Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Асимптотики решений уравнений главного резонанса, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 142–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:24:58

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГЛАВНОГО РЕЗОНАНСА

Исследована система двух дифференциальных уравнений первого порядка, которая возникает при усреднении нелинейных систем по быстрым одночастотным колебаниям. Основной результат состоит в построении асимптотики двухпараметрического семейства решений с неограниченно растущей амплитудой. Кроме того, построена асимптотика другого двухпараметрического семейства решений с ограниченной амплитудой. Эти результаты, в частности, дают ключ к пониманию авторезонанса как явления значительного роста вынужденных нелинейных колебаний, инициированных малой внешней накачкой.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, асимптотика, ВКБ-приближение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + [\varphi(\theta) - \lambda(x^2 + y^2)] \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\theta) \\ g(\theta) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \text{const} \neq 0, \quad (1)$$

с частными случаями которой связано описание разного типа резонансных эффектов в нелинейных системах. Предполагается, что заданные функции $\varphi(\theta)$, $f(\theta)$, $g(\theta)$ являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми при $\theta \geq 0$) и имеют степенное асимптотическое разложение при $\theta \rightarrow \infty$. При этом коэффициент $\varphi(\theta)$ линейно растет на бесконечности, а правые части ограничены и $f^2 + g^2 \rightarrow \text{const} \neq 0$. Требуется построить асимптотику на бесконечности (при $\theta \rightarrow \infty$) для различных решений этой системы.

Имея в виду линейные преобразования переменных x, y, θ , которые сохраняют структуру уравнений, можно считать без ограничения общности, что асимптотические разложения исходных функций имеют специфические главные члены¹⁾

$$\varphi(\theta) = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \theta^{-n}, \quad f(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} f_n, \quad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} g_n, \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (2)$$

¹⁾ Исходные асимптотики предполагаются дифференцируемыми.

* Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: klem@imat.rb.ru

Растущие решения удобнее исследовать в переменных амплитуда–фаза, сделав замену $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$. Для функций $r(\theta)$, $\psi(\theta)$ уравнения приобретают вид

$$\frac{dr}{d\theta} = f \cos \psi + g \sin \psi, \quad \left(\frac{d\psi}{d\theta} + \phi(\theta) - \lambda r^2 \right) r = g \cos \psi - f \sin \psi. \quad (3)$$

Основной результат работы состоит в построении асимптотики двухпараметрического семейства решений с неограниченно растущей амплитудой $r(\theta)$. Кроме того, построена асимптотика другого двухпараметрического семейства решений с ограниченной амплитудой.

Структура асимптотик в основном определяется главными коэффициентами в разложении исходных данных и параметром λ . С одной стороны, для понимания результатов достаточно ограничиться случаем $\varphi(\theta) \equiv \theta$, $f \equiv 1$, $g \equiv 0$. С другой стороны, все результаты допускают обобщение на более сложные нелинейные уравнения, которые здесь не обсуждаются. В данной работе анализируется сравнительно частная система со специфической кубической нелинейностью (1). Как раз системы такого типа возникают при асимптотическом решении ряда задач с малым параметром [1], [2]. Они интенсивно исследуются в последние годы [3], в частности в связи с некоторыми задачами небесной механики. При постановке задачи для системы (1) мы ориентируемся на проблему авторезонанса, которая обычно связывается с физикой плазмы и с ускорителями релятивистских частиц [4]. Большое число статей на эту тему можно найти по адресу <http://socrates.berkeley.edu/~fajans/pub>.

Решения с растущей амплитудой $r(\theta)$ описывают начальный этап авторезонанса. Именно на исследование авторезонанса нацелены как указанная в (2) специфическая структура коэффициента $\varphi(\theta)$ с ростом на бесконечности, так и постановка вопроса о поиске растущих решений [5]. Вопрос об асимптотике на другой бесконечности (при $\theta \rightarrow -\infty$) сводится к рассматриваемому случаю ($\theta \rightarrow \infty$) заменой (x, y, θ, λ) на $-(x, y, \theta, \lambda)$.

