y. Zharkov.* Phys. Lett. B. 1980. V. 93. P. 429.
- [18] *K. A. Milton, I. L. Solovtsov.* Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 5295.
- [19] *R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth.* Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 329.
- [20] *A. A. Pivovarov.* Nuovo Cimento A. 1992. V. 105. P. 813.
- [21] *A. L. Kataev, V. V. Starshenko.* Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. P. 235.
- [22] *D. V. Shirkov.* The π^2 terms in the s -channel QCD observables. JINR preprint E2-2000-211; hep-ph/0009106; Analytic perturbation theory for QCD observables. JINR preprint E2-2000-298; hep-ph/0012283; Eur. Phys. J. C. 2001. V. 22. P. 331; hep-ph/0107282.
- [23] *G. Rodrigo, A. Santamaria.* Phys. Lett. B. 1993. V. 313. P. 441; *K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl, M. Steinhauser.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 2184; hep-ph/9706430.
- [24] *W. A. Bardeen et al.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3998.
- [25] *K. A. Milton, I. L. Solovtsov.* Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 107701.

Поступила в редакцию 25.I.2002 г.,
после доработки 3.VII.2002 г.