Постановка задачи об асимптотике решения в особой точке, в частности на бесконечности, является классической, и на эту тему имеется большое число публикаций (см., например, монографии [6]). Однако для уравнений (1) с данными (2) известные результаты непосредственно не применимы из-за осциллирующего характера решений. Впрочем, для рассматриваемых уравнений имеется несколько решений с чисто степенной асимптотикой, анализ которых довольно тривиален.

2. СТЕПЕННЫЕ АСИМПТОТИКИ

В случае, когда входящий в уравнения параметр λ положителен, легко построить степенные ряды

$$r(\theta) = \rho \theta^{1/2} + \sum_{k=2}^{\infty} \theta^{-k/2} \rho_k, \quad \psi(\theta) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{-k/2} \psi_k, \quad \theta \rightarrow \infty, \quad (4)$$

которые представляют собой формальное асимптотическое решение при $\theta \rightarrow \infty$. Константы ρ_k , ψ_k при $k \geq 1$ определяются однозначно из рекуррентных формул, получающихся при подстановке рядов (4) в уравнения (3). Главные члены растущего решения

извлекаются из нелинейных уравнений $(1 - \lambda \rho^2) = 0$, $\cos \psi_0 = 0$, которые разрешимы при $\lambda > 0$. Поскольку тригонометрическое уравнение имеет два различных (по модулю 2π) корни $\psi_0 = \pm\pi/2$, то возможно построение двух асимптотических решений. Эти две асимптотические конструкции связаны с разными точными решениями.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\lambda > 0$, то для уравнений (3) с исходными данными (2) существует единственное решение с растущей амплитудой, которое имеет асимптотическое разложение в виде рядов (4) с $\psi_0 = \pi/2$.*

ТЕОРЕМА 2. *Если $\lambda > 0$, то для уравнений (3) с исходными данными (2) существует однопараметрическое семейство решений с растущей амплитудой, которые имеют одно и то же асимптотическое разложение в виде рядов (4) с $\psi_0 = -\pi/2$. Разные решения экспоненциально близки при $\theta \rightarrow \infty$.*

Обоснование степенных асимптотик приведено, например, в работе [7].

3. ВКБ-АСИМПТОТИКИ С ОГРАНИЧЕННОЙ АМПЛИТУДОЙ

В случае $\lambda < 0$ не существует решений, растущих при $\theta \rightarrow \infty$. Имеет место

ЛЕММА 1. *Если $\lambda < 0$, то любое решение уравнений (1) с исходными данными (2) ограничено при $\theta \rightarrow \infty$.*

Доказательство ограниченности квадрата амплитуды $r^2 = x^2 + y^2$ вытекает из интегрального тождества

$$-\lambda r^4(\theta) = -\lambda r^4(0) - 2 \int_0^\theta \varphi'(\zeta) r^2(\zeta) d\zeta + 4 \int_0^\theta [f'y - g'x] d\zeta,$$

которое является следствием дифференциальных уравнений.

Ограниченные решения существуют также и в случае $\lambda > 0$. В данном разделе исследуется асимптотика всех ограниченных решений. Структура этих асимптотик не зависит от знака λ , поэтому дальнейшие построения справедливы как при $\lambda < 0$, так и при $\lambda > 0$. Однако следует помнить, что при $\lambda < 0$ эти асимптотики описывают все решения, тогда как при $\lambda > 0$ они описывают лишь множество ограниченных решений. Асимптотика растущих решений будет исследована в следующем разделе.

ТЕОРЕМА 3. *Любое ограниченное при $\theta \rightarrow \infty$ решение уравнений (1) с исходными данными (2) разлагается в асимптотический ряд по обратным степеням:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \sin \eta \\ \cos \eta \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \mathbf{x}_n(\eta; c), \quad \theta \rightarrow \infty, \quad (5)$$

коэффициенты которого 2π -периодичны по быстрой переменной $\eta = \theta^2/2 - \lambda c^2 \theta + \phi_1 \ln \theta + s$. Все эти решения могут быть параметризованы двумя константами асимптотики $x = x(\theta; c, s)$, $y = y(\theta; c, s) \quad \forall c, s = \text{const}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В частном случае при $c = 0$ получается чисто степенная асимптотика единственного решения, стремящегося к нулю на бесконечности:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\theta^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{\infty} \theta^{-n} \mathbf{x}_{n,0}, \quad \theta \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}_{n,0} = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 основано на построении асимптотического решения методом типа ВКБ. При этом нелинейности и правые части в уравнениях (1) рассматриваются как слабые возмущения линейного оператора, так что для определения $\mathbf{x}_n$ на каждом шаге возникает линейная система уравнений. Асимптотическая структура ряда обеспечивается требованием ограниченности коэффициентов $\mathbf{x}_n(\eta; c)$ равномерно по η .

Вектор-функции $\mathbf{x}_n(\eta; c) = (x_n, y_n)^T$ оказываются 2π -периодическими по η . Они определяются из неоднородных уравнений линейного осциллятора

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_n \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{f}_n(\eta; c),$$

которые получаются из уравнений (1) приравниванием выражений при одинаковых степенях θ . Векторы правых частей выписываются через предыдущие приближения, например

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &\equiv 0, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda |\mathbf{x}_0|^2 \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + \lambda c^2 \mathbf{x}'_0, \\ \mathbf{f}_2 &= \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} + \lambda |\mathbf{x}_0|^2 \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} - [\phi_1 - 2\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)] \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + \lambda c^2 \mathbf{x}'_1 - \phi_1 \mathbf{x}'_0. \end{aligned}$$

Главный член асимптотики $\mathbf{x}_0(\eta; c) = c(\sin \eta, \cos \eta)^T$ определяется с точностью до произвольного множителя c . Эта константа и сдвиг фазы s представляют два произвольных параметра конструируемого асимптотического решения. На каждом последующем шаге решение $\mathbf{x}_n(\eta; c)$ определяется с точностью до двух констант – множителей при паре решений однородной системы. Эти произволы ликвидируются на последующих шагах с помощью требований периодичности поправок по быстрой переменной η . На первых двух этапах (секулярное) условие ограниченности обеспечивается выбором коэффициентов при θ и $\ln \theta$ в фазовой функции. Получаемый при этом сдвиг фазы $-\lambda c^2 \theta$ в быстрой переменной связан с кубическим резонансом, без этого сдвига конструкция асимптотического решения в форме (5) невозможна. Логарифмический сдвиг фазы $\phi_1 \ln \theta$ возникает благодаря медленно убывающему слагаемому в коэффициенте $\varphi(\theta)$, он характерен для линейных уравнений с коэффициентами такого типа. На этом пути для первой поправки получается выражение

$$\mathbf{x}_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2\lambda c - 2\lambda^2 c^2 g_1 - \phi_2) \begin{pmatrix} \cos \eta \\ -\sin \eta \end{pmatrix}.$$

Таким образом строится полное формальное асимптотическое решение.

Для обоснования асимптотики следует выделить отрезок построенного ряда (5) $\mathbf{X}_N(\theta)$, состоящий из первых N слагаемых. Точное решение ищется в виде суммы $\mathbf{x} = \mathbf{X}_N(\theta) + \mathbf{Z}_N(\theta)$. В задаче для $\mathbf{Z}_N$ нетрудно доказать существование убывающего решения $\mathbf{Z}_N(\theta) = \mathcal{O}(\theta^{-N})$, $\theta \rightarrow \infty$, если воспользоваться линейностью главной части оператора и известными ВКБ-оценками [8] в комбинации с методом сжатых отображений. Таким образом доказывается существование решения с заданной асимптотикой (5). Получаемое при этом решение $\mathbf{x}(\theta; c, s_0)$ гладко зависит от параметров c, s_0 .

Чтобы доказать, что любое ограниченное решение $\mathbf{x}(\theta)$ имеет асимптотику такого типа, надо воспользоваться наличием двух произвольных констант c, s в построенном выше двухпараметрическом семействе решений $\mathbf{x}(\theta; c, s)$. Эти константы следует определить из требования согласования двух решений $\mathbf{x}(\theta_0) = \mathbf{x}(\theta_0; c, s)$ в некоторой точке θ_0 . Отсюда будут следовать их тождественное совпадение $\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{x}(\theta; c, s)$ при любом θ (в силу единственности) и асимптотика (5) для $\mathbf{x}(\theta)$. Таким образом, доказательство этой части теоремы сводится к нахождению корней c, s системы алгебраических уравнений. Эта задача решается на уровне теоремы существования с использованием последовательных приближений. В качестве исходного приближения берутся константы, определяемые из согласования взятого решения с главным членом асимптотики $\mathbf{x}_0(\eta(\theta_0, s_0); c_0) = \mathbf{x}(\theta_0)$. Последующие приближения c_n, s_n находятся из уравнений

$$\mathbf{x}_0(\eta(\theta_0, s_n); c_n) = \mathbf{x}(\theta_0) + \mathbf{x}_0(\eta(\theta_0, s_{n-1}); c_{n-1}) - \mathbf{x}(\theta_0; c_{n-1}, s_{n-1}).$$

Для сдвига фазы берется главное значение $s_n \in [0, 2\pi)$. Используя равномерную ограниченность двух рассматриваемых решений, нетрудно получить равномерную по θ_0, n ограниченность приближенных амплитуд c_n . Затем следует воспользоваться гладкостью по параметрам c, s и равномерной оценкой остатка $\mathbf{x}_0(\eta(\theta_0, s); c) - \mathbf{x}(\theta_0; c) = \mathcal{O}(\theta_0^{-1})$, $\theta_0 \rightarrow \infty$. Эти свойства обеспечивают сходимость последовательных приближений при достаточно большом значении θ_0 . Предельные значения и дают искомые корни $c_n, s_n \rightarrow c, s$. Теорема доказана.

Описанная выше конструкция формального решения соответствует методам ВКБ и двухмасштабных разложений в наиболее простой формулировке. Она оказывается довольно громоздкой. Имеется другой способ, основанный на идеях Крылова–Боголюбова [1], [9], который представляется более эффективным благодаря разбиению всей процедуры на два этапа. Приведем краткое описание этого подхода, который мы будем использовать при анализе растущих решений.

В случае ограниченных решений главный член асимптотики выбирается в виде вектора $\mathbf{x}_0 = A(\sin S, \cos S)^T$ с неопределенными пока функциями $A, S(\theta)$, для которых выписываются аналоги уравнений эйконала и переноса

$$\frac{dS}{d\theta} = P(\theta, A), \quad \frac{dA}{d\theta} = Q(\theta, A). \quad (6)$$

Решение этих уравнений откладывается на второй этап, а на первом этапе строится асимптотика правых частей

$$P(\theta, A) = \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} P_n(A), \quad Q(\theta, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} Q_n(A), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Эти ряды конструируются вместе с асимптотическим решением

$$\mathbf{x}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} \mathbf{x}_n(S; A), \quad \theta \rightarrow \infty.$$

Поправки $\mathbf{x}_n(S; A)$, $n > 0$, определяются как частные решения неоднородных уравнений линейного осциллятора. При этом коэффициенты $P_n(A)$, $Q_n(A)$ рядов (7) входят в правые части уравнений для $\mathbf{x}_{n+1}(S; A)$ и определяются попарно на каждом шаге из требований периодичности решений по переменной S . Две произвольные константы c , s остаются в решениях дифференциальных уравнений (6).

Получаемое таким способом асимптотическое решение является более общим. Например, первые два члена асимптотики описываются формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sin S \\ \cos S \end{pmatrix} - \theta^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^{-2}), \quad A = ce^{-\lambda g_1 \theta^{-2}} + \mathcal{O}(\theta^{-3}),$$

$$S = \frac{\theta^2}{2} - \lambda c^2 \theta + \phi_1 \ln \theta + s + \theta^{-1} (2\lambda c - 2\lambda^2 c^2 g_1 - \phi_2) + \mathcal{O}(\theta^{-2}), \quad \theta \rightarrow \infty,$$

из которых при переразложении вытекает полученное ранее приближение (5).

4. ВКБ-АСИМПТОТИКИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ АМПЛИТУДОЙ

В случае $\lambda > 0$ помимо ограниченных решений существуют растущие. В этом разделе методом ВКБ строится асимптотика двухпараметрического семейства растущих решений. Хотя таких решений оказывается много, остается открытым вопрос о том, исчерпываются ли этим все неограниченные решения.

ТЕОРЕМА 4. Если $\lambda > 0$, то уравнения (3) с исходными данными (2) имеют двухпараметрическое семейство растущих решений $r(\theta; c, s_0)$, $\psi(\theta; c, s_0)$ с асимптотикой

$$\begin{aligned} r(\theta) &= \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^{1/2} + \theta^{-1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n/8} r_n(S; c), \\ \psi(\theta) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n/8} \psi_n(S; c), \quad \theta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты являются 2π -периодическими функциями по фазовой переменной S , которая имеет асимптотику

$$S = \frac{4\sqrt{2}}{5} \lambda^{1/4} \theta^{5/4} + s_{0,1}(c) \ln \theta + \sum_{n=-4}^{\infty} s_n(c) \theta^{-n/4}, \quad \theta \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Первые поправки к главным членам асимптотики описываются формулами $r_1 = c\mu^{-1} \sin S$, $\psi_1 = -c \cos S$, $s_{-4} = -\mu c^2/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для построения решения с неограниченной амплитудой удобно выделить растущую часть, сделав в уравнениях (3) замену функций

$$r = \rho\theta^{1/2} + \theta^{-1/4}\mu^{-1}R(\theta), \quad \psi = \frac{\pi}{2} + \Psi(\theta),$$

где $\rho = 1/\sqrt{\lambda}$, $\mu = \sqrt{2}\lambda^{1/4}$, $\lambda > 0$. Уравнения для новых неизвестных записываются в форме

$$\begin{aligned} R' + \theta^{1/4}\mu \sin \Psi &= \theta^{1/4}\mu[(1-f)\sin \Psi + g \cos \Psi] + \theta^{-1}\frac{R}{4} - \theta^{-1/4}\frac{\mu\rho}{2}, \\ \Psi' - \theta^{1/4}\mu R &= -\rho(\phi - \theta)\theta^{1/2} + \\ &+ \theta^{-1/2}\left\{\frac{R^2}{2} - \mu(\mu\rho + \theta^{-3/4}R)^{-1}[g \sin \Psi + f \cos \Psi]\right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Основная трудность рассматриваемой задачи состоит в выделении из этих уравнений главной части, которая обеспечивает построение асимптотики, отличной от тривиальных степенных рядов (4). Конечно, можно догадаться, что асимптотика убывающих решений $R, \Psi = o(1)$, $\theta \rightarrow \infty$, будет определяться из линеаризованных в нуле уравнений. В самом деле, асимптотическое решение может быть построено в виде рядов по степеням, кратным $\theta^{-1/8}$, с коэффициентами, которые зависят от быстрой переменной $S = (4/5)\mu\theta^{5/4} + \mathcal{O}(\theta)$, $\theta \rightarrow \infty$, и от пары произвольных констант c, s_0 . Но этот путь ведет к громоздким и запутанным вычислениям.

В данной работе предлагается другой способ, который оказывается более простым в реализации и который не связан с предположением об убывании решений R, Ψ . Он представляет собой аналог нелинейного метода ВКБ [9], [10] в комбинации с идеями Крылова–Боголюбова и основан на использовании общего решения уравнений математического маятника

$$\frac{d}{d\sigma}R_0 + \sin \Psi_0 = 0, \quad \frac{d}{d\sigma}\Psi_0 - R_0 = 0. \quad (10)$$

В основу конструкции положено семейство периодических решений уравнений маятника $R_0(\sigma; E), \Psi_0(\sigma; E)$, которое существует в окрестности устойчивой неподвижной точки $(0, 0)$. В качестве параметра E удобно использовать значение интеграла энергии $E = R_0^2/2 - \cos \Psi_0 + 1$. Отметим, что период $T(E)$ и частота $\omega(E) = 2\pi/T(E)$ рассматриваемых решений гладко зависят от энергии. В частности, разложение частоты по малой величине энергии в главных членах имеет вид $\omega(E) = 1 - E/8 + \mathcal{O}(E^2)$, $E \rightarrow 0$.

Для уравнений (9) строится асимптотическое решение при $\theta \rightarrow \infty$ с использованием $R_0(\sigma; E), \Psi_0(\sigma; E)$ в качестве главного члена²⁾. Основная идея состоит в том, что в

²⁾ На использование уравнения маятника в похожей задаче об исследовании нелинейного резонанса указывал Чириков [11].

этих функциях допускаются деформации энергии $E = E(\theta)$ и подбирается подходящим образом быстрая переменная σ .

Анзац берется в виде асимптотических рядов по степеням, кратным $\theta^{-1/4}$:

$$R(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n/4} R_n(\sigma; E), \quad \Psi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n/4} \Psi_n(\sigma; E), \quad (11)$$

с коэффициентами, зависящими от переменных $\sigma = S(\theta)/\omega(E)$, $E = E(\theta)$. Ограниченность коэффициентов по быстрой переменной σ является дополнительным требованием к анзацу.

Фазовая функция $S(\theta)$ и энергия $E(\theta)$ подлежат определению наряду с коэффициентами R_n , Ψ_n . Для них выписываются аналоги уравнений эйконала и переноса

$$\frac{dS}{d\theta} = \mu \theta^{1/4} \omega(E), \quad \frac{dE}{d\theta} = \mu Q(E, \theta). \quad (12)$$

Эти уравнения решаются на втором этапе после определения асимптотики правой части

$$Q(E, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n/4} Q_n(E), \quad \theta \rightarrow \infty.$$

Вводимые таким образом дополнительные неизвестные $Q_n(E)$ находятся на первом этапе из требований периодичности по быстрой переменной σ асимптотического решения (11).

Рекуррентная система задач для вектор-функций $\mathbf{U}_n(\sigma; E) = (R_n, \Psi_n)^T$ получается из уравнений (9) приравниванием выражений при одинаковых степенях θ и представляет собой линеаризованные уравнения маятника

$$\frac{d}{d\sigma} \begin{pmatrix} R_n \\ \Psi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_n \cos \Psi_0 \\ -R_n \end{pmatrix} = \mathbf{F}_n(\sigma; E). \quad (13)$$

Правые части $\mathbf{F}_n$ выписываются через предыдущие приближения. На каждом шаге они содержат очередной неопределенный коэффициент $Q_{n-1}(E)$, который входит множителем при векторе $\mathbf{V}_0 = \hat{\partial}_E \mathbf{U}_0(\sigma; E)$. Фигурирующий в этом выражении оператор $\hat{\partial}_E = [\partial_E - (\omega'/\omega)\sigma\partial_\sigma]$ иногда называется усеченной производной. Так, на первых шагах имеют место выражения

$$\begin{aligned} F_1 &= -Q_0 \mathbf{V}_0, \\ F_2 &= -Q_1 \mathbf{V}_0 - Q_0 \hat{\partial}_E \mathbf{U}_1 - \begin{pmatrix} \rho/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \Psi_1^2 \sin \Psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение неоднородной линеаризованной системы выписывается методом вариации с использованием решений однородной системы

$$\mathbf{V}_1 = \partial_\sigma \mathbf{U}_0(\sigma; E), \quad \mathbf{V}_2 = \partial_E \mathbf{U}_0(\sigma; E) \equiv \mathbf{V}_0 + \frac{\omega'}{\omega} \sigma \mathbf{V}_1.$$

Отметим, что вектор-функции $\mathbf{V}_0(\sigma; E)$, $\mathbf{V}_1(\sigma; E)$ периодичны по σ , а растущий множитель во втором решении возникает благодаря зависимости частоты $\omega(E)$ от энергии. Поскольку вронскиан $W(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1) = 1$, то общее решение выписывается через интегралы по быстрой переменной от кососкалярных произведений в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n = & \mathbf{V}_0 \int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{F}_n] d\eta + \\ & + \mathbf{V}_1 \int_0^\sigma \left([\mathbf{F}_n, \mathbf{V}_0] + \frac{\omega'}{\omega} \int_0^\eta [\mathbf{V}_1, \mathbf{F}_n] d\zeta \right) d\eta + C_n \mathbf{V}_2 + D_n \mathbf{V}_1 \end{aligned} \quad (14)$$

с произвольными константами C_n, D_n .

Первый этап построения асимптотического решения сводится к решению уравнений (13) в классе функций, периодических по быстрой переменной.

ЛЕММА 2. *Рекуррентная система уравнений (13) разрешима в классе периодических по σ функций при подходящем выборе коэффициентов $Q_n(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сводится к исключению из формулы (14) секулярных слагаемых, растущих квадратично и линейно по σ . На этом пути получаются выражения для $Q_{n-1}(E)$ и $C_n = C_n(E)$ через средние значения подынтегральных функций. Константа D_n может быть выбрана любой, например нулем. Хотя при разном выборе $D_n = D_n(E)$ получаются разные ряды, все они асимптотически совпадают (см. [12]).

В частности, вычисления на первых шести шагах приводят к следующим результатам: $Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, $Q_4 = -(4\mu)^{-1} \langle R_0^2 \rangle$, $Q_5 = 0$. Угловыми скобками здесь обозначен интеграл, дающий среднее значение. Среди поправок нулевой оказывается только первая: $\mathbf{U}_1 \equiv 0$.

На втором этапе исследуется уравнение деформации энергии (12).

ЛЕММА 3. *Энергия $E(\theta) = E(\theta; c)$, определяемая как общее решение уравнения (12), зависит от произвольной константы c и имеет асимптотику*

$$E(\theta; c) = \frac{c^2}{2} \theta^{-1/4} + \sum_{n=2}^{\infty} E_n(c) \theta^{-n/4}, \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главный ненулевой коэффициент в асимптотике правой части $Q(E, \theta)$ указывает на убывание решения $E(\theta)$ к нулю при $\theta \rightarrow \infty$. Далее используем асимптотику по малой энергии решения уравнения маятника

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \sin \sigma \omega \\ -\cos \sigma \omega \end{pmatrix} [1 + \mathcal{O}(E)], \quad E \rightarrow 0,$$

из которой вытекает асимптотическая формула для среднего значения $\langle R_0^2 \rangle = E + \mathcal{O}(E^2)$, $E \rightarrow 0$. Тем самым уравнение для энергии в асимптотическом приближении приобретает вид

$$\frac{dE}{d\theta} = -\frac{1}{4} \theta^{-1} [E + \mathcal{O}(E^2)] + \mathcal{O}(\theta^{-3/2}).$$

Из этого уравнения легко усматривается структура главного члена асимптотики $E(\theta) = \text{const} \cdot \theta^{-1/4} + \mathcal{O}(\theta^{-1/2})$ с произвольной константой интегрирования. Полное асимптотическое разложение (15) строится с учетом полных асимптотик для правой части $Q(E, \theta)$ при $\theta \rightarrow \infty$ и для функции $R_0(\sigma; E)$ при $E \rightarrow 0$. Коэффициенты $E_n(c)$ вычисляются по рекуррентным формулам. Выбор первого (произвольного) коэффициента в виде $c^2/2$ сделан для удобства записи последующих формул.

Асимптотика по малой энергии для решения уравнений маятника приводит к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Главный член асимптотического решения уравнений (9) как сложная функция от (σ, θ) имеет асимптотику*

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}(\sigma; E(\theta)) = c\theta^{-1/8} \begin{pmatrix} \sin \sigma\omega \\ -\cos \sigma\omega \end{pmatrix} [1 + \mathcal{O}(\theta^{-1/4})], \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Из этой формулы становятся понятными происхождение степеней, кратных $\theta^{-1/8}$, и обоснованность метода линеаризации для построения асимптотики решений уравнений (9). Отметим, что в асимптотике (16) в качестве быстрой переменной фигурирует фазовая функция $\sigma\omega = S(\theta)$.

В заключение второго этапа следует проинтегрировать уравнение для фазовой функции (12). Для $S(\theta)$, очевидно, получается разложение по степеням, кратным $\theta^{-1/4}$; кроме того, возможно появление члена $\ln \theta$.

Наконец, выписываются ряды (8) по степеням, кратным $\theta^{-1/8}$, которые получаются из рядов (11) после переразложения коэффициентов с учетом асимптотики для энергии (15). На этом заканчивается построение асимптотического решения.

Поскольку в главном порядке при $\theta \rightarrow \infty$ функции R, Ψ удовлетворяют уравнениям линейного осциллятора, то обоснование асимптотики (16) можно получить способом, указанным в работе [13]. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частном случае при $c = 0$ асимптотическое разложение (8) сильно вырождается и представляется рядом (4) по степеням, кратным $\theta^{-1/2}$, с постоянными коэффициентами и с $\psi_0 = \pi/2$. Помимо этого решения существует еще однопараметрическое семейство решений с чисто степенной асимптотикой (8) и с $\psi_0 = -\pi/2$ (см. теорему 2), которое формально не содержится в описанной выше конструкции. Для включения его в единую конструкцию следует в задаче для R, Ψ выбрать неустойчивую точку равновесия математического маятника $(0, -\pi)$ в качестве главного члена асимптотики.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения главного резонанса (1) при $\lambda > 0$ имеют богатые семейства как ограниченных, так и растущих решений. В постановке задачи Коши получение того или иного типа решения зависит от выбора начальной точки. Вопрос об аналитическом описании сепаратрисы, которая отделяет начальные данные разного типа, остается открытым. Численные эксперименты свидетельствуют о довольно сложной спиральной структуре сепаратрисы и о сильной перемежаемости областей в окрестности бесконечности.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00716 и грант поддержки ведущих научных школ № 00-15-96038), а также INTAS (грант № 99-1068).

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [2] *А. Х. Найфэ.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976; *Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1977.
- [3] *А. И. Нейштадт.* ПММ. 1975. Т. 39. № 4. С. 621; Дифф. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060; *R. Haberman, E. K. Ho.* J. Appl. Mech. 1990. V. 62. P. 941; *S. G. Glebov, O. M. Kiselev.* Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9. № 1. P. 60.
- [4] *А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев.* Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962; *M. S. Livingston.* High-energy particle accelerators. New York: Interscience, 1954; *K. S. Golovanivsky.* Phys. Scripta. 1980. V. 22. P. 126; *K. C. Головановский.* Физика плазмы. 1985. Т. 11. № 3. С. 295; *B. Meerson, L. Friedland.* Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 5233; *L. Friedland.* Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 1929; 2000. V. 61. № 4. P. 3732.
- [5] *Л. А. Калякин.* Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 5. С. 594; *L. A. Kalyakin.* Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9. № 1. P. 84.
- [6] *В. В. Козлов, С. Д. Фурта.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1996; *А. Д. Брюно.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998.
- [7] *А. Н. Кузнецов.* Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 2. С. 41.
- [8] *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [9] *Г. Е. Кузмак.* ПММ. 1951. Т. 23. № 3. С. 515.
- [10] *С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 15. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3; *F. J. Bourland, R. Haberman.* SIAM J. Appl. Math. 1988. V. 48. № 3. P. 737.
- [11] *В. В. Чириков.* ДАН СССР. 1959. Т. 125. № 5. С. 1015.
- [12] *Л. А. Калякин.* Вестн. УГАТУ. Уфа. 2001. № 1(3). С. 40.
- [13] *М. В. Федорюк.* ЖВМиМФ. 1986. Т. 26. № 2. С. 196.